

УДК 532.5.013.4:536.24

© 2000 г. Е.А. РЯБИЦКИЙ

ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО СЛОЯ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА СОРЕ

На примере плоского слоя жидкости исследовано влияние термодиффузии на возникновение термокапиллярной неустойчивости в присутствии поверхностно-активного вещества. Показано, что учет эффекта Сорэ приводит к дестабилизации равновесия как в случае подогрева твердой поверхности, так и при нагреве свободной границы.

Возможность потери устойчивости равновесия под действием термокапиллярного эффекта впервые была показана в [1] на примере плоского слоя (задача Пирсона). В [2] исследовалось влияние деформаций свободной поверхности на возникновение термокапиллярного движения в слое. Взаимодействие поверхностно-активного вещества (ПАВ) и термокапиллярного эффекта для задачи Пирсона рассматривалось в [3]. В этих работах исследовались нейтральные кривые только для стационарных возмущений, что не всегда приводило к правильной интерпретации полученных результатов [4]. Анализ полного спектра возмущений для задачи Пирсона показал [5], что учет деформируемости свободной поверхности приводит к появлению нестационарной (колебательной) неустойчивости, которая доминирует в области коротковолновых возмущений. В [6] показано, что в плоском слое растворимость ПАВ стабилизирует равновесие. В последнее время активно развиваются исследования влияния процесса термодиффузии (эффекта Сорэ) на термокапиллярную неустойчивость. В случае плоского слоя исследования взаимодействия термодиффузионного эффекта и термокапиллярности [7] ограничивались рассмотрением устойчивости равновесия только для подогрева свободной поверхности. Это делает полученные результаты неполными.

В представленной работе исследуется влияние эффекта Сорэ на появление термокапиллярной неустойчивости в присутствии растворимого ПАВ. Рассмотрен весь спектр возможных возмущений. Обнаружено, что учет термодиффузии приводит к дестабилизации равновесия в широком спектре возмущений. Показано, что влияние эффекта Сорэ на устойчивость особенно сильно проявляется при малых числах Прандтля. С ростом числа Прандтля влияние термодиффузии становится незначительным.

1. Рассмотрим плоский слой вязкой теплопроводной жидкости при отсутствии массовых сил. Пусть на свободной поверхности сосредоточено ПАВ с поверхностной концентрацией $\Gamma(t, x, y)$. Уравнение Навье – Стокса, конвективного теплообмена и концентрации с учетом термодиффузии [8] запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \frac{d\theta}{dt} = \chi \Delta \theta, \quad \frac{dc}{dt} &= D \Delta \left(c + \frac{K_T}{\theta_c} \theta \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{u} = (u, v, w)$ – вектор скорости жидкости, p – давление, θ – температура, c – концентрация примеси, ν, χ – коэффициенты кинетической вязкости и температуропроводности, ρ – плотность, D – коэффициент диффузии, $K_T D$ – коэффициент термодиффузии, θ_c – некоторая средняя температура.

Предположим, что процессами переноса в газе вне жидкости можно пренебречь. Пусть p_1, θ_1 – заданные давление и температура газа на свободной поверхности L . Тогда на L должны быть выполнены условия

$$\begin{aligned} (p_1 - p)\mathbf{In} + 2\rho\nu\mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{n} &= 2\sigma H\mathbf{n} + \nabla_\tau \sigma \\ \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} + \beta(\theta - \theta_1) + Q &= 0 \quad f_t + \mathbf{u}\nabla f = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{n} – вектор внешней нормали к L , \mathbf{I} – единичный тензор, H – средняя кривизна свободной поверхности, $\nabla_\tau = \nabla - (\mathbf{n}\nabla)\mathbf{n}$ обозначает поверхностный градиент, λ, β – коэффициенты теплопроводности и межфазного теплообмена, Q – поток тепла через свободную поверхность, $f(\mathbf{x}, t) = 0$ – уравнение L .

Предположим, что через твердую поверхность нет потока вещества и условия для скорости и концентрации примеси имеют вид

$$\mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} + \frac{K_T}{\theta_c} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (1.3)$$

Пусть изменение коэффициента поверхностного натяжения линейно зависит от температуры и концентрации ПАВ

$$\sigma = \sigma_0 - \alpha(\theta - \theta_0) - \gamma(\Gamma - \Gamma_0)$$

Поместим начало координат на твердую поверхность так, что оси x, y направлены горизонтально, ось z – вертикально вверх. Уравнения твердой и свободной границ $z = 0, z = l$ соответственно.

Перенос ПАВ вдоль свободной границы описывается уравнением

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\Gamma) + \frac{\partial}{\partial y}(v\Gamma) - D_s \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} \right) = j_n \quad (1.4)$$

где u, v – компоненты вектора скорости жидкости на поверхности, D_s – коэффициент поверхностной диффузии ПАВ, j_n – поток вещества с поверхности в объемную фазу.

Величина потока j_n определяется процессами переноса ПАВ в глубь жидкости и с учетом термодиффузии имеет вид

$$j_n = -D \left(\frac{\partial c}{\partial z} + \frac{K_T}{\theta_c} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \quad (z = l) \quad (1.5)$$

Здесь c – концентрация растворенного ПАВ в жидкости. С другой стороны, обмен веществом между поверхностью и жидкостью происходит за счет процесса адсорбции-десорбции и величина потока равна

$$j_n = K_A c - K_D \Gamma \quad (z = l) \quad (1.6)$$

где K_A и K_D – коэффициенты адсорбции и десорбции соответственно.

Пусть на свободной поверхности задана постоянная концентрация ПАВ $\Gamma = \Gamma_0$ и в жидкости имеется перепад температур θ_1 , тогда равновесная концентрация раствора и градиент температуры определяются равенствами

$$c_0 = -2K_T \left(1 - \frac{z}{l} \right) + \frac{K_D}{K_A} \Gamma_0, \quad \frac{d\theta}{dz} = -\frac{s\theta_1}{l}$$

где $s = 1$ при подогреве снизу и $s = -1$ при нагреве свободной поверхности, здесь и далее будем считать, что $\theta_c = \frac{1}{2} s\theta_1$.

Выберем в качестве масштаба длины, времени, скорости, давления, температуры, поверхностной и объемной концентрации соответственно: l , l^2/ν , ν/l , $\rho\nu^2/l^2$, $s\theta_1\nu/\chi$, Γ_0 , $K_D\Gamma_0/K_A$.

Перейдем к исследованию устойчивости равновесия. Считаем, что возмущения вектора скорости (U, V, W) , давления P , температуры T , объемной концентрации S , нормальной составляющей свободной поверхности R и концентрации ПАВ – G имеют вид

$$(U, V, W, P, T, S, R, G) = (U(\xi), V(\xi), W(\xi), P(\xi), T(\xi), S(\xi), R, G) \times \exp(i(k_x x + k_y y - C\tau)) \quad (1.7)$$

где k_x, k_y – волновые числа по направлениям x, y соответственно, τ – безразмерное время, $\xi = z/l$, $C = C_r + iC_i$ – комплексный декремент.

После подстановки (1.7) в (1.1) – (1.4) линеаризованные уравнения и граничные условия для возмущений с учетом преобразования Сквайра и соотношений (1.5) и (1.6) примут вид

$$\begin{aligned} a_1\Phi + ik^2P &= \Phi_{\xi\xi}, & a_1W + P_\xi &= W_{\xi\xi} \\ i\Phi + W_\xi &= 0, & a_2T - W &= T_{\xi\xi} \\ a_3S + ScSrPr^{-1}W &= S_{\xi\xi} + SrT_{\xi\xi} - k^2SrT \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= -iC + k^2, & a_2 &= -iPrC + k^2, & a_3 &= -iScC + k^2 \\ \xi = 0: \Phi = W = T &= 0, & S_\xi + SrT_\xi &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \xi = 1: \Phi_\xi + ik^2W + ik^2M(T - R/Pr) + ik^2BG &= 0 \\ -P + 2W_\xi + k^2WeR &= 0, & iCR + W &= 0 \\ T_\xi + Bi(T - R/Pr) &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$S_\xi + SrT_\xi = -D_2(S - G + SrR/Pr)$$

$$(-iC + D_0k^2)G + i\Phi = -D_1(S_\xi + SrT_\xi)$$

$$\Phi = k_x U + k_y V, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad D_0 = \frac{D_s}{\nu}$$

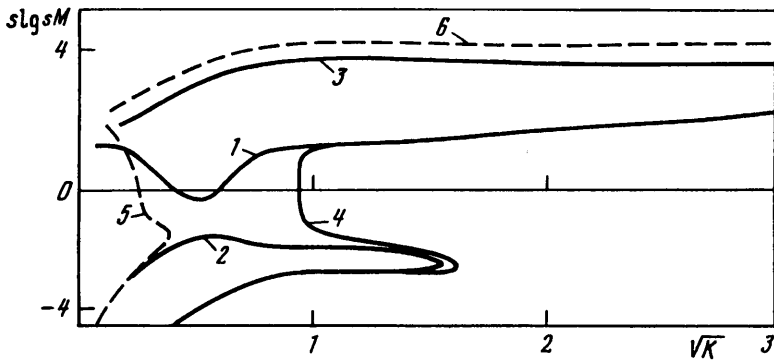
$$M = \frac{s\alpha\theta_1 l}{\rho\nu\chi}, \quad We = \frac{\sigma_0 l}{\rho\nu^2}, \quad Bi = \frac{\beta l}{\lambda}, \quad B = \frac{\gamma\Gamma_0 l}{\rho\nu^2}$$

$$Sc = \frac{\nu}{D}, \quad D_1 = \frac{DK_D}{K_A\nu}, \quad D_2 = \frac{IK_A}{D}, \quad Sr = \frac{2K_T K_A \nu}{K_D \Gamma_0 \chi}$$

Здесь Pr – число Прандтля, M – число Марангони, We – число Вебера, Bi – число Био, Sc – число Шмидта, Sr – число Соре. Знак числа Марангони зависит от способа подогрева.

Граница устойчивости равновесия определяется условием $C_i = 0$.

В случае стационарных возмущений ($C = 0$) задача (1.8)–(1.10) допускает точное решение. После некоторых преобразований, выражение для критических чисел Ма-



Фиг. 1. Нейтральные кривые для $Pr = 0,016$, $We = 10^4$, $Bi = 0$, $B = 5$, $Sc = 10$, $D_0 = 10^{-3}$, $D_1 = 30$, $D_2 = 1000$. Кривые 1, 2 – границы устойчивости относительно колебательных возмущений, кривая 3 – относительно монотонных для $Sr = 10$. Кривые 4, 5 соответствуют колебательным возмущениям, 6 – монотонным при $Sr = 50$

рангони принимает вид

$$\begin{aligned}
 M = & \frac{8k(k - \text{sh } k \text{ ch } k)(k \text{ ch } k + \text{Bish } k)}{A_1} + \\
 & + \frac{4kB(k \text{ ch } k + \text{Bish } k)(k \text{ sh } k + D_2 \text{ ch } k)(k^2 - \text{sh}^2 k)}{A_1 A_2} - \\
 & - \frac{D_1 D_2 B Sr \text{Bich } k}{k A_2} - \frac{D_1 D_2 B Sr k \text{ ch}^2 k \text{ sh } k (k \text{ ch } k + \text{Bish } k) A_3}{A_1 A_2} - \\
 & - \frac{4 D_1 D_2 B Sr k^2 \text{sh}^2 k (k \text{ ch } k + \text{Bish } k) A_4}{A_1 A_2} \quad (1.11) \\
 & - \frac{4 D_1 D_2 B Sr Sc k^2 \text{sh}^2 k (k \text{ ch } k + \text{Bish } k) A_5}{Pr A_1 A_2} - \\
 & - \frac{8 D_1 D_2 B Sr k^3 \text{sh } k (k \text{ ch } k + \text{Bish } k) A_6}{A_1 A_2} - \\
 & - \frac{8 D_1 D_2 B Sr k^2 \text{sh } k (k \text{ ch } k + \text{Bish } k)}{Pr We A_1 A_2}
 \end{aligned}$$

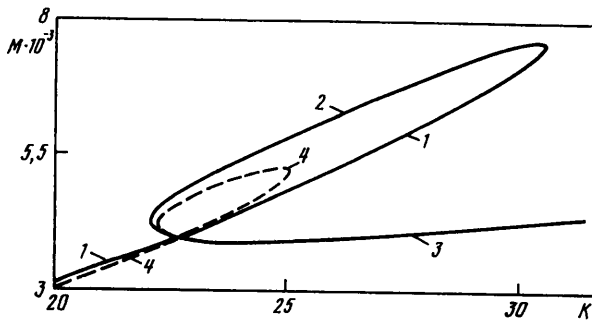
$$A_1 = k^3 \text{ch } k - \text{sh}^3 k - 8k^3 \text{ch } k (Pr We)^{-1}, \quad A_2 = D_1 D_2 \text{sh } k + D_0 k (k \text{ sh } k + D_2 \text{ch } k)$$

$$A_3 = \frac{\text{ch } k}{\text{sh } k} + \frac{5}{2k} + \frac{Sc}{Pr} \left(\frac{\text{ch } k}{\text{sh } k} - \frac{1}{k} \right), \quad A_4 = \frac{\text{ch } k}{4k^3} - \frac{1}{4 \text{sh } k} - \frac{1}{4k^2 \text{sh } k} - \frac{5 \text{sh } k}{8k^2} - \frac{\text{ch } k}{4k}$$

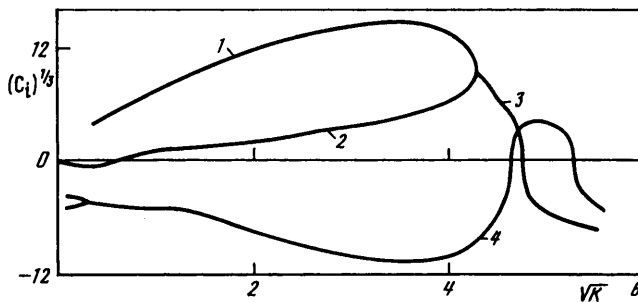
$$A_5 = \frac{\text{ch } k}{4k^3} - \frac{1}{4 \text{sh } k} - \frac{1}{4k^2 \text{sh } k} + \frac{\text{sh } k}{4k^2} - \frac{\text{ch } k}{4k}$$

$$A_6 = \frac{Bi}{Pr We k \text{sh } k (k \text{ ch } k + \text{Bish } k)} - \frac{\text{sh}^2 k + Bi k^2}{8k^3 \text{sh } k (k \text{ ch } k + \text{Bish } k)} - \frac{1}{8k^2} \left(\frac{\text{ch } k}{\text{sh } k} + \frac{3}{2k} \right)$$

При $Sr = 0$ (отсутствие термодиффузии) формула (1.11) совпадает с аналогичным выражением, полученным в [6] для растворимого ПАВ.



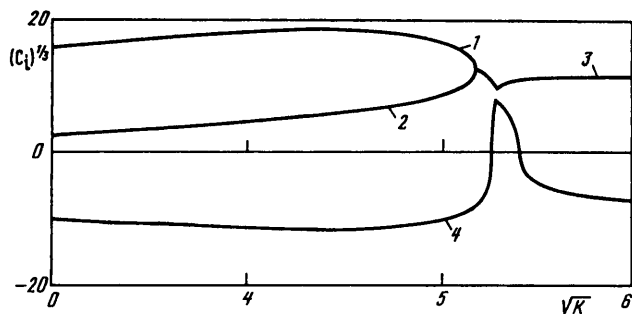
Фиг. 2. Нейтральные кривые для осциллирующих возмущений при больших волновых числах для тех же значений параметров, что на фиг. 1. Кривые 1–3 построены при $Sr = 10$, 4 – при $Sr = 50$



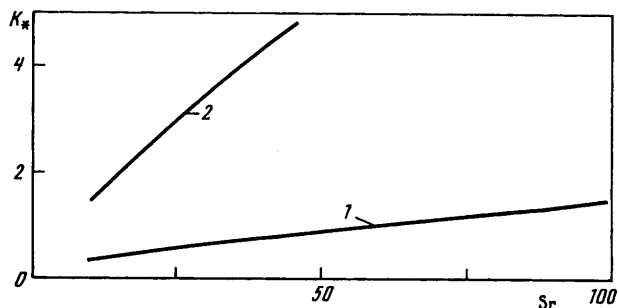
Фиг. 3. Коэффициент нарастания относительно волнового числа при $M = 4200$. Кривые 1, 2 – монотонные термокапиллярные возмущения, кривая 3 – колебательные термокапиллярные, кривая 4 – капиллярные

2. Численное решение задачи (1.8) – (1.10) для произвольных возмущений осуществлялось методом ортогонализации. Выражение (1.11) использовалось в качестве тестов при расчетах.

На фиг. 1 приведены характерные нейтральные кривые, построенные для различных чисел Sc_{re} . Область устойчивости на рисунке расположена при $Sr = 10$ ниже кривой 1 и при $Sr = 50$ справа от кривой 4 и слева от кривой 5. В случае подогрева свободной поверхности при $Sr = 10$ область неустойчивости расположена внутри кривой 2. Для стационарных возмущений область устойчивости лежит выше кривых 3, 6. Рост числа Sc_{re} приводит к тому, что области неустойчивости для положительных и отрицательных чисел Марангони становятся связными. При этом в случае подогрева твердой поверхности равновесие остается устойчивым относительно возмущений с небольшими волновыми числами. С усилением термодиффузионного эффекта происходит расширение области неустойчивости в сторону как коротких волн, так и длинных. На фиг. 1 нейтральные кривые для колебательных возмущений с ростом волнового числа сливаются в масштабе рисунка. На фиг. 2 подробнее показаны эти кривые при больших волновых числах. На фиг. 3 при $M = 4200$ и фиг. 4 при $M = 7200$ показано характерное поведение C_i для $Sr = 10$, остальные параметры те же, что и на фиг. 1. Точки пересечения кривой 2 с осью $C_i = 0$ формируют нейтральную кривую для монотонных возмущений (кривая 3 на фиг. 1). Влияние эффекта Sc_{re} здесь проявляется в уменьшении области устойчивости для моды 2. Например, для указанных выше значений параметров и $M = 4200$ при отсутствии термодиффузии



Фиг. 4. Коэффициент нарастания относительно волнового числа при $M = 7200$. Обозначения те же, что на фиг. 3



Фиг. 5. Пороговые волновые числа k_* в зависимости от числа Соре для $Pr = 0,016$, $We = 10^4$, $Bi = 0$, $D_0 = 10^{-3}$, $D_1 = 30$, $D_2 = 1000$. Кривая 1 соответствует $B = 5$, 2 – $B = 50$

($Sr = 0$) равновесие теряет устойчивость относительно монотонно нарастающих возмущений при $k > 22$ [6], а с учетом эффекта Соре ($Sr = 10$) неустойчивость появляется уже при $k > 0,24$.

Фигура 3 иллюстрирует, как формируется нейтральная кривая для осциллирующих возмущений при $M < 7156$. В случае подогрева твердой поверхности (положительные числа Марангони) кривая 1 на фиг. 1, 2 обозначает границу устойчивости относительно термокапиллярных возмущений, а кривые 2, 3 на фиг. 2 – относительно капиллярных. Как показано на фиг. 4, при $M > 7156$ поведение термокапиллярной моды существенно меняется. При этих числах Марангони кривые 1, 2 на фиг. 2 обозначают порог устойчивости относительно капиллярных возмущений, а кривая 3 – относительно термокапиллярных.

Полученные численные результаты показывают, что с ростом числа Соре происходит понижение порога устойчивости (уменьшение критических чисел Марангони), особенно заметно это проявляется в области длинноволновых возмущений. Таким образом, термодиффузия оказывает дестабилизирующее влияние на равновесие жидкого слоя.

Конкретные значения критических чисел M_* в зависимости от числа Соре для различных чисел Прандтля приведены в таблице. Здесь M_* – минимум кривой 3 на фиг. 2. Таблица построена при тех же значениях остальных параметров, что и фиг. 1. Как видно из таблицы, темпы убывания минимального числа Марангони для $Pr = 0,016$ примерно равны половине величины числа Соре. При $Sr > 240$ исчезает "петля" у кривой 1 на фиг. 2 и кривая нейтральных чисел Марангони в зависимости от волнового числа возрастает монотонно. С дальнейшим ростом числа Соре нейтральные кривые

Pr	Sr=0	10	30	50	80	120	160	200	240
0,016	3930,1	3925,1	3915,2	3905,4	3890,4	3870,2	3849	3826	3798
0,02	7114,4	7113,6	7112	7110,5	7108,6	7106,4	7104,7	7103,5	7102,7

смещаются вниз, при этом темпы понижения порога устойчивости сохраняются. С ростом числа Прандтля происходит увеличение запаса устойчивости равновесия. Как показано в таблице, даже его небольшое увеличение оказывает существенное влияние на стабилизацию равновесия. При этом влияние эффекта термодиффузии становится незначительным.

На фиг. 5 показано, как уменьшается область устойчивости с усилением термодиффузионного эффекта. Здесь k_* – это правая точка пересечения кривых $l, 4$ на фиг. 1 с осью $M = 0$. Как показано на рисунке, зависимость практически линейная и с ростом числа Соре граница области устойчивости смещается в длинноволновую область. Таким образом, усиление зависимости поверхностного натяжения от ПАВ приводит к увеличению дестабилизирующего влияния эффекта Соре.

Заключение. Термодиффузионный эффект оказывает дестабилизирующее влияние на устойчивость равновесия. Наиболее опасными при этом являются колебательные капиллярные возмущения, которые доминируют в реальном диапазоне чисел Марангони. Усиление дестабилизирующего влияния эффекта Соре происходит с ростом зависимости коэффициента поверхностного натяжения от концентрации ПАВ. Наоборот, с ростом числа Прандтля происходит стабилизация равновесия и роль термодиффузии становится незначительной по сравнению с другими процессами.

Автор благодарит В.К. Андреева за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pearson J.R.A.* On convection cells induced by surface tension // *J. Fluid Mech.* 1958. V. 4. Pt 5. P. 489–500.
2. *Scriven L.E., Sternling C.V.* On cellular convection driven by surfacetension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity // *J. Fluid Mech.* 1964. V. 19. Pt 3. P. 321–340.
3. *Berg J.C., Acrivos A.* The effect of surface active agents on convection cells induced by surface tension // *Chem. Engng. Sci.* 1965. V. 20. № 8. P. 737–745.
4. *Рябицкий Е.А.* Колебательная термокапиллярная неустойчивость равновесия плоского слоя в присутствии поверхностно-активного вещества // *Изв. РАН. МЖГ.* 1993. № 1. С. 6–10.
5. *Рябицкий Е.А.* Термокапиллярная неустойчивость равновесия плоского слоя при наличии вертикального градиента температуры // *Изв. РАН. МЖГ.* 1992. № 3. С. 19–23.
6. *Рябицкий Е.А.* Термокапиллярная неустойчивость равновесия плоского слоя при наличии растворимого поверхностно-активного вещества (ПАВ) // *Изв. РАН. МЖГ.* 1996. № 1. С. 3–8.
7. *Joو S.W.* Marangoni instabilities in liquid mixtures with Soret effects // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 293. P. 127–145.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

Красноярск

Поступила в редакцию
16.II.1999