МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 2000

УДК 532.5.031:531.51:532.25

© 2000 г. А.К. КУЗИН

КВАЗИЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Рассмотрена задача о форме равновесия стационарно вращающегося прямолинейного бесконечного шнура идеальной однородной самогравитирующей жидкости. Исследовался вопрос: возможны ли кроме очевидного решения – бесконечного кругового цилиндра – другие нецилиндрические фигуры равновесия? Поиск велся среди осесимметричных фигур с периодической структурой поверхности ("волнистые" цилиндры). В зависимости от угловой скорости вращения найдены период волновой структуры и в первом приближении форма поверхности.

Первым к вопросу о равновесии однородных самогравитирующих жидких масс обратился Ньютон. Он показал, что медленно и равномерно вращающаяся жидкая масса, находящаяся в поле сил собственного притяжения, должна принять форму эллипсоида, сжатого у полюсов, и вычислил величину сжатия Земли для случая, если бы она была однородным телом.

Теория эллипсоидальних фигур равновесия однородной жидкости была детально разработана К. Маклореном, К. Якоби, П. Лапласом и Ж. Лиувиллем [1, 2]. А. Пуанкаре и А.М. Ляпунов нашли, что на ветвях эллипсоидов К. Маклорена и К. Якоби возможно существование точек бифуркаций, дающих начало новым неэллиптическим фигурам [1, 2]. Позднее А.М. Ляпуновым было доказано их существование и рассмотрен вопрос об их устойчивости [1, 3].

В данной работе рассматривается классическая постановка задачи о равновесии однородной идеальной самогравитирующей жидкости. Однако рассматриваемые далее квазицилиндрические фигуры в рамках данной задачи не изучались.

1. Постановка проблемы. Рассмотрим фигуры равновесия однородной самогравитирующей жидкости, близкие к бесконечным круговым цилиндрам $r = R(1 + \mu(z))$. Согласно теореме Лихтенштейна [4], фигура равновесия должна иметь плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения, т.е. $\mu(z)$ – периодическая четная функция. Здесь под равновесием понимается равномерное вращение массы жидкости как твердого тела с постоянной скоростью ω. Задача сводится к нахождению функции $\mu(z)$ в зависимости от ω.

В рассматриваемом случае уравнение неразрывности выполняется автоматически, а уравнение баланса импульсов имеет интеграл Бернулли

$$\frac{p}{\rho} + C = U + \tfrac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) \tag{1.1}$$

где U – Ньютонов потенциал. Учитывая, что на поверхности жидкости $p = 0$, получим

$$U(P) + \frac{1}{2}\omega^2(x^2(P) + y^2(P)) = C \tag{1.2}$$

где P – точка поверхности. Неизвестными являются функции $x(P)$, $y(P)$, $z(P)$, задающие границу занимаемого жидкостью объема; они фигурируют в уравнении явно, а также входят в выражение для U.

Рассмотрим силу притяжения, создаваемую квазицилиндрической фигурой $r = R(1 + \mu(z))$, где μ имеет период T. Тогда составляющие силы, создаваемые одним периодом фигуры $z \in [kT; (k+1)T]$, будут

$$F_{x_k} = -\gamma\rho\int_0^T \iint_{S(t)} \frac{x-\xi}{r_k^3}\, d\xi d\eta dt, \quad F_{y_k} = -\gamma\rho\int_0^T \iint_{s(t)} \frac{y-\eta}{r_k^3}\, d\xi d\eta dt$$

$$F_{z_k} = -\gamma\rho\int_0^T \iint_{s(t)} \frac{z-t-kT}{r_k^3}\, d\xi d\eta dt$$

$$r_k = ((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-t-kT)^2)^{1/2}; \quad S(\zeta): \xi^2 + \eta^2 \leqslant R^2(1+\mu(\zeta))^2$$

Пусть $z \in [-T + \varepsilon, T - \varepsilon]$; $x^2 + y^2 \leqslant A^2$; $\varepsilon > 0$. Подынтегральное выражение в F_{x_k} оценим следующим образом:

$$\left|\frac{x-\xi}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-t-kT)^2)^{3/2}}\right| \leqslant \left|\frac{x-\xi}{(z-t-kT)^3}\right| \leqslant \frac{2A}{(-z+t+kT)^3} \leqslant \frac{2A}{((k-1)T+\varepsilon)^3}$$

Тогда

$$|F_{x_k}| \leqslant \gamma\rho\int_0^T \iint_{s(t)} \frac{2A}{((k-1)T+\varepsilon)^3}\, d\xi d\eta dt = \gamma\rho V_T \frac{2A}{((k-1)T+\varepsilon)^3} = O\left(\frac{1}{(kT)^3}\right)$$

где V_T – объем части фигуры между $z = T$ и $z = 0$. Из этого можно заключить, что ряд $F_x = \Sigma F_{x_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, \infty)$ сходится абсолютно и равномерно по x, y, z внутри цилиндра $z \in [-T + \varepsilon, T - \varepsilon]$ и $r < A$. Аналогично показывается сходимость F_{y_k} и F_{z_k}, только $|F_{z_k}| = O((kT)^{-2})$.

Теперь рассмотрим функцию

$$U' = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma\rho\int_0^T \iint_{s(t)} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{t+kT+\lambda}\right) d\xi d\eta dt = \gamma\rho\int_T^{\infty} \iint_{s(\zeta)} \left(\frac{1}{r_{1,2}} - \frac{1}{\zeta+\lambda}\right) d\xi d\eta d\zeta$$

Здесь $\lambda > 0$ – произвольная постоянная, введенная для обеспечения сходимости интеграла. Легко показать, что $\nabla U' = \mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$. Значит, потенциал части фигуры $z > T$ есть U'. Потенциал части $z \in [0; T]$ введем так

$$U_0 = \gamma\rho\int_0^T \iint_{s(\zeta)} \left(\frac{1}{r_{1,2}} - \frac{1}{\zeta+\lambda}\right) d\xi d\eta d\zeta$$

Тогда потенциал всей верхней половины квазицилиндра будет:

$$U' + U_0 = \gamma\rho\int_0^{\infty} \iint_{s(\zeta)} \left(\frac{1}{r_{1,2}} - \frac{1}{\zeta+\lambda}\right) d\xi d\eta d\zeta$$

Учитывая четность μ, легко заметить, что потенциал всей фигуры

$$U = \gamma\rho\int_0^{\infty} \iint_{s(\zeta)} \left(\frac{1}{r_{1,2}(\zeta)} + \frac{1}{r_{1,2}(-\zeta)} - \frac{2}{\zeta+\lambda}\right) d\xi d\eta d\zeta =$$

$$= \gamma\rho\int_0^{\infty} \int_0^{R(1+\mu(\zeta))} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{2}{\zeta+\lambda}\right] u\, d\theta\, du\, d\zeta \tag{1.3}$$

$$r_1^2 = (z-\zeta)^2 + r^2 + u^2 - 2ru\cos\theta, \quad r_2^2 = (z+\zeta)^2 + r^2 + u^2 - 2ru\cos\theta$$

Здесь u, θ, ζ – цилиндрические координаты точки интегрирования, r, z – точки координаты, в которой находится значение потенциала (U не зависит от φ и в (1.3) положенно $\varphi = 0$).

В случае бесконечного цилиндра ($\mu = 0$) получим общеизвестное выражение логарифмического потенциала для цилиндров. В принятых обозначениях для кругового цилиндра имеем:

$$U = \pi\gamma\rho(R^2 - r^2) - 2\pi\gamma\rho R^2 \ln\frac{R}{2\lambda}, \quad r < R, \quad U = -2\pi\gamma\rho R^2 \ln\frac{r}{2\lambda}, \quad r > R \tag{1.4}$$

Таким образом, надо найти функцию $\mu(z)$, удовлетворяющую уравнению (1.2), в котором U задается формулой (1.3).

2. Разложение потенциала по степеням μ. Уравнение (1.2) представляет собой крайне сложное функциональное соотношение, которое нельзя решить непосредственно. Ляпуновым был разработан метод построения решения задачи о фигурах равновесия, близких к эллипсоидам. Суть его состоит в поиске решения μ в виде ряда по степеням малого параметра и получении для каждого приближения однотипных уравнений, допускающих рекуррентное решение (см. [1, 3, 5]).

Разложим потенциал U на поверхности фигуры в ряд по степеням μ, используя метод, аналогичный предложенному Ляпуновым [3].

Потенциал, задаваемый (1.3), представим в виде суммы двух интегралов $U = U^{(1)} + U^{(2)}$, в первом u изменяется от 0 до $R(1 + \mu(z))$, во втором от $R(1 + \mu(z))$ до $R(1 + \mu(\zeta))$. При этом $U^{(1)}$ есть потенциал кругового цилиндра радиуса $R(1 + \mu(z))$ на его поверхности и согласно (1.4)

$$U^{(1)} = -2\pi\gamma\rho R^2(1 + \mu(z))^2 \ln\left[\frac{R(1 + \mu(z))}{2\lambda}\right] \tag{2.1}$$

Сделав замену $u = R(1 + \nu)$, $U^{(2)}$ можно привести к виду

$$U^{(2)} = \gamma\rho R^2 (S_+ + S_-)$$

$$S_\pm = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\mu(z)}^{\mu(\zeta)} \left(\frac{1}{RD_\pm(\mu(z),\ \nu)} - \frac{1}{\zeta + \lambda}\right)(1 + \nu)\,d\nu\, d\theta\, d\zeta$$

$$D_\pm^2(\mu,\ \nu) = \frac{(z \pm \zeta^2)}{R^2} + (1 + \mu)^2 + (1 + \nu)^2 - 2(1 + \mu)(1 + \nu)\cos\theta$$

Здесь и далее величины с индексами "$\pm$" зависят от $z \pm \zeta$ соответственно. Введем функции

$$f(\varepsilon) = \frac{D_0}{D(\varepsilon\mu,\ \varepsilon\nu)}, \quad s(\varepsilon) = \varepsilon\int \int\limits_{\mu(z)}^{\mu(\zeta)} \left(\frac{1}{RD_0} f(\varepsilon) - \frac{1}{\zeta + \lambda}\right)(1 + \varepsilon\nu)\,d\nu\, d\theta\, d\zeta$$

$$\int d\theta\, d\zeta = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} d\theta\, d\zeta$$

Здесь $D_0 = D(0,\ 0)$. Под D, S и s подразумеваются соответствующие величины с индексами "плюс" или "минус", поскольку дальнейшие рассуждения аналогичны для обоих наборов функций. Видно, что $S = s(1)$

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2}}$$

$$a = 2(\mu + \nu)\frac{1 - \cos\theta}{D_0^2}, \quad b = \frac{1}{D_0^2}((\mu - \nu)^2 + 2\mu\nu(1 - \cos\theta)) \geqslant 0$$

Здесь и далее $\mu = \mu(z)$. Функция $(1+x)^{-1/2}$ разложима в абсолютно сходящийся ряд по степеням x при $|x| < 1$. Значит, для $\forall\varepsilon \in [-1;\ 1]$ одновременно должны выполняться неравенства

$$b\varepsilon^2 + a\varepsilon + 1 > 0, \quad b\varepsilon^2 + a\varepsilon - 1 < 0$$

Первое неравенство удовлетворяется тождественно, а для выполнения второго достаточно условия

$$b + |a| < 1 \tag{2.2}$$

Представим ν в виде $\nu = \mu(z) + t(\mu(\zeta) - \mu(z))$, где $t \in [0;\ 1]$, можно показать, что (2.2) выполняется для любых z, θ, ζ при

$$|\mu(z)| < \sqrt{2} - 1, \quad \left|\frac{d\mu}{dz}\right| < \frac{1}{R} \tag{2.3}$$

При этих условиях $f(\varepsilon)$ разложима в сходящийся абсолютно и равномерно по ε ряд по степеням $(a + b\varepsilon)\varepsilon$. Кроме того, можно показать, что при условии (2.2) и $|\varepsilon| \leqslant 1$ требуемое разложение f по степеням ε может быть получено перегруппировкой членов исходного ряда и будет иметь вид

$$f(\varepsilon) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varepsilon^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{2m \leqslant k} C_{k-m}^{m} \frac{(-1)^{k-m}(2k-2m-1)!!}{2^{k-m}(k-m)!} a^{k-2m} b^m \right] \varepsilon^k \tag{2.4}$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно по ε при $|\varepsilon| \leqslant 1$ и при условиях (2.3). Тогда $s(\varepsilon)$ может быть записана в виде

$$s(\varepsilon) = \int \left(\frac{1}{RD_0} \sum_{k=1}^{\infty} S_k(\mu(z),\ \mu(\zeta))\varepsilon^k + \varepsilon \frac{\mu(z) - \mu(\zeta)}{\zeta + \lambda} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{\mu^2(z) - \mu^2(\zeta)}{\zeta + \lambda} \right) d\theta d\zeta \tag{2.5}$$

$$S_1 = \int_{\mu(z)}^{\mu(\zeta)} d\nu = \mu(\zeta) - \mu(z)$$

$$S_k = \int_{\mu(z)}^{\mu(\zeta)} f_{k-1}(\nu,\ \mu(z)) d\nu + \int_{\mu(z)}^{\mu(\zeta)} f_{k-2}(\nu,\ \mu(z)) \nu d\nu, \quad k > 1 \tag{2.6}$$

где S_k – однородный многочлен относительно $\mu(z)$ и $\mu(\zeta)$ степени k. Потенциал $U^{(2)}$ выражается через $s(\varepsilon)$: $U^{(2)} = \gamma\rho R^2(s_-(1) + s_+(1))$. Тогда $U^{(2)}$ представим в виде $U^{(2)} = U_1^{(2)} + U_2^{(2)} + U_3^{(2)} + \ldots$, где $U_k^{(2)}$ – содержат μ в степени k, а $U^{(1)}$ достаточно разложить в обычный ряд Тейлора по $\mu(z)$.

3. Построение решения. Было получено: $U = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots$, где U_k – функции от $\mu(z)$ и $\mu(\zeta)$ степени k. Из уравнения (1.2) для кругового цилиндра имеем

$$U_0 + \Omega R^2 = C_0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\omega^2}{2\pi\gamma\rho} = \Omega, \quad \Omega \in [0;\ 1], \quad U_0 = \frac{U}{\pi\gamma\rho}$$

Предположим, что от этого кругового цилиндра ответвляется серия нецилиндрических фигур равновесия, поверхность которых задается уравнением $r = R(1 + \mu(z, \Omega))$ и форма их меняется при изменении угловой скорости. Тогда с учетом (3.1) имеем

$$\sum_{1}^{\infty} U_k + \Omega R^2(2\mu + \mu^2) + \eta R^2(1+\mu)^2 = C$$

Здесь η – приращение угловой скорости, $\mu = \mu(\eta)$ и при $\eta = 0$ $\mu = 0$, так как новая фигура при угловой скорости Ω переходит в исходный круговой цилиндр. Это уравнение будем далее использовать в виде

$$2\Omega R^2\mu + U_1 = C - \eta R^2 - 2\eta R^2\mu - \Omega R^2\mu^2 - \eta R^2\mu^2 - \sum_2^\infty U_k \tag{3.2}$$

Введем малый параметр χ, такой, что $\eta = \eta_1\chi + \eta_2\chi^2 + \ldots$, и будем искать решение в виде $\mu = \mu_1\chi + \mu_2\chi^2 + \mu_3\chi^3 + \ldots$, где $\mu_k = \mu_k(z)$, T – периодические функции. Тогда можно написать

$$\mu^2 = m_2\chi^2 + m_3\chi^3 + \ldots \quad \mu\eta = u_2\chi^2 + u_3\chi^3 + \ldots \quad \mu^2\eta = v_3\chi^3 + v_4\chi^4 + \ldots$$

В аналогичном виде можно представить U_1: $U_1 = U_{1,1}\chi + U_{1,2}\chi^2 + \ldots$, причем $U_{1,k} = U_1(\mu_k)$, так как в U_1 μ входит исключительно линейно. Обозначим

$$W = \frac{1}{R^2}\sum_2^\infty U_k$$

Тогда можно написать: $W = W_2\chi^2 + W_3\chi^3 + \ldots$ Так как в W μ не входит в первой степени, то W_k не будет содержать μ_k: $W_k = W_k(\mu_1 \ldots \mu_{k-1})$. Подставив эти разложения в (3.2), требуем, чтобы (3.2) выполнялось при любых достаточно малых χ, из чего следует, что коэффициенты при χ^k равны нулю. Получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&2\Omega\mu_1 + \frac{U_1(\mu_1)}{R^2} = C_1 - \eta_1\\
&2\Omega\mu_2 + \frac{U_1(\mu_2)}{R^2} = C_2 - \eta_2 - 2u_2 - \Omega m_2 - W_2\\
&2\Omega\mu_k + \frac{U_1(\mu_k)}{R^2} = C_k - \eta_k - 2u_k - \Omega m_k - v_k - W_k
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Левые части уравнений содержат только μ_k, причем вид левых частей во всех уравнениях одинаков. Функции справа зависят только от $\mu_1 \ldots \mu_{k-1}$, поэтому уравнения можно решать последовательно.

Найдем далее выражение для U_1. В соотношениях (2.5) и (2.6) удерживаем в s члены порядка ε.

$$s_\pm(1) = S_1 = \int_0^\infty\int_0^{2\pi}(\mu(\zeta) - \mu(z))\left(\frac{1}{RD_{0\pm}} - \frac{1}{\zeta+\lambda}\right)d\theta d\zeta =$$

$$= \int_0^\infty(\mu(\zeta) - \mu(z))\left(\frac{2a_\pm}{R}\mathbf{K}(a_\pm) - \frac{2\pi}{\zeta+\lambda}\right)d\zeta$$

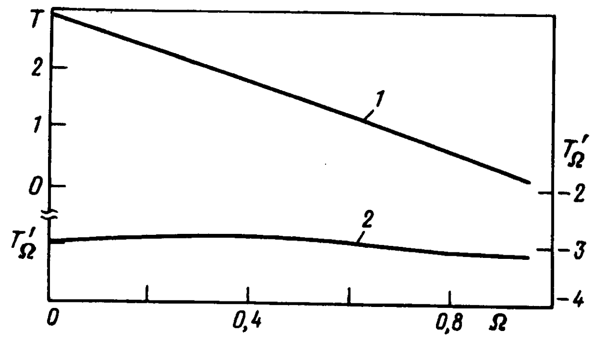
$$a_\pm = \frac{2R}{\sqrt{(z\pm\zeta)^2 + 4R^2}}$$

Здесь $\mathbf{K}(a)$ – полный эллиптический интеграл 1-го рода. Тогда

$$U_1^{(1)} = -2R^2\left(2\ln\frac{R}{2\lambda} + 1\right)\mu(z)$$

$$U_1^{(2)} = \frac{4R^2}{\pi}\int_0^\infty f(z,\zeta)(\mu(\zeta) - \mu(z))d\zeta$$

$$f = \frac{1}{2R}(a_+\mathbf{K}(a_+) + a_-\mathbf{K}(a_-)) - \frac{\pi}{\zeta+\lambda}$$



Фиг. 1. Зависимости периода, задающего форму поверхности T, и его производной T' от параметра $\Omega = \omega^2/2\pi\gamma\rho$, где ω – угловая скорость вращения

Можно показать, что

$$\int_0^\infty f d\zeta = -\pi \ln \frac{R}{2\lambda}$$

и в результате выражение для потенциала U_1 примет вид

$$\frac{U_1}{R^2} = -2\mu(z) + \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \mu(\zeta) f(z,\zeta) d\zeta$$

Уравнения (3.3) запишем в виде

$$\mu_k(z) - \alpha\int_0^\infty \mu_k(\zeta) f(z,\zeta) d\zeta = C_k + \frac{\pi}{4}\alpha(2u_k + \Omega m_k + v_k + W_k) + \frac{\pi}{4}\alpha\eta_k \quad (3.4)$$

$$\alpha = \frac{2}{\pi(1-\Omega)}$$

В частности для μ_1 получится следующее уравнение:

$$\mu_1(z) - \alpha\int_0^\infty \mu_1(\zeta) f(z,\zeta) d\zeta = C_1 + \frac{\pi}{4}\alpha\eta_1 = \text{const} \quad (3.5)$$

В силу линейности уравнения можем искать решение в виде $\mu_1 = A_1 \cos 2\pi z/T$, где A_1 и T – неизвестные амплитуда и период. При подстановке μ_1 в уравнение (3.5) учтем

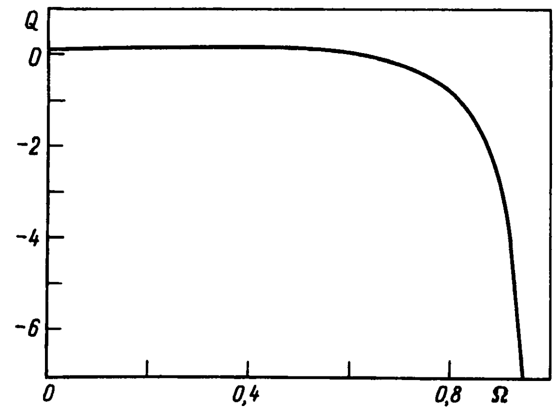
$$\int_0^\infty \cos 2\pi \frac{\zeta}{T} f(z,\zeta) d\zeta = l(q)\cos 2\pi \frac{z}{T} - \int_0^\infty \frac{\pi}{\zeta+\lambda}\cos 2\pi \frac{\zeta}{T} d\zeta$$

где $l(q) = \pi I_0(\pi q) K_0(\pi q)$, I_0 – модифицированная функция Бесселя, K_0 – функция Макдональда нулевых порядков, $q = 2R/T$. Подставив μ_1 в (3.5) и приравняв нулю коэффициенты при постоянных членах, получим выражение для C_1. Из равенства нулю коэффициента при гармонике получается условие для периода T

$$1 - \Omega = 2 I_0(\pi q) K_0(\pi q) \quad (3.6)$$

Зависимость $T(\Omega)$, задаваемая (3.6), представлена на фиг. 1 (кривая *1*). (T выражен в диаметрах исходного цилиндра). Эта зависимость не является линейной, что видно из графика производной $T'_\Omega(\Omega)$ (кривая *2*).

Новых условий, кроме (3.6), из уравнения (3.5) не получить. Нетрудно заметить, что функция $\mu_1' = \mu_1 + \text{const}$ также является решением (3.5). Для устранения этой не-



Фиг. 2. Зависимость коэффициента Q, задающего форму поверхности, от Ω

однозначности потребуем аналогично случаю ограниченных масс равенства объемов одного периода новой фигуры и части исходного цилиндра высоты T, то есть при деформации не происходит притока вещества из бесконечности или оттока на бесконечность. Это условие имеет вид

$$\int_0^T (2\mu + \mu^2)dz = 0 \tag{3.7}$$

Условие (3.7) следует рассматривать как некое условие нормировки для функции μ. Подставив в (3.7) $\mu = \mu_1\chi + \mu_2\chi^2 + \ldots$, получим, что искомая константа равна нулю.

Для нахождения амплитуды A_1 обратимся к рассмотрению уравнения для μ_2

$$\mu_2(z) - \alpha\int_0^\infty \mu_2(\zeta)f(z,\zeta)d\zeta = C_2 + \frac{\pi}{4}\alpha(2u_2 + \Omega m_2 + W_2) + \frac{\pi}{4}\alpha\eta_2 \tag{3.8}$$

$$m_2 = \mu_1^2 = \frac{A_1^2}{2}(1 + \cos 2pz),\ \ u_2 = \eta_1\mu_1 = \eta_1 A_1 \cos pz,\ \ p = \frac{2\pi}{T}$$

$$W_2 = \frac{1}{R^2}U_2(\mu_1)$$

Можно показать, что $W_2 = A_1^2(N_0 + N_2 \cos 2pz)$, где N_0 и N_2 не зависят от z. Правая часть уравнения зависит только от μ_1 и выглядит следующим образом:

$$\left(C_2 + \frac{\pi}{4}\Omega\alpha\frac{A_1^2}{2} + \frac{\pi}{4}\alpha\eta_2 + \frac{\pi}{4}\alpha N_0 A_1^2\right) + \frac{\pi}{2}\alpha\eta_1 A_1 \cos pz + (\Omega + N_2)\frac{\pi}{4}\alpha A_1^2 \cos 2pz$$

Подставив $\mu_2 = A_{2,0} + A_{2,1}\cos pz + A_{2,2}\cos 2pz$ в уравнение и приравняв коэффициенты при гармониках, получим

$$A_{2,1}(1 - \alpha l(q)) = \pi/4\alpha\eta_1 A_1 = 0$$

$$A_{2,2}(1 - \alpha l(2q)) = A_1^2\alpha\pi/4(\Omega/2 + N_2) \tag{3.9}$$

Уравнение для свободных членов здесь не выписано, так как оно дает лишь значение C_2. Множитель в первом уравнении (3.9) $1 - \alpha l(q)$ равен нулю в силу (3.6), следовательно, $\eta_1 = 0$.

После рассмотрения уравнения для μ_2 коэффициенты $A_{2,0}$ и $A_{2,2}$ выразились через A_1, но A_1 и $A_{2,1}$ остались неопределенными.

Для определения A_1 рассмотрим третье приближение

$$\mu_3(z) - \alpha\int_0^\infty \mu_3(\zeta)f(z,\zeta)d\zeta = C_3 + \frac{\pi}{4}\alpha(2u_3 + \Omega m_3 + v_3 + W_3) + \frac{\pi}{4}\alpha\eta_3 \tag{3.10}$$

$$m_3 = 2\mu_1\mu_2 = A_1A_{2,1} + A_1(2A_{2,0} + A_{2,2})\cos pz + A_1A_{2,1}\cos 2pz + A_1A_{2,2}\cos 3pz$$

$$u_3 = \eta_2\mu_1 = \eta_2 A_1\cos pz,\ v_3 = \eta_1\mu_1^2 = 0$$

$$W_3 = \frac{1}{R^2}U_2(\mu_1,\mu_2) + \frac{1}{R^2}U_3(\mu_1)$$

$$W_3 = (c_1A_1A_{2,0} + c_2A_1A_{2,2} + c_3A_1^3)\cos pz +$$

$$+ c_4A_1A_{2,1}\cos 2pz + (c_5A_1A_{2,2} + c_6A_1^3)\cos 3pz + c_7A_1A_{2,1}$$

где W_3 содержит гармоники с периодами T, $1/2T$, $1/3T$. Значит, и в правой части (3.10) содержатся только эти гармоники. Тогда μ_3 можно искать в виде

$$\mu_3 = A_{3,0} + A_{3,1}\cos pz + A_{3,2}\cos 2pz + A_{3,3}\cos 3pz$$

Подставив это выражение в (3.10) получим уравнения аналогичные (3.9). Из них представляет интерес только уравнение для коэффициентов при $\cos pz$

$$(2A_{2,0} + A_{2,2})\Omega + c_3A_1^2 + c_1A_{2,0} + c_2A_{2,2} + \eta_2 = 0$$

или, учитывая, что $A_{2,0}$ и $A_{2,2}$ выражаются через A_1^2, получим: $Q(\Omega)A_1^2 = \eta_2$, где Q – константа, зависящая только от Ω.

Остальные уравнения дают выражения для $A_{3,2}$ и $A_{3,3}$, $A_{3,0}$ находится, как и во втором приближении, из условия (3.7).

Зависимость $Q(\Omega)$ представлена на фиг. 2. Примечательно наличие корня Ω_* у $Q(\Omega) = 0$. В этой точке должно быть $\eta_2 = 0$ и A_1 из уравнения третьего приближения не определяется. При $\Omega \neq \Omega_*$ $A_1 = (\eta_2 / Q)^{1/2}$ для $\Omega < \Omega_*$ $\eta_2 > 0$ и ответвляющаяся серия фигур равновесия в окрестности исходного цилиндра направлена в сторону возрастания угловой скорости, а для $\Omega > \Omega_*$ – в сторону убывания.

Заключение. Существование серий нецилиндрических фигур равновесия вблизи круговых цилиндров возможно при любой угловой скорости $\Omega \in [0;\ 1]$, за исключением, быть может, одной точки Ω_*. Поверхность таких новых фигур описывается уравнением $r = R(1 + \mu(z))$ и в первом приближении

$$\mu = \sqrt{\frac{\eta}{Q(\Omega)}}\cos 2\pi\frac{z}{T}$$

где η – отклонение угловой скорости от скорости ветвления Ω. Период T определяется формулой (3.6), а $Q(\Omega)$ представлена на фиг. 2. Точка Ω_* – корень Q – является границей участков с различными характерами ветвления: при $\Omega < \Omega_*$ ветвь направлена в сторону возрастания угловой скорости, при $\Omega > \Omega_*$ – в сторону убывания. При $\Omega = \Omega_*$ главный член $\mu(z)$ не находится из уравнения третьего приближения, в этом случае необходимо рассмотрение уравнений более высокого порядка.

Автор благодарен Б.А. Смольникову за активное участие в обсуждении проблемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппелль П.* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Л.; М.: ОНТИ, 1936. 375с.
2. *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288с.
3. *Liapounoff A.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. Pt 1. Étude génèrale du probleme. St-Petersbourg: Acad. Imperiale des Sci. 1906. 229p.
4. *Лихтенштейн Л.* Фигуры равновесия вращающейся жидкости. М.: Наука, 1965. 252с.
5. *Сретенский Л.Н.* Теория фигур равновесия жидкой вращающейся массы // Успехи мат. наук. 1938. Вып. 5. С. 187–230.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
11.I.1999