

УДК 532.516 : 533.6.011.7 : 621.822

© 2000 г. А.В. ЕМЕЛЬЯНОВ, И.А. ЕМЕЛЬЯНОВ

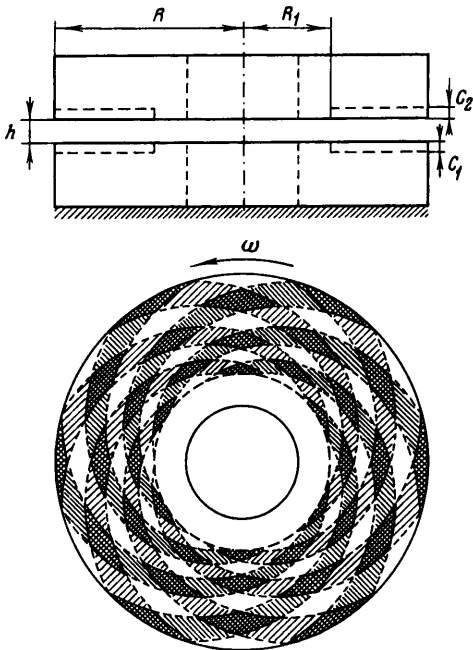
ТЕОРИЯ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПОДШИПНИКОВ СО СПИРАЛЬНЫМИ КАНАВКАМИ НА ОБЕИХ РАБОЧИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Анализируется течение вязкого газа в зазоре подшипника со спиральными канавками разной глубины на обеих рабочих поверхностях. Граничные условия для скоростей учитывают эффекты скольжения первого и второго порядка по методу Черчиньяни – Слезкина. Выведено существенно нелинейное дифференциальное уравнение, определяющее закон изменения давления в активной зоне подшипника. На примере физической модели с закрытым центром проведено сравнение разработанной теории с экспериментом [1] и сделаны выводы, касающиеся преимуществ бинарных моделей.

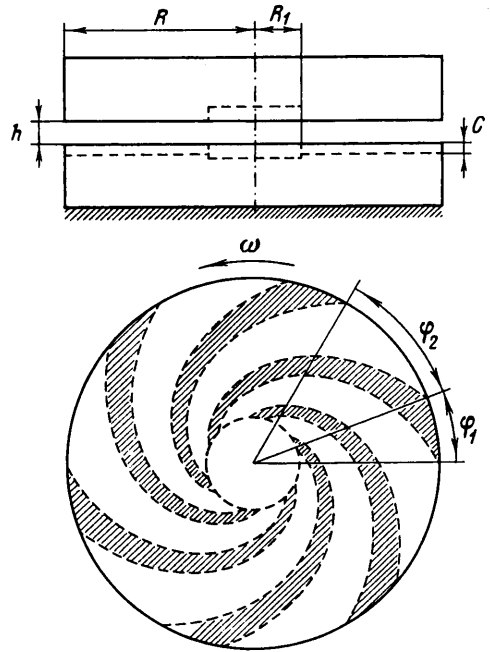
На фиг. 1 представлена общая модель газодинамического подшипника со спиральными канавками разной глубины c_1 и c_2 на неподвижной и движущейся стенках смазочного слоя. При равной глубине канавок ($c_1 = c_2 = c$) эта модель превращается в бинарную [2, 3], у которой геометрия рабочих поверхностей совершенно идентична. При $c_1 = 0$, $c_2 = c$ либо при $c_1 = c$, $c_2 = 0$ общая модель переходит в парциальную (фиг. 2), у которой канавки имеются только на одной из рабочих поверхностей. Парциальные подшипники в настоящее время изучены достаточно полно. Им, в частности, посвящены работы [1, 4, 5].

Бинарные подшипники пока мало исследованы. В работах [2, 3] сделаны лишь первые шаги в этом направлении и доказано, что бинарные подшипники намного превосходят свои парциальные прототипы по всем рабочим характеристикам. Настоящая статья посвящена дальнейшему развитию и уточнению теории общей физической модели [2, 3] путем учета эффектов скольжения первого и второго порядка по методу Черчиньяни – Слезкина [6, 7]. При обычной толщине смазочного слоя в 1–2 мкм [1] эти уточнения весьма существенны.

1. Постановка задачи. В системе отсчета, вращающейся вокруг оси подшипника в ту же сторону, куда вращается его подвижная деталь, но вдвое медленнее ее, объемы газа, лежащие на пересечении канавок, движутся к центру в строго радиальном направлении, транспортируя при этом в глубь смазочного слоя захваченные массы газа. В этой вращающейся системе отсчета мгновенный снимок активной зоны подшипника напоминает паркет, набранный из мозаичных фрагментов разных размеров, но подобных между собой (фиг. 3). Каждый мозаичный фрагмент состоит из четырех сопряженных областей. Область 1 лежит на пересечении канавок, область 2 образована канавкой внизу и перемычкой сверху, область 3 лежит на пересечении перемычек и область 4 образована внизу перемычкой, сверху канавкой. Предполагается, что число канавок на каждой поверхности достаточно велико, чтобы можно было пренебречь кривизной границ мозаичного фрагмента и считать его ромбом, состоящим из двух подобных ромбов 1 и 3 и двух конгруэнтных параллелограммов 2 и 4. Локальная ортогональная система координат χ , ϑ , связанная с мозаичным фрагментом, вращается вокруг оси подшипника в ту же сторону, куда вращается ротор



Фиг. 1. Общая модель газового подшипника со спиральными канавками на обеих поверхностях



Фиг. 2. Парциальный газодинамический подшипник с закрытым центром

подшипника, но вдвое медленнее его. И одновременно движется к центру со скоростью $0,5\omega r_0 \operatorname{tg} \psi$, где ω – угловая скорость ротора, r_0 – радиальная координата точки O , ψ – угол наклона канавок к скорости скольжения (угол атаки). По мере приближения к центру мозаичный фрагмент уменьшается в размерах пропорционально r_0 , сохраняя при этом подобие всех границ и точек.

Геометрический смысл координат χ , ϑ ясен из соотношений

$$\chi = \rho - \rho_0, \quad \vartheta = \varphi - \varphi_0, \quad \rho = r/R \quad (1.1)$$

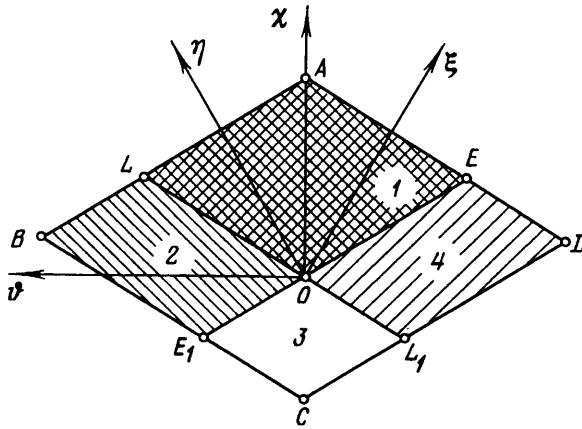
где r – радиальная координата, R – радиус внешней границы подшипника, φ – угловая координата, ρ_0 , φ_0 – значения ρ и φ в точке O . Локальная система координат χ , ϑ является неинерциальной. Но уравнения Рейнольдса не содержат инерционных членов и поэтому выглядят одинаково и в инерциальных, и в неинерциальных системах. В рассматриваемом случае они имеют вид

$$\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \chi} = \mu \frac{\partial^2 V_\chi}{\partial z^2}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = \mu \frac{\partial^2 V_\vartheta}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь p – давление, μ – динамический коэффициент вязкости, z – координата, отсчитываемая вверх от плоскости перемычек нижней стенки по нормали к ней. Предполагается, что хотя число канавок достаточно велико, но толщина смазочного слоя остается не менее чем на два порядка меньше ширины канавок и перемычек в их самом узком месте, так что использование уравнений (1.2) правомерно.

Скорости точек, принадлежащих твердым стенкам, в системе χ , ϑ выглядят так

$$\begin{aligned} V_\chi &= 0,5\omega r \operatorname{tg} \psi, & V_\vartheta &= -0,5\omega r \quad (z = -c_1) \\ V_\chi &= 0,5\omega r \operatorname{tg} \psi, & V_\vartheta &= -0,5\omega r \quad (z = h + c_1) \end{aligned} \quad (1.3)$$



Фиг. 3. Мозаичный фрагмент активной зоны, связанная с ним локальная система отсчета χ, ϑ и оси ζ, η , ортогональные границам LL_1 и EE_1

Здесь h – толщина смазочного слоя в области 3, c_1 и c_2 – глубина канавок на нижней и верхней стенке смазочного слоя соответственно.

Выражения (1.3) записаны для области 1 мозаичного фрагмента общей модели (фиг. 2), но их легко трансформировать применительно к любой из остальных трех областей.

В работах [2, 3] выражения (1.3) являются граничными условиями для скоростей. Теперь же эти условия, будучи записанными с учетом скольжения первого и второго порядка по методу [6, 7], выглядят так

$$V_\chi = \frac{1}{2} \omega r \operatorname{tg} \psi + \alpha_1 l \left(\frac{\partial V_\chi}{\partial z} - \frac{\alpha_2 l}{2} \frac{\partial^2 V_\chi}{\partial z^2} \right) \quad (z = -c_1)$$

$$V_\vartheta = -\frac{1}{2} \omega r + \alpha_1 l \left(\frac{\partial V_\vartheta}{\partial z} - \frac{\alpha_2 l}{2} \frac{\partial^2 V_\vartheta}{\partial z^2} \right) \quad (1.4)$$

$$V_\chi = \frac{1}{2} \omega r \operatorname{tg} \psi - \alpha_1 l \left(\frac{\partial V_\chi}{\partial z} + \frac{\alpha_2 l}{2} \frac{\partial^2 V_\chi}{\partial z^2} \right) \quad (z = h + c_2)$$

$$V_\vartheta = \frac{1}{2} \omega r - \alpha_1 l \left(\frac{\partial V_\vartheta}{\partial z} + \frac{\alpha_2 l}{2} \frac{\partial^2 V_\vartheta}{\partial z^2} \right) \quad (1.5)$$

$$\alpha_1 = 1,1466, \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2}{\pi \alpha_1} = 1,7018$$

Здесь l – средняя длина свободного пробега молекул газа, α_1 и α_2 – коэффициенты скольжения первого и второго порядка [4–6].

При $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ граничные условия (1.4) соответствуют приближению Максвелла – Бургдорфера (Burgdorfer), приводящему к завышенным значениям избыточного давления по сравнению с экспериментальными данными [1].

Рельеф давления в смазочном слое активной зоны похож на фигурный купол храма Василия Блаженного, усеянный множеством низких пирамидальных шишек. Задача вычисления реакции смазочного слоя аналогична задаче вычисления объема такого купола. Очевидно, существует фигура вращения с тем же объемом, причем не существ-

венно, является ли гладкая поверхность огибающей для фигурного купола или она получается путем срезания локальных выступов, если эти выступы достаточно малы. Это "сглаженное" давление, являющееся функцией только радиальной координаты, принято называть [2, 3, 8] доминирующим давлением. Вывод дифференциального уравнения, определяющего закон изменения безразмерного доминирующего давления в зависимости от ρ , и является основной целью теории.

Предполагается, что температура постоянна во всех точках газового слоя и на его стенках, так что плотность пропорциональна давлению и температурных скачков на границах со стенками нет. Вместо уравнения, выражающего неразрывность течения в каждой точке смазочного слоя, используются уравнения, выражающие неразрывность потоков газа на внутренних границах мозаичного фрагмента. Кроме этого, используются закон сохранения массы и локальная аппроксимация давления в четырех сопряженных областях двумерными линейными сплайнами. Первое и второе уравнения (1.2) дважды интегрируются по z и с учетом граничных условий (1.4) приводятся к виду

$$V_\chi = \frac{1}{2} \omega r \operatorname{tg} \psi - \frac{(c_1 + z)(h + c_2 - z) + \alpha_1 l(h + c_1 + c_2 + \alpha_2 l)}{2\mu R} \frac{\partial p}{\partial \chi} \quad (1.6)$$

$$V_\vartheta = -\frac{1}{2} \omega r \frac{h + c_2 - c_1 - 2z}{h + c_1 + c_2 + 2\alpha_1 l} - \frac{(c_1 + z)(h + c_2 - z) + \alpha_1 l(h + c_1 + c_2 + \alpha_2 l)}{2\mu r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta}$$

Пусть dQ_χ и dQ_ϑ – локальные массовые расходы газа в направлении осей χ и ϑ через элементарные участки линий $\chi = \text{const}$ и $\vartheta = \text{const}$ соответственно

$$dQ_\chi = bpr d\vartheta \int_{-c_1}^{h+c_2} V_\chi dz, \quad dQ_\vartheta = bpR d\chi \int_{-c_1}^{h+c_2} V_\vartheta dz \quad (1.7)$$

где b – отношение плотности к давлению при температуре смазочного слоя.

Из соотношений (1.7) и (1.6) следует

$$dQ_\chi = -\frac{1}{2} bpr(h + c_1 + c_2) \left\{ -\omega r \operatorname{tg} \psi + \frac{1}{6\mu R} [(h + c_1 + c_2)^2 + 6\alpha_1 l(h + c_1 + c_2 + \alpha_2 l)] \frac{\partial p}{\partial \chi} \right\} d\vartheta$$

$$dQ_\vartheta = -\frac{bpR}{12\mu r} (h + c_1 + c_2) [(h + c_1 + c_2)^2 + 6\alpha_1 l(h + c_1 + \alpha_2 l)] \frac{\partial p}{\partial \vartheta} d\chi \quad (1.8)$$

На фиг. 3 ось ξ перпендикулярна границе LL_1 , а ось η ортогональна границе EE_1 . Пусть dQ_ξ и dQ_η – локальные массовые расходы газа в направлении осей ξ и η через элементарные участки соответствующих границ. Новые расходы связаны с выражениями (1.8) соотношениями [2]

$$dQ_\xi = dQ_\chi - dQ_\vartheta, \quad dQ_\eta = dQ_\chi + dQ_\vartheta \quad (1.9)$$

причем дифференциалы координат χ и ϑ на границах EE_1 и LL_1 (фиг. 3) должны быть связаны очевидными условиями [2]

$$\rho d\vartheta = d\chi \operatorname{ctg} \psi \quad (1.10)$$

Из (1.8), (1.9) и (1.10) следует

$$dQ_\xi = -bp \left\{ \frac{h + c_1 + c_2}{12\mu} [(h + c_1 + c_2)^2 + 6\alpha_1 l(h + c_1 + c_2 + \alpha_2 l)] \left(\frac{\partial p}{\partial \chi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \operatorname{tg} \psi \right) - \frac{1}{2} \omega R (h + c_1 + c_2) r \operatorname{tg} \psi \right\} \rho d\vartheta \quad (1.11)$$

а dQ_η отличается от dQ_ξ лишь знаком плюс в круглой скобке, содержащей производные давления по χ и ϑ .

В дальнейшем придется использовать выражения dQ_χ (1.8), dQ_ξ и dQ_η , которые можно привести к более удобной форме

$$dQ_\chi = \frac{bp_a^2}{12\mu} P_i(h+c_1+c_2) \left\{ \Lambda h^2 \rho \operatorname{tg} \psi - [(h+c_1+c_2)^2 + 6\alpha_1 l(h+c_1+c_2 + \alpha_2 l)] \frac{\partial P_i}{\partial \chi} \right\} \rho d\vartheta,$$

$$dQ_\xi = \frac{bp_a^2}{12\mu} P_i(h+c_1+c_2) \left\{ \Lambda h^2 \rho \operatorname{tg} \psi - [(h+c_1+c_2)^2 + 6\alpha_1 l(h+c_1+c_2 + \alpha_2 l)] \left(\frac{\partial P_i}{\partial \chi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_i}{\partial \vartheta} \operatorname{tg} \psi \right) \right\} \rho d\vartheta$$
(1.12)

$$dQ_\eta = \frac{bp_a^2}{12\mu} P_i(h+c_1+c_2) \left\{ \Lambda h^2 \rho \operatorname{tg} \psi - [(h+c_1+c_2)^2 + 6\alpha_1 l(h+c_1+c_2 + \alpha_2 l)] \left(\frac{\partial P_i}{\partial \chi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_i}{\partial \vartheta} \operatorname{tg} \psi \right) \right\} \rho d\vartheta$$

$$P_i = p / p_a, \quad \Lambda = 6\mu\omega R^2 / p_a h^2$$

где p_a – атмосферное давление, Λ – число сжимаемости.

Выражения (1.12) будут соответствовать любой из четырех областей мозаичного фрагмента, если в них принять: $P_i = P_1, c_1 = c_1, c_2 = c_2$ – для области 1, $P_i = P_2, c_1 = c_1, c_2 = 0$ – для области 2, $P_i = P_3, c_1 = 0, c_2 = 0$ – для области 3, $P_i = P_4, c_1 = 0, c_2 = c_2$ – для области 4.

2. Локальная аппроксимация давления в четырех областях мозаичного фрагмента.

При достаточно большом числе спиральных канавок функции P_i , где i – номер области, можно аппроксимировать двумерными сплайнами [2, 3]

$$P_i = P + a_i \chi + b_i \vartheta \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$
(2.1)

В пределах мозаичного фрагмента a_i, b_i – константы, однако при изменении размеров мозаичного фрагмента и его расстояния от центра эти коэффициенты изменяются, как и безразмерное давление P в точке O . Таким образом, и P , и коэффициенты сплайнов (2.1) являются функциями радиальной координаты ρ .

Далее гладкая функция $P = P(\rho)$ будет отождествляться с безразмерным доминирующим давлением в смазочном слое активной зоны подшипника [2, 3]. Ближайшая же задача состоит в том, чтобы найти восемь уравнений, связывающих коэффициенты сплайнов (2.1) с производной доминирующего давления P по координате ρ . Первые четыре уравнения вытекают из подобия мозаичных фрагментов, которым одновременно принадлежат точки А, В, С, D, Е, Е₁, L, L₁ (фиг. 3) [3]. В безразмерном виде эти уравнения выглядят так

$$a_3 = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{dP}{d\rho} - \kappa a_1 \right), \quad b_2 = \left(2\kappa a_1 - \delta a_2 - \frac{dP}{d\rho} \right) \rho \operatorname{tg} \psi, \quad b_4 = - \left(2\kappa a_1 - \delta a_4 - \frac{dP}{d\rho} \right) \rho \operatorname{tg} \psi,$$

$$b_3 = - \frac{\kappa}{\alpha} b_1$$
(2.2)

$$\kappa = \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}, \quad \alpha = \frac{\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}, \quad \delta = \kappa - \alpha, \quad \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{2\pi}{n}$$

Здесь n – число канавок на одной поверхности, φ_1 и φ_2 – центральные углы, приходящиеся на канавку и выступ соответственно (фиг. 2).

3. Четыре уравнения, следующие из неразрывности потоков смазки через общие границы сопряженных областей. Условия неразрывности потоков газа через границы областей 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 1 (фиг. 3) выражаются равенствами

$$dQ_{\xi_2} = dQ_{\xi_1}, \quad dQ_{\eta_3} = dQ_{\eta_2}, \quad dQ_{\xi_3} = dQ_{\xi_4}, \quad dQ_{\eta_4} = dQ_{\eta_1} \quad (3.1)$$

где числовые индексы являются указателями принадлежности локальных расходов соответствующим областям мозаичного фрагмента.

Из соотношений (1.12), (2.1) и (3.1) следуют уравнения

$$\begin{aligned} \sigma_2 b_2 - \sigma_0 b_1 + (\sigma_0 a_1 - \sigma_2 a_2) \rho \operatorname{ctg} \psi &= \Lambda v_\varepsilon^2 \gamma_2 \rho^2 \\ \sigma_2 b_2 - \sigma b_3 + (\sigma_2 a_2 - \sigma a_3) \rho \operatorname{ctg} \psi &= \Lambda v_\varepsilon^2 \gamma_1 \rho^2 \\ \sigma b_3 - \sigma_1 b_4 + (\sigma_1 a_4 - \sigma a_3) \rho \operatorname{ctg} \psi &= \Lambda v_\varepsilon^2 \gamma_2 \rho^2 \\ \sigma_0 b_1 - \sigma_1 b_4 + (\sigma_0 a_1 - \sigma_1 a_4) \rho \operatorname{ctg} \psi &= \Lambda v_\varepsilon^2 \gamma_1 \rho^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\gamma_1 = \frac{c_1}{h_0 + c_1 + c_2}, \quad \gamma_2 = \frac{c_2}{h_0 + c_1 + c_2}, \quad v_1 = 1 - \gamma_1, \quad v_2 = 1 - \gamma_2$$

$$v_\varepsilon = 1 - \gamma_1 - \gamma_2, \quad m = \frac{l}{h_0}, \quad \zeta = \frac{h - h_0}{h_0}, \quad u = 1 + \zeta$$

$$g = \frac{m}{uP}, \quad s = 2\alpha_1 g, \quad s_1 = 3s, \quad s_2 = \alpha_2 g, \quad \varepsilon_1 = v_1^3 \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_2 = v_2^3, \quad \varepsilon = v_\varepsilon^3, \quad \sigma_0 = 1 + v_\varepsilon s_1 (1 + v_\varepsilon s_2), \quad \sigma = \varepsilon [1 + s_1 (1 + s_2)]$$

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 \left[1 + s_1 \frac{v_\varepsilon}{v_1} \left(1 + s_2 \frac{v_\varepsilon}{v_1} \right) \right], \quad \sigma_2 = \varepsilon_2 \left[1 + s_1 \frac{v_\varepsilon}{v_2} \left(1 + s_2 \frac{v_\varepsilon}{v_2} \right) \right]$$

где m – нормированное число Кнудсена, h_0 – номинальное значение рабочего зазора h , l_a – средняя длина свободного пробега молекул газа при атмосферном давлении и температуре смазочного слоя, ζ – относительное осевое смещение, u – безразмерный зазор.

Как видно из (3.3), параметры γ_1 , γ_2 и v_ε меняются и при изменении c_1 , и при изменении c_2 . Эти параметры не имеют оптимума и используются лишь как промежуточные обозначения, сокращающие запись. Они должны быть выражены через нормированную глубину нижних γ_{10} и верхних γ_{20} канавок

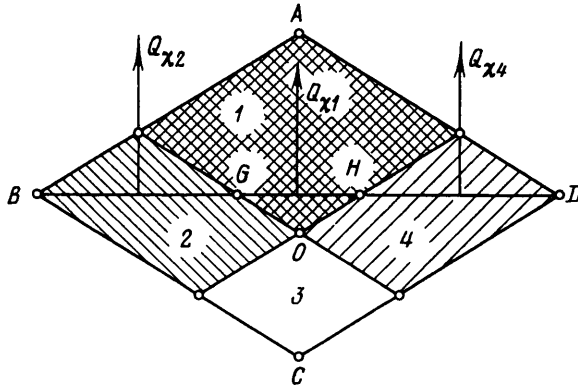
$$\gamma_{10} = \frac{c_1}{h_0 + c_1}, \quad \gamma_{20} = \frac{c_2}{h + c_2} \quad (3.4)$$

$$\gamma_1 = \frac{\gamma_{10} v_{20}}{\Sigma}, \quad \gamma_2 = \frac{\gamma_{20} v_{10}}{\Sigma}, \quad v_{10} = 1 - \gamma_{10}, \quad v_{20} = 1 - \gamma_{20} \quad (3.5)$$

$$\Sigma = v_{10} v_{20} u + \gamma_{10} v_{20} + \gamma_{20} v_{10}, \quad v_\varepsilon = 1 - \chi, \quad \chi = \gamma_1 + \gamma_2$$

Уравнения (2.2) и (3.2) позволяют выразить все восемь коэффициентов сплайнов (2.1) через производную $dP/d\rho$. Но для определения самой производной доминирующего давления по безразмерной радиальной координате ρ необходимо получить еще одно уравнение.

4. Уравнение, связывающее радиальный расход газа через активную зону с производной $dP/d\rho$. На фиг. 4 линия DHGB – это линия $\chi = \text{const}$, в четырех обозначенных



Фиг. 4. К вычислению массового расхода смазки через диагональ BD мозаичного фрагмента в локальной системе отсчета

точках которой переменная ϑ имеет значения

$$\vartheta_D = -\frac{\pi}{n}, \quad \vartheta_H = -\frac{\pi}{n}\delta, \quad \vartheta_G = \frac{\pi}{n}\delta, \quad \vartheta_B = \frac{\pi}{n}$$

Пусть $Q_{\chi 4}$ – радиальный массовый расход газа через линию DH , пересекающую четвертую область мозаичного фрагмента, а $Q_{\chi 1}$ и $Q_{\chi 2}$ – соответствующие значения расходов через отрезки HG и GB , лежащие в первой и второй областях. Все эти расходы вычисляются в движущейся локальной системе отсчета χ, ϑ и выражаются криволинейными интегралами

$$Q_{\chi 4} = \int_D^H dQ_{\chi 4}, \quad Q_{\chi 1} = \int_H^G dQ_{\chi 1}, \quad Q_{\chi 2} = \int_G^B dQ_{\chi 2}.$$

Вычислив эти интегралы с учетом выражений dQ_{χ} (1.12) и (2.1) и сложив их, можно найти суммарный массовый расход газа Q_{χ} через диагональ DB мозаичного фрагмента в подвижной системе отсчета χ, ϑ

$$Q_{\chi} = -\frac{\pi b p_a^2}{6n\mu} P \{ \Lambda h^2 [h + \kappa(c_1 + c_2)] \rho^2 \operatorname{tg} \psi - (\alpha(h + c_1))[(h + c_1)^2 + 6\alpha_1 l(h + c_1 + \alpha_2 l)] a_2 + \delta(h + c_1 + c_2)[(h + c_1 + c_2)^2 + 6\alpha_1 l(h + c_1 + c_2 + \alpha_2 l)] a_1 + \alpha(h + c_2)[(h + c_2)^2 + 6\alpha_1 l(h + c_2 + \alpha_2 l)] a_4 \} \rho \quad (4.1)$$

Пусть теперь Δs_i – площадь соответствующей области мозаичного фрагмента, а Δs – его суммарная площадь

$$\Delta s_1 = \frac{2\pi^2}{n^2} \kappa^2 r^2 \operatorname{tg} \psi, \quad \Delta s_2 = \Delta s_4 = \frac{2\pi^2}{n^2} \kappa \alpha r^2 \operatorname{tg} \psi \quad (4.2)$$

$$\Delta s_3 = \frac{2\pi^2}{n^2} \alpha^2 r^2 \operatorname{tg} \psi, \quad \Delta s = \frac{2\pi^2}{n^2} r^2 \operatorname{tg} \psi$$

Зная толщину смазочного слоя в каждой из четырех областей, можно вычислить общий объем смазочной пленки в границах мозаичного фрагмента. Умножив этот объем на плотность в точке O , которая мало отличается от плотности в любом месте мозаичного фрагмента и равна $b p_a P$, можно найти массу газа Δm , заключенную между

стенками мозаичного фрагмента

$$\begin{aligned} \Delta m &= bp_a P[\Delta s_1(h + c_1 + c_2) + \Delta s_2(2h + c_1 + c_2) + \Delta s_3 h] = \\ &= bp_a P \frac{2\pi^2}{n^2} [h + \kappa(c_1 + c_2)] r^2 \operatorname{tg} \psi \end{aligned} \quad (4.3)$$

Частное от деления этого выражения на площадь мозаичного фрагмента Δs (4.2) есть приближенное значение производной массы по площади смазочного слоя

$$\frac{dm}{ds} = bp_a P [h + \kappa(c_1 + c_2)] \quad (4.4)$$

Мозаичные фрагменты, расположенные на окружности $r = \text{const}$, движутся к центру со скоростью $0,5\omega r \operatorname{tg} \psi$, в результате чего за единицу времени через линию $r = \text{const}$ перемещается смазочная пленка площадью

$$S_V = -\pi\omega r^2 \operatorname{tg} \psi \quad (4.5)$$

По своему физическому смыслу S_V есть поверхностная скорость. Минус в (4.5) указывает на движение в сторону уменьшения радиальной координаты.

Перемножив (4.4) и (4.5), можно найти секундный массовый расход газа Q_V через линию $r = \text{const}$ в неподвижной системе отсчета, вызванный центростремительным движением мозаичных фрагментов.

$$Q_V = -\pi b p_a \omega P [h + \kappa(c_1 + c_2)] r^2 \operatorname{tg} \psi \quad (4.6)$$

Поскольку в системе отсчета, связанной с мозаичными фрагментами, расположенными на одном расстоянии от центра, радиальный расход смазки через линию $r = \text{const}$ равен nQ_χ , то полный радиальный массовый расход смазки через зазор бинарного подшипника Q представится суммой $Q = nQ_\chi + Q_V$.

Принимая во внимание выражение Λ (1.12), можно проверить, что

$$\frac{\pi b p_a^2}{6\mu} P \Lambda h^2 [h + \kappa(c_1 + c_2)] \rho^2 \operatorname{tg} \psi - \pi b p_a \omega P [h + \kappa(c_1 + c_2)] r^2 \operatorname{tg} \psi = 0 \quad (4.7)$$

Совместное рассмотрение соотношений (4.1), (4.6) и (4.7) и использование обозначений (3.3)–(3.5) позволяет преобразовать Q к виду

$$Q = \frac{\pi b p_a^2 h_0^3}{12\mu} Q^*, \quad Q^* = -\frac{2u^3}{\varepsilon} P [\delta\sigma_0 a_1 + \alpha(\sigma_2 a_2 + \sigma_1 a_4)] \rho \quad (4.8)$$

где Q^* – безразмерный расход.

5. Уравнение для доминирующего давления. Рассматривая систему восьми уравнений (2.2), (3.2), можно преобразовать выражение Q^* (4.8) к виду

$$Q^* = -\frac{2u^3}{\varepsilon} P \left[\kappa(\sigma_0 - \sigma) a_1 + \sigma \frac{dP}{d\rho} \right] \rho \quad (5.1)$$

$$a_1 = \frac{\sigma \cos^2 \psi + \lambda \sin^2 \psi}{\theta_1 \cos^2 \psi + \theta_2 \sin^2 \psi} \frac{dP}{d\rho} + \frac{\Lambda \alpha v_\varepsilon^2 (\gamma_1 + \gamma_2) \sin 2\psi}{2(\theta_1 \cos^2 \psi + \theta_2 \sin^2 \psi)} \rho \quad (5.2)$$

Присутствующие здесь новые символы имеют смысл

$$\lambda = \xi + \delta\sigma, \quad \xi = \alpha(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \theta_1 = \alpha\sigma_0 - \kappa\sigma \quad (5.3)$$

$$\theta_2 = \lambda_1 + \delta\lambda_2, \quad \lambda_1 = 2\kappa\xi, \quad \lambda_2 = \alpha\sigma_0 + \kappa\sigma$$

Совместное рассмотрение соотношений (5.1)–(5.3) приводит к уравнению

$$\frac{dP}{d\rho} = -\Lambda A_1 \rho - \frac{A_2 Q^*}{u^3 \rho P} \quad (5.4)$$

$$A_1 = \kappa \alpha \chi \eta v_\varepsilon^2 (\sigma_0 - \sigma) \sin 2\psi, \quad A_2 = \varepsilon \eta (\theta_1 \cos^2 \psi + \theta_2 \sin^2 \psi)$$

$$\chi = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \eta = \frac{1}{2(\tau_1 \cos^2 \psi + \tau_2 \sin^2 \psi)}$$

$$\tau_1 = \sigma_0 \sigma, \quad \tau_2 = \delta^2 \tau_1 + \kappa \xi (\sigma_0 + \sigma)$$

Уравнение (5.4) является существенно нелинейным, поскольку его коэффициенты через посредство функций σ , σ_0 , σ_1 и σ_2 весьма сложно зависят от g , а следовательно, и от искомой функции P . Кроме этого, правая часть уравнения (5.4) содержит неизвестную величину Q^* , вследствие чего краевые условия для него в общем случае формулируются так, как если бы оно было уравнением второго порядка. Исключение представляет собой безрасходная конструкция, у которой $Q^* = 0$. Безрасходной, в частности, является парциальная модель, представленная на фиг. 2.

6. Интегральные характеристики, расчеты и выводы. Подъемная сила F представляет собой разность между реакцией смазочного слоя и силой, с которой внешняя среда давит на открытую поверхность взвешенной детали. Под жесткостью K смазочного слоя обычно понимается производная F по рабочему зазору h с обратным знаком. Для безрасходной конструкции эти характеристики определяются выражениями

$$F = \pi R^2 p_a F^*, \quad K = \frac{\pi R^2 p_a}{h_0} K^*$$

$$F^* = 2 \int_{\rho_1}^1 P \rho d\rho + P_1 \rho_1^2 - P_0, \quad K^* = -\frac{dF^*}{d\zeta}$$

где F^* – безразмерная подъемная сила, K^* – безразмерная жесткость подшипника, а P – сеточная функция, полученная в результате численного решения уравнения (5.4) при условии

$$Q^* = 0, \quad P = P_0, \quad \rho = 1 \quad (6.1)$$

где P_1 – значение P при $\rho = \rho_1$.

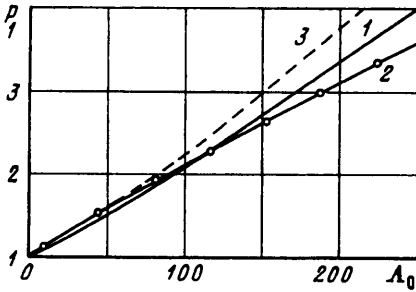
Главный момент сил вязкого трения взвешенной детали о слой газа M относительно оси подшипника и безразмерный момент сопротивления M^* для общей модели с закрытым центром определяются выражениями

$$M = \pi R^2 p_a h_0 M^*, \quad M^* = \frac{\Lambda_0}{3u} \int_{\rho_1}^1 T \rho^3 d\rho$$

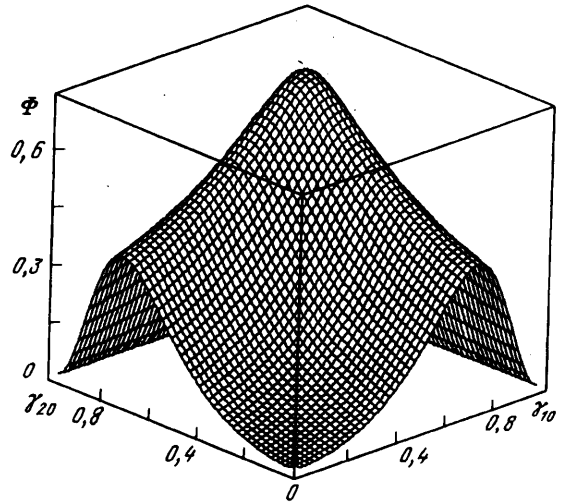
где T – весьма сложная функция, алгоритм вычисления которой включает не только решение уравнения (6.5) при краевом условии (6.1), но и множество других операций, занимающих в общей сложности гораздо больше места, чем позволяют рамки статьи. Общее представление о методе вычисления M^* можно составить по работе [8], хотя в рассматриваемом случае задача осложняется учетом эффектов скольжения.

Пока никаких сведений об испытаниях бинарных подшипников нет. Но в статье [1] приведены данные эксперимента Стеранки, относящиеся к парциальному подпятнику с нулевым расходом газа ($Q^* = 0$) и следующими параметрами:

$$\rho_1 = 0,679, \quad \gamma_0 = 0,603, \quad \psi = 18^\circ, \quad \kappa = 0,655, \quad P_0 = 1, \quad \zeta = 0, \quad m = 0,1577$$



Фиг. 5



Фиг. 6

Фиг. 5. Сравнение теории 1 с экспериментом [1] 2 и с теорией [1] 3 ($m = 0,1577$, $\rho_1 = 0,679$, $\psi = 18^\circ$, $\gamma_0 = 0,603$, $\kappa = 0,655$, $P_0 = 1$, $\zeta = 0$)

Фиг. 6. Рельеф функции $\Phi = F^*/M^*$ для общей модели подшипника со спиральными канавками на обеих рабочих поверхностях в зависимости от относительной глубины нижних γ_{10} и верхних γ_{20} канавок ($\kappa = 0,5$, $\psi = 14^\circ 9'$, $m = 0$)

Здесь ρ_1 – безразмерная радиальная координата внутренней границы профилированной зоны, где замерялось безразмерное давление P .

На фиг. 5 кривая 2 – данные эксперимента, взятые из работы [1], линия 1 – результат численного решения уравнения (5.4) при краевом условии (6.1) и при $P_0 = 1$, а кривая линия 3 – данные теории Синга – Маланоски [1].

Поскольку парциальный подпятник получается из общей модели дважды (при $\gamma_{10} \neq 0$, $\gamma_{20} = 0$ и при $\gamma_{10} = 0$, $\gamma_{20} \neq 0$), то сплошные кривые на фиг. 5 вычислялись дважды: при $\gamma_{10} = 0,603$, $\gamma_{20} = 0$ и при $\gamma_{10} = 0$, $\gamma_{20} = 0,603$. Оба результата, как и ожидалось, совпали.

Проверено также, что данные теории Синга – Маланоски [1] точно соответствуют случаю $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$. Как видно, метод Черчиньяни – Слезкина приводит к лучшему соответствию с экспериментом, чем метод Максвелла – Бургдорфера, использованный в работе [1]. Об условиях проведения эксперимента [1] ничего неизвестно, так что нет оснований считать приведенные экспериментальные данные эталонными.

На фиг. 6 представлен рельефный график функции $\Phi = F^*/M^*$ при $m = 0$ для общей модели с профилированными параметрами $\kappa = 0,5$, $\psi = 14^\circ 9'$ при изменении нормированной глубины нижних и верхних канавок в пределах от 0 до 1. На этом графике кривые на гранях $\gamma_{10} = 0$ и $\gamma_{20} = 0$ соответствуют парциальной модели, а вершина поверхности относится к бинарной модели. Как видно, бинарные подшипники более чем в 2 раза превосходят свои парциальные прототипы по важнейшей качественной характеристике, равной отношению подъемной силы смазочного слоя к его суммарному моменту сопротивления.

Заключение. Выведено существенно нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, определяющей закон изменения доминирующего давления в активной зоне газодинамического подшипника со спиральными канавками на неподвижной и движущейся рабочих поверхностях. Это

уравнение учитывает все основные геометрические параметры подшипника и эффекты скольжения первого и второго порядка. Сопоставление теоретических и экспериментальных данных для парциального подшипника подтверждает приемлемую для практики точность полученного уравнения. Обнаружено, что бинарные подшипники более чем в 2 раза превосходят свои парциальные прототипы по подъемной силе, деленной на суммарный момент сил вязкого трения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-03555).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hsing F.C., Malanoski S.B.* Mean free path effect in spiral-grooved thrust bearings // Trans. ASME. Ser. F.J. Lubr. Technol. 1969. V. 91. № 1. P. 69–78.
2. *Емельянов А.В., Емельянов И.А.* Основы теории газодинамических подшипников и бесконтактных уплотнений со спиральными канавками на обеих поверхностях // Докл. РАН. 1998. Т. 363. № 2. С. 187–190.
3. *Yemelyanov A.V., Yemelyanov I.A.* Physical models, theory and fundamental improvement to self-acting spiral-grooved gas bearings and visco-seals // Proc. Inst. Mech. Engirs. Pt J. 1999. V. 213. № 4. P. 263–273.
4. *Malanoski S.B., Pan C.H.T.* The static and dynamic characteristics of the spiral-grooved thrust bearing // Trans. ASME. J. Basic Engng. 1965. V. 87. № 3. P. 547–558.
5. *Емельянов А.В., Емельянов Л.А.* Нелинейная теория прецизионных радиально-осевых подшипников с газовой смазкой и анизотропной геометрией // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 6. С. 116–124.
6. *Cercignani C.* Theory and application of the Boltzmann equation. Edinburgh; London: Scottish Acad. Press, 1975. 415 p.
7. *Слэзкин Н.А.* Уравнения Рейнольдса для течения газовой смазки с учетом скольжения первого и второго порядка // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1981. № 6. С. 95–99.
8. *Емельянов И.А.* Оценка главного момента сил вязкого трения в смазочном слое бинарного газодинамического подшипника // Трение и износ. 1999. Т. 20. № 1. С. 20–27.

Калуга

Поступила в редакцию
27.IV.1999