

УДК 533.6.011.8

© 2000 г. Е.М. ШАХОВ

ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ЧЕРЕЗ КАНАЛ И ПЕРИОДИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ КАНАЛОВ

На основе численного решения линеаризованной кинетической задачи изучается изотермическое двумерное стационарное течение разреженного газа в канале между двумя плоскими параллельными стенками конечной длины. Канал может быть отдельным или представлять собой ячейку периодической решетки из пластин нулевой толщины, расположенных одна над другой. Прослеживается выход на асимптотическое одномерное течение Пуазейля при увеличении длины канала. Показано, что для удельного расхода асимптотическая зависимость от малого числа Кнудсена, соответствующая бесконечно длинному каналу, достигается уже при длинах всего в несколько калибров, если только расход отнести к градиенту давления в середине канала, а не к среднему перепаду давления на его концах. Изучается влияние граничных условий при входе в канал.

Течения разреженного газа через каналы и капилляры продолжают привлекать внимание исследователей в связи с проблемой фильтров. На основе линеаризованной кинетической модели БГК хорошо изучено одномерное течение Пуазейля между параллельными пластинами бесконечной длины [1, 2]. В рамках той же линеаризованной модели изучалось изотермическое течение газа в канале конечной длины [3–5]. Однако построенные в [3–5] численные решения с увеличением длины канала не дают согласованной картины перехода к одномерному решению для канала бесконечной длины.

В [3] предполагалось, что плотность газа распределена по длине канала по линейному закону, соответствующему непрерывному переходу от заданной плотности на входе в канал до заданной плотности на выходе из канала; поперек канала плотность принималась постоянной. Скорость течения рассчитывалась интегральным методом. Объемный расход газа представлен как функция параметра разреженности для различных длин канала. С уменьшением разреженности и ростом длины канала все кривые расхода выходят на единую асимптотику, соответствующую одномерному течению газа в канале бесконечной длины.

В [4] дано полное решение линеаризованной двумерной задачи с граничными условиями испарения-конденсации на плоских торцах без каких-либо предположений относительно распределения плотности. Отмечены большие расхождения результатов [4] и [3] по расходу газа. Выход на асимптотику, соответствующую каналу бесконечной длины, не прослеживается. Причину расхождений с [3] авторы [4] видят в основном допущении, принятом в [3].

В [5] уточнена схема течения и рассмотрен канал, соединяющий два резервуара без задания граничных условий на торцах, но с учетом течения в самих резервуарах. Обе постановки граничных условий дали близкие результаты для умеренно длинных каналов. Вопрос о выходе на результаты одномерной теории остался открытым.

Учет нелинейности кинетической модели в [6, 7] приводит к результату по расходу, который согласуется с [4, 5], но не с [3].

Обзор современного состояния вопроса дан в [8].

В данной работе, как и в [3–5], задача об изотермическом течении газа в канале конечной длины между параллельными пластинами рассматривается в рамках линеаризованной кинетической модели БГК. Решение задачи зависит от двух безразмерных параметров: параметра разреженности газа, или числа Кнудсена Kn , и относительной длины канала L . Работа посвящена анализу решения в связи с предельным переходом $L \rightarrow \infty$. Полученные результаты хорошо согласуются по отдельности и с [3], и с [4], если соответственно принять условия [3] или [4]. Показано, что подходящая нормировка расхода газа через сечение канала дает возможность установить согласие результатов данной работы и [4] с [3] и с выходом на предельное одномерное решение при $L \rightarrow \infty$. При уменьшении степени разреженности кривые расхода выходят на единую асимптотику, указанную в [3] и соответствующую одномерному решению для канала бесконечной длины, если удельный расход относить к градиенту давления в середине канала, а не к среднему перепаду давления, определенному по значениям на его торцах, как это обычно делается [4, 5]. Одномерная теория бесконечно длинного канала оказывается приемлемой уже для каналов длиной всего в несколько калибров.

В рамках простейшей схемы изучено влияние граничных условий, характеризующих вход потока в канал и выход из него. Течение между пластинами можно рассматривать как течение в ячейке периодической решетки фильтра, составленного из параллельных пластин.

1. Постановка задачи. Рассмотрим двумерное стационарное изотермическое течение одноатомного разреженного газа между параллельными плоскостями $y = \pm 1/2h$ слева направо вдоль оси x из области 1 повышенного давления в область 2 пониженного давления $p_{20} < p_{10}$ в канале длиной L , образованном пластинами нулевой толщины, совпадающими с плоскостями $y = \pm 1/2h$ при $-1/2L < x < 1/2L$. Разность заданных давлений мала: $p_{10} - p_{20} \ll p_{10}$. Граничные условия на каждой из пластин считаем одинаковыми и соответствующими диффузному рассеянию молекул при температуре пластин T , равной температуре газа. Вне канала при $|x| > 1/2L$ плоскости $y = \pm 1/2h$ будем считать непроницаемыми гладкими границами.

В основу исследования положим кинетическое уравнение Больцмана с оператором столкновений в форме Крука для функции распределения молекул по скоростям $f(x, y, \xi_x, \xi_y, \xi_z)$.

Пусть $x_- = -1/2L_\infty$ – левая, а $x_+ = 1/2L_\infty$ – правая граница области течения, причем $L \leq L_\infty \leq \infty$. При $L_\infty < \infty$ на границах $x = \pm 1/2L_\infty$ задаются условия испарения-конденсации. В частном случае $L_\infty = L$ области 1 и 2 исчезают: имеем обычную задачу с условиями испарения-конденсации. Если $L_\infty = \infty$, то на бесконечности задаются условия равномерного потока с известными значениями плотности, но неизвестной скоростью потока U .

Условие гладкости границы будет заведомо выполнено, если принять на ней граничное условие зеркального отражения молекул. Однако удобно (как показали пробные расчеты, без заметной потери точности) заменить граничное условие зеркального отражения молекул интегральным условием. Будем полагать, что функция распределения молекул, отраженных от гладкого участка, равна максвелловской функции с некоторой средней скоростью u_w , которая определяется из условия равенства нулю трения на пластине. Таким образом, всюду на боковых границах $y = \pm 1/2h$ функция распределения отраженных частиц задается в виде максвелловской f_w , причем $u_w = 0$ на "шероховатой" боковой поверхности канала и u_w определяется из условия, что напряжение сдвига $p_{xy} = 0$ на гладком участке боковой границы.

Область течения может быть продолжена периодически по y с периодом h , тогда вместо одиночного канала получим периодическую решетку из пластин.

Линеаризация задачи проводится относительно равновесного состояния в среднем сечении канала $x = 0$. Положим

$$n = n_{00}(1 + v), \quad n_w = n_{00}(1 + v_w), \quad n_{10} = n_{00}(1 + v_{10}), \quad n_{20} = n_{00}(1 + v_{20}),$$

$$f = f_{00}^{\circ}(1 + \varphi), \quad f^{\circ} = f_{00}^{\circ}(1 + \varphi^{\circ}), \quad f_w = f_{00}^{\circ}(1 + v_w + 2\xi_x u_w) \quad (1.1)$$

Здесь f° – локально-максвелловская функция распределения, f_{00}° – максвелловская функция распределения, соответствующая равновесию с плотностью n_{00} .

В дальнейшем пользуемся безразмерными величинами. В качестве масштабов длины, плотности, скорости, температуры и функции распределения принимаем величины $n, n_{00}, \sqrt{2RT}, T f_{00}^{\circ}$.

В линеаризованной изотермической задаче кинетическое уравнение имеет вид

$$\xi_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \alpha(\varphi^{\circ} - \varphi), \quad \varphi^{\circ} = v + 2\xi_x u + 2\xi_y v \quad (1.2)$$

Возмущение плотности газа, скорость течения (u, v) и напряжение сдвига p_{xy} выражаются формулами

$$v = \int f_{00}^{\circ} \varphi d\xi, \quad u_i = \int f_{00}^{\circ} \varphi \xi_i d\xi, \quad p_{xy} = \int f_{00}^{\circ} \xi_x \xi_y \varphi d\xi, \quad d\xi = d\xi_x d\xi_y d\xi_z \quad (1.3)$$

Индексы $i = 1, 2, 3$ соответствуют направлениям x, y, z .

Безразмерная частота столкновений α обратно пропорциональна числу Кн

$$\alpha = \frac{8}{5\sqrt{\pi}} \frac{1}{\text{Kn}}, \quad \text{Kn} = \frac{\lambda}{h} \quad (1.4)$$

Здесь λ – средняя длина свободного пробега.

В соответствии со сказанным выше граничные условия на боковой (для определенности на верхней) границе канала запишем в виде

$$y = \frac{1}{2}: \quad \varphi = v_w + s(x)2\xi_x u_w, \quad \xi_y < 0, \quad \int \xi_y f_{00}^{\circ} \varphi d\xi = 0 \quad (1.5)$$

$$s(x) = 0, \quad -\frac{1}{2}L < x < +\frac{1}{2}L$$

$$\int \xi_x \xi_y f_{00}^{\circ} \varphi d\xi = 0, \quad s(x) = 1, \quad |x| > \frac{1}{2}L_{\infty}$$

Последнее из выписанных условий определяет u_w , т.е. среднюю скорость молекул, отраженных от гладкого концевой участка пластины.

Граничные условия на левой и правой границе области записываются в виде

$$x = -\frac{1}{2}L_{\infty}: \quad \varphi = \varphi_{10} = v_{10} - \beta 2\xi_x U, \quad \xi_x > 0 \quad (1.6)$$

$$x = +\frac{1}{2}L_{\infty}: \quad \varphi = \varphi_{20} = v_{20} + \beta 2\xi_x U, \quad \xi_x < 0$$

Здесь $\beta = 0$ для задачи об испарении-конденсации при $x = \frac{1}{2}L_{\infty} < \infty$ и $\beta = 1$ для равномерного потока при $L_{\infty} = \infty$ (задача о фильтре).

Средняя по сечению канала скорость потока U представляет собой основную искомую величину

$$U = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} u dy \quad (1.7)$$

В дальнейшем полагаем $v_{20} = -v_{10}$. В этом случае решение обладает симметрией относительно плоскости $x = 0$, так что $v(0) = 0, v_w(0) = 0$.

2. Асимптотический анализ задачи при $L \gg 1$. При заданном значении v_{10} решение сформулированной задачи зависит от двух параметров: разреженности α и длины L .

Рассмотрим случай длинного канала и введем малый параметр $\delta = L^{-1}$. Для простоты ограничимся случаем $L_\infty = L$.

При ξ_x, ξ_y одного порядка первое слагаемое в левой части уравнения (1.2) имеет порядок δ , в то время как второе слагаемое имеет порядок единицы. При $\delta \rightarrow 0$ производная по x выпадает и кинетическое уравнение принимает вид

$$\xi_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \alpha(\varphi^\circ - \varphi) \quad (2.1)$$

Это уравнение следует решать при граничных условиях (1.5) на боковых стенках канала. Задача (2.1), (1.5) имеет тривиальное решение

$$\varphi = v = v_w = \varphi^\circ, \quad u = 0, \quad \nu = 0 \quad (2.2)$$

Это решение соответствует покою и термодинамическому равновесию со стенкой при любой плотности газа $v = v_w$. Очевидно, что равновесное решение (2.2) не удовлетворяет граничным условиям на концах канала $x = \pm 1/2L$.

Неопределенная величина v_w , входящая в (2.2) в качестве параметра, допускает зависимость от x . Такая зависимость необходима, чтобы имело место движение газа в канале. Выбор функции $v_w(x)$ должен быть согласован с граничными условиями при $x = \pm 1/2L$ и, строго говоря, определяется решением полной двумерной задачи. Решение (2.2) представляет собой главную часть асимптотического решения общей двумерной задачи при $L \rightarrow \infty$ вдали от концов канала.

Положим

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \dots, \quad L - x = O(L), \quad \varphi_0 = v_w(x) \quad (2.3)$$

Здесь φ_1 характеризует малое отклонение от равновесия газа со стенкой и имеет порядок δ . Подставляя выражение (2.3) в уравнение (1.2) и сохраняя малые первого порядка по δ , получим следующее уравнение для φ_1 :

$$\xi_y \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \alpha(\varphi_1^\circ - \varphi_1) - \xi_x Dn_w, \quad \varphi_1^\circ = 2\xi_x u_1, \quad Dn_w = -\frac{dv_w}{dx} \quad (2.4)$$

Здесь u_1 есть скорость потока u по одномерному решению.

Граничные условия для определения φ_1 , как это следует из (1.5) и (2.3), оказываются однородными

$$y = \pm 1: \quad \varphi_1 = 0, \quad \xi_y \leq 0 \quad (2.5)$$

Отличие от тривиального решения краевой задачи (2.4), (2.5) определяется неоднородностью уравнения (2.4). Безразмерный градиент плотности Dn_w в данном приближении в любом сечении x считается постоянным, а распределение плотности линейно по x . В силу однородных граничных условий (2.5) плотность газа в каждом сечении остается постоянной: $\int \varphi_1 f_w d\xi = 0$.

Условию постоянства плотности заведомо удовлетворяет функция

$$\varphi_1(y, \xi_x, \xi_y) = \xi_x \psi(y, \xi_y) \quad (2.6)$$

Уравнение и граничные условия для ψ имеют вид

$$\xi_y \frac{\partial \psi}{\partial y} = \alpha(u_1 - \psi) - Dn_w, \quad u_1 = \int f_{00}^\circ \xi_x^2 d\xi \quad (2.7)$$

$$y = \mp 1/2: \quad \psi = 0, \quad \xi_y \geq 0$$

Решение задачи (2.7) определяет одномерное течение Пуазейля в канале бесконечной длины при заданном малом градиенте плотности Dn_w .

Постановка и решение задачи об одномерном течении Пуазейля в рамках линеаризованного кинетического уравнения Больцмана с интегральным оператором в форме Крука хорошо известны [1, 2]. Однако рассмотрение обычно ведется вне связи с общей двумерной задачей. Приведенный выше анализ интерпретирует решение одномерной линеаризованной задачи как асимптотическое решение общей двумерной задачи при $L \gg 1$. Градиент плотности Dn_w , от которого зависит одномерное решение, должен определяться в результате решения двумерной задачи. Сравнение двумерного решения с одномерным имеет смысл только при одинаковых градиентах плотности. В линеаризованной двумерной постановке это градиент в средней части канала.

При конечных $L \gg 1$ может быть развита последовательная асимптотическая теория с выделением приторцевого слоя, сопряжением решения в этом слое с асимптотическим одномерным решением для канала бесконечной длины и определением градиента плотности в средней части канала. Однако ответ на вопрос о том, при каких L с удовлетворительной точностью можно пользоваться теорией канала бесконечной длины, легко находится прямым решением двумерной задачи.

3. О численном алгоритме. Основная схема численного решения задачи изложена, например, в [6]. Как обычно, использовался метод стационарных итераций в сочетании со схемой конечных разностей. Квадратуры по (ξ_x, ξ_y) выполнялись по правилу Симпсона. Отметим здесь особенности алгоритма, применявшегося в рассматриваемом случае.

В отличие от [6] применялся следующий итерационный процесс для удовлетворения граничного условия непротекания на боковой поверхности (1.6), обеспечивающий достаточно точное выполнение закона сохранения потока массы газа:

$$v_w^{(k+1)}(x) = v_w^{(k)} - 2\sqrt{\pi} \rho^{(k)}(x, +1/2) \quad (3.1)$$

Здесь k – номер итерации. Итерационная схема (3.1) оказалась очень эффективной и позволила строить решения, удовлетворяющие закону сохранения массы с высокой точностью. Приемлемой считалась ошибка, составляющая доли процента при отклонении интегрального расхода по сечению канала от постоянной.

Граничное условие $p_{xy}(x, +1/2) = 0$ для определения средней скорости u_w отраженных от гладкого участка границы молекул алгоритмически записывалось также в виде (3.1), т.е.

$$u_w^{(k+1)}(x) = u_w^{(k)} - 2\sqrt{\pi} p_{xy}^{(k)}(x, +1/2) \quad (3.2)$$

Расчет одномерного решения в канале бесконечной длины производился по отдельной программе. Этот предельный случай $L \rightarrow \infty$ дает представление о выборе счетных параметров. Приемлемым почти всюду оказалось разбиение поперечного сечения канала на 100 интервалов (без учета симметрии течения) и шаг по молекулярной скорости $\Delta\xi_y = 0,1$. Уменьшение числа узлов по y приводит к заметным ошибкам, особенно при $Kn < 1$. Так, при $Kn = 0,1$ выбор $jk = 20$ и 10 вместо $jk = 100$ ведет к ошибкам в определении расхода соответственно в 20 и 40%.

Для двумерной задачи в основном варианте использовалась сетка 100×100 узлов в поле течения без выделения приторцевых областей, а интегрирование по молекулярным скоростям производилось с шагами $\Delta\xi_x = 0,25$, $\Delta\xi_y = 0,1$.

Решение задачи зависит от параметров L , L_∞ , Kn и типа граничных условий при $x = \pm 1/2 L_\infty$. Были проведены три серии расчетов для трех случаев: 1) $L_\infty = L$ с условиями испарения-конденсации на торцах; 2) $L_\infty > L$ с теми же условиями испарения-конденсации на торцах и 3) $L_\infty = \infty$ с условиями равномерного потока перед входом в канал и по выходе из канала.

Расчеты проводились при $v_{10} = -v_{20} = 0,005$.

4. Обсуждение результатов. 1. *Случай $L_\infty = L$.* В простейшем случае задачи с граничными условиями испарения-конденсации на торцах основная цель состояла в

установлении количественного соотношения между результатами, полученными по одномерной теории бесконечно длинного канала и двумерной теории канала конечной длины. Были выполнены вычисления для каналов длиной $L = 100, 50, 20, 10, 5, 3, 1$ при $0,1 \leq \text{Kn} < \infty$. Решение сравнивалось по расходу с решением одномерной задачи для $L = \infty$. Предельный случай свободномолекулярного решения $\text{Kn} = \infty$ реализуется только для канала конечной длины. Для течения в канале бесконечной длины при $\text{Kn} \rightarrow \infty$ решение сингулярно, расход возрастает с ростом числа Kn по логарифмическому закону.

Основная расчетная величина в задаче – объемный расход газа через сечение канала или средняя скорость потока через канал U (1.7). Обычно рассматривается расход N , отнесенный к заданному перепаду давления на торцах канала к его длине

$$N = \frac{2UL}{n_{10} - n_{20}} \quad (4.1)$$

Введем также другую нормировку расхода, используя градиент плотности в среднем сечении канала и соответствующий безразмерный расход газа Q через произвольное сечение канала

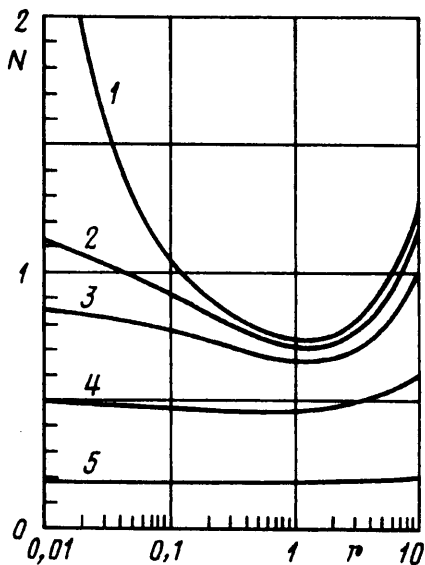
$$Q = \frac{U}{Dn_w}, \quad Dn_w = -\left(\frac{dn_w}{dx}\right)_0 \approx -\left(\frac{dn}{dx}\right)_0 \quad (4.2)$$

Нормировка (4.1) обычно используется в исследованиях течений в каналах конечной длины. Нормировка (4.2) формально совпадает с (4.1), если $n_{10} = n_1, n_{20} = n_2$, где n_1, n_2 – значения плотности в сечениях 1 и 2, отстоящих друг от друга на расстоянии L , при условии, что плотность по длине меняется линейно, как это имеет место в теории канала бесконечной длины. В двумерных течениях (4.2) может существенно отличаться от (4.1), поскольку заданные значения плотности n_{10}, n_{20} не совпадают со значениями плотности газа n_1, n_2 на торцах 1 и 2. Величина градиента плотности Dn_w вообще заранее неизвестна и находится в результате решения задачи. Только в предельном случае канала бесконечной длины этот градиент можно считать заданным, и тогда зависимости N и Q совпадают.

На фиг. 1 изображены зависимости расхода N как функции обратного числа Кнудсена $r = \text{Kn}^{-1}$. Характерный минимум расхода при $\text{Kn} \approx 0,85$ заметен на всех кривых, кроме кривой 5. Каждая кривая 1 – 4 вне области минимума подразделяется на две ветви: правая ветвь соответствует поведению в окрестности особой точки $\text{Kn} = 0$ (сплошная среда), левая – поведению в окрестности свободномолекулярного предела $\text{Kn} = \infty$. Из асимптотического анализа при $L \rightarrow \infty$ (см. разд. 2) видно, что одномерная теория теряет силу при $L/\text{Kn} = O(1)$. Для любого конечного L расход имеет конечный предел при $r \rightarrow 0$, причем нормированный расход N возрастает с L .

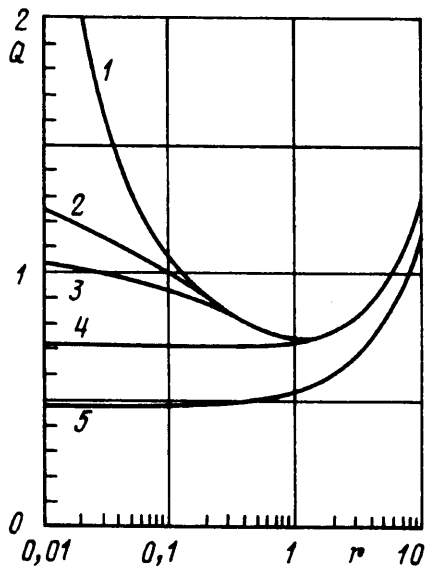
Особый интерес представляет поведение кривых в окрестности $\text{Kn} = 0$. Теория [1 – 3] предсказывает единую асимптотику для расхода по Kn^{-1} при $L \gg 1$, соответствующую течению несжимаемой жидкости между параллельными пластинами (течение Пуазейля). Расчеты [3] подтверждают теорию уже при $L > 10$. Однако поведение кривых на фиг. 1 для различных L не дает повода к заключению о достижении единой асимптотики и не согласуется с выводами [3]. С другой стороны, представленные на фиг. 1 результаты находятся в полном согласии с расчетными данными [4, 5], где отмечено рассогласование результатов с расчетами [3].

Кажущийся парадокс легко разрешается, если вспомнить два обстоятельства. Во-первых, в [3] расход отнесен к перепаду давления на единице длины, который предполагался известным и равным постоянному градиенту давления. Во-вторых, в гидродинамике при анализе течения Пуазейля [9] градиент давления определяется формулой $dp/dx = (p_2 - p_1)/L$, где p_1, p_2 – значения давления в потоке жидкости или газа в



Фиг. 1

Фиг. 1. Расход газа, отнесенный к среднему перепаду давления, в зависимости от параметра разреженности для задачи об испарении-конденсации. Кривые 1–5 соответствуют длинам канала $L = \infty, 50, 20, 5, 1$



Фиг. 2

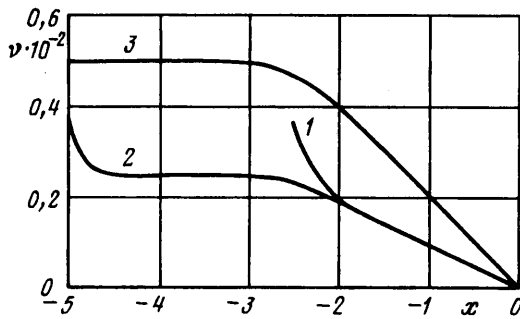
Фиг. 2. Расход газа, отнесенный к градиенту давления, в зависимости от параметра разреженности для задачи об испарении-конденсации. Кривые 1–5 соответствуют длинам канала $L = \infty, 50, 20, 5, 1$

канале, а именно в сечениях канала 1 и 2, отстоящих друг от друга на расстоянии L . Вывод однозначен: универсальный характер должны иметь зависимости расхода, отнесенные к градиенту давления в середине канала, т.е. зависимости $Q(Kn, L)$.

Соответствующие кривые расхода Q для тех же L , что и на фиг. 1, изображены на фиг. 2. Поведение кривых полностью согласуется с полученным в [3]. Видно, что нормированный расход Q хорошо отражает внутреннюю взаимосвязь основных величин. В этой интерпретации результатов единая асимптотика, соответствующая одномерному решению для канала бесконечной длины, справедлива не только в окрестности $Kn = 0$, но почти для всех чисел Kn при условии, что $L/Kn \gg 1$. Последнее условие нарушается лишь в окрестности свободномолекулярного решения, для которого одномерная теория канала бесконечной длины дает физически нереальный результат. Из фиг. 2 видно, что кривые 2–4, соответствующие $L = 50, 20$ и 5, отходят от кривой 1, отвечающей $L = \infty$, при $Kn \approx L$.

Хотя нормированный расход Q значительно лучше, чем N , выражает свойства решения, величина N имеет и преимущество перед Q , поскольку она является самодостаточной характеристикой течения. По кривым N можно определить расход газа U через канал заданной длины, при заданном перепаде давления и для данного числа Kn . Для того чтобы найти расход U по кривым Q из фиг. 2, необходимо еще знать градиент давления в срединной части канала.

Таким образом, одномерная теория бесконечно длинного канала дает достаточно точные результаты даже при длине канала $L = 5$ и $Kn < 1$. Более того, расчеты показали, что и при $L = 3$, $Kn < 1$ ее результаты вполне приемлемы. Однако при $L = 1$ асимптотика недостижима даже при $Kn = 0,01$.



Фиг. 3. Распределение плотности для различных граничных условий входа. Кривые 1 и 2 соответствуют условиям испарения-конденсации при $L_\infty = L$ и при $L_\infty > L$, кривая 3 – условиям равномерного невозмущенного потока при $L_\infty = \infty$, $Kn = 0,1$

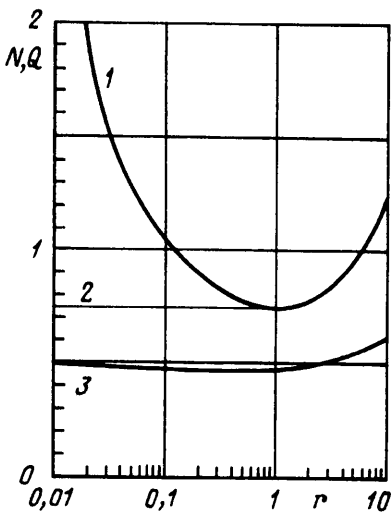
2. *Случай $L_\infty > L$.* Ниже обсуждается влияние приторцевых гладких участков канала. Были выполнены две серии расчетов, соответствующих существенно различным граничным условиям при $x = \pm \frac{1}{2} L_\infty$: 1) условия испарения-конденсации при $L_\infty < \infty$ и 2) условия равномерного потока при $L_\infty = \infty$. В вычислениях последнее условие задавалось на конечном расстоянии. Приводимые ниже результаты относятся к случаю канала длиной $L = 5$ при длине каждого из гладких приторцевых участков $\Delta L = 0,5(L_\infty - L) = 2,5$.

Роль граничных условий при $x = \pm L_\infty$ и гладких участков в формировании течения иллюстрирует фиг. 3, где изображены распределения плотности $v(x)$ по длине канала для $Kn = 0,1$. Для сравнения там же изображена кривая плотности для задачи об испарении-конденсации при $L_\infty = L$.

В отсутствие гладких участков ($L_\infty = L$) в задаче об испарении-конденсации плотность (кривая 1) падает скачком у испаряемой поверхности, имеет пристеночный кнудсеновский слой и основной линейный участок, соответствующий одномерному течению в канале бесконечной длины. Наклон линейной части распределения плотности заметно отличается от постоянной $(v_{10} - v_{20})/L$, заранее неизвестен и находится при решении задачи.

Наличие гладких приторцевых участков на стенках канала длиной $\Delta L = O(L)$ при тех же условиях испарения-конденсации в поперечных сечениях $x = \pm \frac{1}{2} L_\infty$ изменяет картину течения. Теперь область течения по x можно подразделить на следующие зоны: 1) пограничный кнудсеновский слой у испаряющей поверхности $x = \frac{1}{2} L_\infty$, соответствующий одномерному испарению с плоскости; 2) почти равномерное течение от испаряющей плоскости, вызванное испарением на ней; 3) развитие течения входа в канал и, наконец, 4) течение в средней части канала. Далее вниз по потоку идет повторение зон в обратном порядке (на фиг. 3 эта область отсутствует). Введение гладкого участка стенки при достаточной его длине позволяет отделить приторцевой кнудсеновский слой у испаряющей поверхности от зоны входа потока в канал. Распределение плотности по x для этого случая (кривая 2 на фиг. 3) иллюстрирует сказанное.

Стоит отметить, что плотность газа у испаряющей стенки почти такая же, что и в случае 1. Но наиболее интересно то, что кривые 1 и 2 практически сливаются в одну в области течения внутри канала. Линейный участок распределения плотности в средней части канала вновь соответствует одномерному течению в канале бесконечной длины.



Фиг. 4. Влияние граничных условий входа на расход газа при длине канала $L = 5$: 1 – расход Q для $L = \infty$; 2 – N для $L_{\infty} = \infty$ и Q для всех L_{∞} ; 3 – N для $L_{\infty} < \infty$

отвечает случаю $L_{\infty} = \infty$ при равномерном невозмущенном потоке. В этом случае зависимости N и Q от r настолько близки (отличие $\approx 1\%$), что на фиг. 4 изображены одной кривой 2. Приближенное равенство по-разному нормированных расходов в данном случае не удивительно, поскольку в нормировку N входит разность статических давлений перед входом в канал и позади канала, которая, будучи отнесенной к длине канала, мало отличается от градиента давления в средней части канала. Поведение плотности на фиг. 3 служит дополнительным подтверждением рассматриваемого факта.

Кривая 3 отвечает расходу N при граничных условиях испарения-конденсации на торцах канала, т.е. при $L_{\infty} = L$. Удаление испаряющей поверхности от непосредственного входа в канал на расстоянии $\Delta L = 2,5$ при одновременном удалении поглощающей плоскости от выхода из канала на такое же расстояние не приводит к заметному падению расхода N и изображается той же кривой 3. Результат этот естественным образом согласуется с поведением кривых 1 и 2 для распределения плотности. Зависимость $Q(r)$ остается такой же, что и для случая равномерного входного потока при L_{∞} , и потому изображается той же кривой 2.

Заключение. Кривые расхода для каналов различной длины L уже при $L > 5$ в широком диапазоне чисел Kn , охватывающем режим умеренно разреженного потока и режим перехода к сплошной среде, сливаются в одну универсальную кривую, соответствующую течению Пуазейля в канале бесконечной длины, если расход нормирован на градиент давления в средней части канала. Изменение граничных условий на входе в канал и на выходе из канала приводит к изменению течения и к разным значениям средней скорости потока. Однако нормированный на градиент давления расход не зависит от вида входных и выходных граничных условий. В случае равномерного входного потока расход, нормированный на средний перепад статических давлений, практически равен расходу, отнесенному к градиенту давления в средней части канала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00443).

3. Случай $L_{\infty} = \infty$. Вдали перед входом в канал и далеко позади канала поток равномерный, имеющий скорость U (в рамках линеаризованной постановки задачи), равную средней скорости, которая неизвестна и подлежит определению. Плотность газа в набегающем потоке ν_{10} , установившаяся плотность газа позади канала ν_{20} . Течение обусловлено разностью плотностей (давлений). Распределение плотности по длине канала изображено на фиг. 3 кривой 3. Как видно, падение плотности происходит главным образом внутри канала и лишь в малой степени в приторцевых участках. В средней части канала распределение плотности линейно, но наклон линейного участка существенно больше наклона кривых 1 и 2.

Для иллюстрации влияния вида входных граничных условий на расход газа на фиг. 4 изображены зависимости величин расхода N и Q от параметра разреженности Kn^{-1} при $L = 5$ для трех вариантов длины гладкого участка $\Delta L = 0; 2,5; \infty$. Кривая 1, как и на фиг. 1, 2, соответствует величине Q по одномерной теории. Кривая 2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
2. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
3. *Cercignani C., Neudachin J.* Rarefied gas flow through long slots // ZAMP. 1979. V. 30. № 6. P. 943–951.
4. *Акинъшин В.Д., Макаров А.И., Селезнев В.Д., Шарипов Ф.М.* Течение разреженного газа в плоском канале конечной длины в широком диапазоне чисел Кнудсена / ПМТФ. 1988. № 1. С. 105–111.
5. *Акинъшин В.Д., Макаров А.И., Селезнев В.Д., Шарипов Ф.И.* Движение разреженного газа в плоском коротком канале во всем диапазоне чисел Кнудсена // ПМТФ. 1989. № 5. С. 48–53.
6. *Шахов Е.М.* Двумерная нелинейная задача о движении разреженного газа между двумя параллельными плоскостями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. Т. 35. № 1. С. 83–94.
7. *Ларина И.Н., Рыков В.А.* Расчет плоских течений разреженного газа при малых числах Кнудсена // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36. № 12. С. 135–150.
8. *Sharipov F., Seleznev V.* Data on internal rarefied gas flows // J. Phys. Chem. Ref. Data. 1998. V. 27. № 3. P. 657–706.
9. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.Н.* Теоретическая гидромеханика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.XI.1998