

УДК 533.6.011.72

© 2000 г. В.В. ЛУНЁВ

УРАВНЕНИЕ ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Для описания локального закона распространения ударных волн, двумерных нестационарных в неподвижном газе и трехмерных стационарных в сверхзвуковом потоке получены дифференциальные уравнения 2-го порядка гиперболического типа. Исследовано поведение характеристик этих уравнений в зависимости от определяющих параметров течения и проведен сравнительный анализ их взаимного расположения с характерными бихарактеристиками характеристического конуса за ударной волной.

1. Нормальная скорость D распространения любого фронта в декартовой системе координат (x, y, z) связана с формой фронта $x = x(t, y, z)$ дифференциальным уравнением

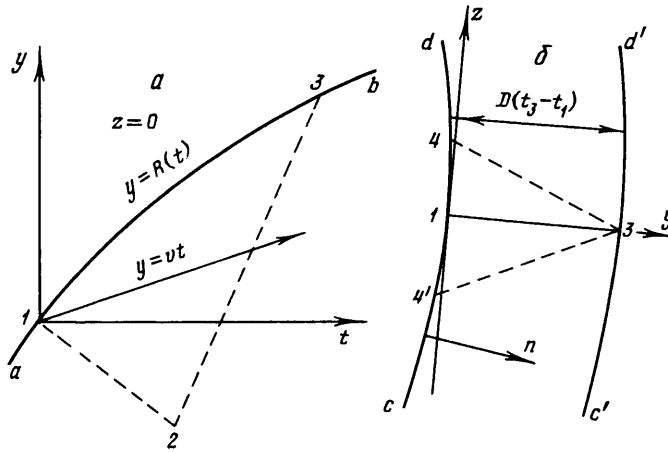
$$D = \frac{\partial n}{\partial t} = n_x x_t, \quad n_x = -(1 + x_y^2 + x_z^2)^{-1/2} \quad (1.1)$$

Здесь и ниже n_x, n_y, n_z – проекции местной нормали \mathbf{n} к фронту, n – расстояние вдоль нее. Это соотношение становится уравнением фронта при задании D в виде функции координат или времени или при наличии непосредственной связи D с формой фронта. Простейший пример – акустический фронт с $D = a$ (a – скорость звука), форма которого определяется без решения задачи о течении за ним. Но и здесь в сильно неоднородной среде возможны весьма неординарные формы акустических фронтов (эффект "летучего голландца"). Более сложный пример – известные задачи о затухании слабых ударных волн [1–2] под воздействием догоняющих центрированных волн разрежения, где скорость ударной волны задается (через соотношения на ней) выразить через координаты и время, что приводит к аналитическим решениям уравнения (1.1). Некоторые приближенные подходы к решению задач распространения ударных волн предложены в книге [3].

Но уравнения типа (1.1) относятся не только к ударным волнам, но и, например, к распространению фронтов обгара тел под воздействием интенсивного аэродинамического нагрева. В простейшей постановке в этом случае $D = D(n_x)$, что приводит к уравнению типа $x_t = \phi(n_x)$. А аналогичная пространственная задача приводит уже к уравнениям в частных производных совершенно нового типа [4] $x_{tyy} = x_{zzz}$.

Эти примеры свидетельствуют о принципиальной роли замыкающего условия: зависимости скорости D от характера задачи. В частности, в рассмотренной ниже задаче скорость D определяется взаимодействием ударной волны с догоняющими ее возмущениями. Учет этих факторов и приводит к уравнению фронта ударной волны, полученному ниже.

2. Пусть (y, z) – локальная система координат, связанная с формой ударной волны $y = R(t, z)$ в момент времени $t = t_1$, ось y направлена по нормали \mathbf{n} в начале координат. Поясняющие иллюстрации даны на фиг. 1. Уравнения нестационарного движения газа



Фиг. 1. Геометрия течения: a – плоскость yt , ab – ударная волна, $1-2$ и $2-3$ – линии тока и характеристики, b – плоскость yz , cd – ударная волна, $3-4$ – характеристики

запишем так

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -w \frac{\partial v}{\partial z} \equiv Q_v \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{v}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{w}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial z} + Q \equiv Q_p \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial y} = -w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \equiv Q_w \quad (2.3)$$

Здесь p , ρ – давление и плотность газа, v , w – проекции полной скорости U на оси y , z , Q – источниковый член, включающий в себя возможный приток тепла, химические источники или, в задаче с осевой симметрией, член $-v/r$, где r – расстояние до оси [5], при этом $w = 0$.

Поставим задачу Коши на линии $(t_1, 0, z)$ в пространстве (t, y, z) . На этой линии правые части этих уравнений известны, так что вдоль проходящих через ось z характеристических поверхностей с наклоном

$$\frac{dy}{dt} = v \pm a \quad (2.4)$$

получим следующие условия совместности:

$$\rho a dv \pm dp = \rho a Q_{\pm} dt, \quad Q_{\pm} = a Q_p \pm Q_w = -a \left(Q + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{w}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \mp w \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.5)$$

Знаки плюс минус относятся к характеристикам 1-го и 2-го семейств соответственно. Вблизи выбранной локальной системы координат скорость w мала, поэтому положим далее

$$Q_{\pm} = Q_0 = -a Q - a \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.6)$$

Эти характеристики принадлежат системе уравнений (2.1)–(2.2), замкнутой относительно входящих в их левые части производных. В плоскости $z = 0$ уравнения (2.4)–(2.5) отличаются от аналогичных одномерных лишь формой правой части Q_0 . Уравнение же (2.3) (как и не выписанное выше уравнение адиабаты) имеет в качестве

характеристической поверхностью тока $dy/dt = v$ с условием совместности $dw/dt = Q_w$ на ней. В последующем анализе эти характеристики не используются.

Применяя разностные формы уравнений (2.4)–(2.5) к малому треугольнику $l-2-3$ в плоскости $z = 0$ (фиг. 1, а), где $l-3$ отрезок ударной волны ab с формой $y = R(t, 0)$, $2-3$ – отрезок характеристики 1-го семейства, а отрезок $l-2$ пока произволен, получим вдоль отрезка $2-3$ разностное соотношение

$$\Delta L_{31} = p_3 - p_1 + \rho a(v_3 - v_1) = \Delta L_{21} + \rho a Q_0(t_3 - t_2), \quad \Delta L_{21} = p_2 - p_1 + \rho a(v_2 - v_1) \quad (2.7)$$

Параметры в точке l привлечены искусственно как вспомогательные и взаимно сокращаются в обеих частях равенства. Член ΔL_{21} считаем известным из предшествующего (по времени) решения.

Выпишем далее соотношение на ударной волне в плоскости $z = 0$ (p_∞ и т.д. – параметры внешнего газа)

$$v = D(1 - k), \quad p - p_\infty = \rho_\infty D^2(1 - k) = \rho_\infty v D \quad (2.8)$$

$$k = \frac{\rho_\infty}{\rho}, \quad D = R_t$$

Отсюда следует

$$p_3 - p_1 = p_D R_{II}(t_3 - t_1) \quad v_3 - v_1 = v_D R_{II}(t_3 - t_1) \quad (2.9)$$

$$p_D = \frac{dp}{dD} = \rho_\infty(v + Dv_D), \quad v_D = \frac{dv}{dD}$$

При $t_3 - t_1 \rightarrow 0$ уравнение (2.7) сведем к дифференциальному

$$\kappa R_{II} = \omega - \rho a \delta Q_0$$

$$\kappa = p_D + \rho a v_D, \quad \omega = \lim_{t_3 \rightarrow t_1} \frac{\Delta L_{21}}{t_3 - t_1}, \quad \delta = \lim_{t_3 \rightarrow t_1} \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}, \quad t_2, t_3 \rightarrow t_1 \quad (2.10)$$

Для одномерной задачи (при $w = 0$ в Q_0) это и есть искомое уравнение фронта ударной волны. Точка 2 здесь произвольна, но если отрезок $l-2$ принадлежит характеристике 2-го семейства, то из геометрии треугольника $l-2-3$ и уравнений (2.4) можно получить

$$\delta = \frac{D + a - v}{2a} = \frac{a + kD}{2a} \quad (2.11)$$

3. Для двумерной задачи компонента скорости w за ударной волной и ее производная равны

$$w = n_z D(1 - k) = -v R_{zz} z, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -v R_{zz} \quad (3.1)$$

Эту величину (как и другие коэффициенты) можно приписать всему малому треугольнику $l-2-3$. А так как в этой окрестности по-прежнему $D = R_t$, то из (2.10) получим уравнение в частных производных

$$\kappa R_{II} - \chi R_{zz} = \omega - \rho a^2 \delta Q_0, \quad \chi = \rho a^2 v \delta \quad (3.2)$$

Поскольку $\kappa, \chi > 0$, то это уравнение относится к гиперболическому типу с парой характеристик

$$\frac{dz}{dt} = \pm a\beta, \quad \beta^2 = \frac{\rho v \delta}{\kappa} \quad (3.3)$$

Наклон этих характеристик отличается от звукового коэффициентом β .

Эти характеристики ограничивают на ударной волне область ее влияния на решение в точке Z . В пространстве (t, y, z) их проекции на плоскость (y, z) (треугольник $4-3-4'$ на фиг. 1, б) получим, учтя, что вдоль ударной волны

$$z = \pm \beta_1(y_3 - y), \quad \beta_1 = a' \beta, \quad a' = a/D \quad (3.4)$$

Сравним эту область с проекцией характеристического конуса, выпущенного из точки Z назад, ограниченной линиями

$$z = \pm a(t_3 - t) = \pm a'(y_3 - y) \quad (3.5)$$

Наклон этих линий отличается от (3.4) коэффициентом β в последних.

Вычислим этот коэффициент для совершенного газа, для которого

$$k = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} a_{\infty}'^2, \quad v = \frac{2}{\gamma + 1} D(1 - a_{\infty}'^2), \quad a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = k D^2 \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} a_{\infty}'^2 \right) \quad (3.6)$$

Подставляя эти соотношения в (3.3), получим

$$\beta^2 = \frac{(1 - a_{\infty}'^2)(a' + k)}{2a'[2k + a'(1 + a_{\infty}'^2)]} \quad (3.7)$$

Зависимость β от a_{∞}' и γ показана на фиг. 2. Величина β максимальна при $a_{\infty}' = 0$, т.е. при $D/a_{\infty} \rightarrow \infty$, и монотонно падает с ростом a_{∞}' , причем $\beta < 1$ при $\gamma > 1,32$ при всех a_{∞}' . Но при меньших γ (гиперзвуковые ударные волны при $D \gg a_{\infty}'$ с физико-химическими превращениями за ними [5]) оказываются возможными и величины $\beta > 1$, например, в диапазонах $a_{\infty}' \leq 0,28$ при $\gamma = 1,1$ и $\gamma < 1,32$ при $a_{\infty}' = 0$, причем β при $a_{\infty}' = 0$ неограниченно растет как $\beta \sim k^{-1/4}$ при $\gamma \rightarrow 1$.

Таким образом, угол раствора области зависимости решений уравнения (3.2) в определенных условиях может быть и большим, чем угол раствора характеристического конуса во внутренней области течения.

Для слабых волн, при $D - a_{\infty} \ll a_{\infty}$ формула (3.7) сводится к предельной форме

$$\beta^2 = (D - a_{\infty}) / 2a_{\infty} \quad (3.8)$$

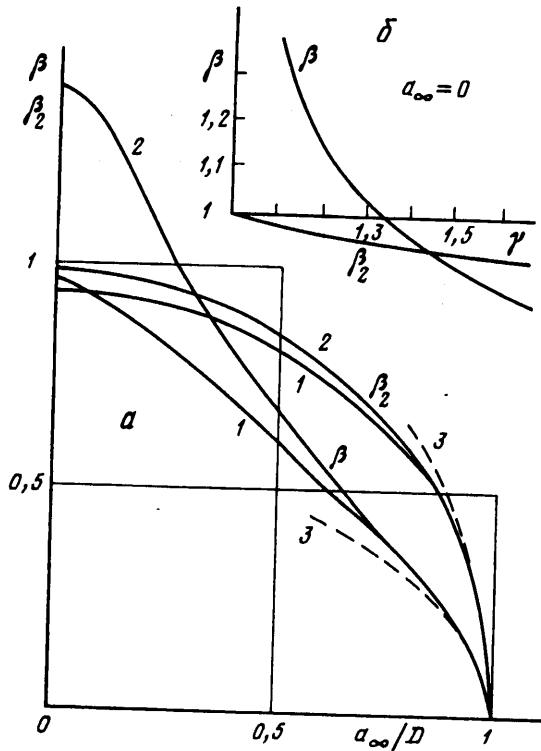
которая дает близкие к точным результатам при $a_{\infty}' \geq 0,8$. Как видно, $\beta \rightarrow 0$ при $D \rightarrow a_{\infty}$, т.е. для акустического фронта локальное решение в точке Z определяется одномерным уравнением (2.10), или распределением параметров вдоль луча – по нормали к фронту. (Этот вывод относится, конечно, лишь к локальным свойствам ударных волн, но не к внутренним областям течения и не к решению в целом.) При стремлении к этому пределу область влияния точки Z сужается весьма медленно, как $\beta \sim (D - a_{\infty})^{1/2}$

Упомянутый выше характеристический конус пересекает плоскость ударной волны $y = Dt$ вдоль линий

$$z = \beta_2 a(t_3 - t) = \beta_2 a'(y_3 - y), \quad a^2 \beta_2^2 = a^2 - (D - v)^2 = a^2 - k^2 D^2 \quad (3.9)$$

Коэффициент $\beta_2 \leq 1$ по определению. Для совершенного газа кривые $\beta_2(a_{\infty}', \gamma)$ показаны также на фиг. 2. Этот коэффициент, как и β , монотонно растет с убыванием a_{∞}' . Для слабых волн

$$\beta_2^2 = 2(D - a_{\infty}) / a_{\infty} = 4\beta^2 \quad (3.10)$$



Фиг. 2. Зависимость коэффициентов β и β_2 от определяющих параметров, $\gamma = 1,4; 1,1$ (кривые 1, 2), 3 – асимптотическое решение для слабых волн

В этом случае коэффициент $\beta_2 = 2\beta$, т.е. вырезанная характеристическим конусом область ударной волны, вдвое превышает область ее самовлияния, причем обе области исчезающе малы при $D \rightarrow a_\infty$.

Для сильных волн при $a'_\infty \ll 1$ коэффициент $\beta_2 = [(\gamma + 1)/2\gamma]^{1/2}$ близок к единице, т.е. ударная волна разрезает характеристический конус почти по оси его симметрии. Неравенство $\beta_2 \geq \beta$ сохраняется при $\gamma \geq 1,4^2$ для всех a'_∞ , но при меньших γ меняется на обратное для сильных волн.

4. Аналогичное уравнение можно получить и для стационарных трехмерных ударных волн со сверхзвуковым течением за ним. Поместим начало системы координат (x, y, z) в точку l на ударной волне с формой $y = R(x, z)$. Плоскость z совместим с местной плоскостью угла атаки α , содержащей векторы скоростей U_∞ и U до и после ударной волны и внешнюю нормаль n к ней (все в точке l), ось x направим вдоль вектора U_∞ . Картину течения в этой плоскости получим, заменив на фиг. 1 t на x , v на U . Уравнения характеристических поверхностей, проходящих через ось z , и условия совместности вдоль них (2.4)–(2.5) и имеют (при $Q = 0$) вид [5]

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha^*), \quad \sin \alpha^* = \frac{1}{M} = \frac{a}{U}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{v}{u} \quad (4.1)$$

$$\pm \frac{\rho U^2}{N} d\theta + dp = - \frac{\rho U}{MN \cos(\theta \pm \alpha^*)} \frac{\partial w}{\partial z} dx, \quad N = \sqrt{M^2 - 1} \quad (4.2)$$

Здесь α^* – местный угол Маха, θ – угол между вектором U и осью x , u, v, w – проекции вектора U на оси (x, y, z) , α – угол наклона скачка к оси x .

Представим далее соотношения на ударной волне в окрестности плоскости $z = 0$ в виде зависимостей

$$\begin{aligned} p &= \rho_\infty U_\infty^2 p'(\alpha), \quad \theta = \theta(\alpha), \quad \rho k = \rho_\infty, \quad w = U_\infty n_z (1-k) \sin \alpha = -U_\infty w'(\alpha) z R_{zz} \\ n_z &= -z R_{zz} (1 + R_x^2)^{-1/2} = -z R_{zz} \cos \alpha, \quad w' = (1-k) \sin \alpha \cos \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = R_x \end{aligned} \quad (4.3)$$

Тогда, проводя аналогичные предыдущим рассуждения для треугольника 1–2–3, т.е. выписывая аналогии разностных соотношений (2.7) и (2.9), приходим к дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \kappa_s R_{xx} - \chi_s R_{zz} = \omega_s &= \lim_{x_3 \rightarrow x_1} \frac{\Delta L_{21}^{(s)}}{x_3 - x_1}, \quad \kappa_s = p'_\alpha + \frac{U'^2}{kN} \theta_\alpha, \quad \chi_s = \frac{w' U' \delta_s}{kMN} \\ \delta_s \cos(\theta + \alpha^*) &= \lim_{x_2, x_3 \rightarrow x_1} \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\Delta L_{21}^{(s)} = p'_2 - p'_1 = \frac{U'^2}{kN} (\theta_2 - \theta_1)$$

$$p'_\alpha = \frac{dp'}{d \operatorname{tg} \alpha} = \frac{dp'}{dR_x}, \quad \theta_\alpha = \frac{d\theta}{dR_x}, \quad U' = \frac{U}{U_\infty}$$

Член ω_s считаем известным из предшествующего решения. Из анализа треугольника 1–2–3 следует

$$\delta_s = \frac{\sin(\alpha + \alpha^* - \theta)}{\cos \alpha \sin 2\alpha^*} \quad (4.5)$$

Функция $\theta_\alpha > 0$ при сверхзвуковом течении за ударной волной, а $p'_\alpha, w' > 0$ – всюду. Следовательно, $\kappa_s, \chi_s > 0$, и уравнение (4.4) имеет пару характеристик

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{\chi_s}{\kappa_s} \right)^{1/2} = \beta_s \operatorname{tg} \alpha^*, \quad \beta_s^2 = \frac{(1-k) M U' \sin \alpha \sin(\alpha + \alpha^* - \theta)}{2k \kappa_s} \quad (4.6)$$

Коэффициент β_s характеризует отличие наклонов этих характеристик от звуковых. В рамках гиперзвуковой нестационарной аналогии для ударных волн при $\alpha, \theta \ll 1$, $M_\infty \gg 1$ заменой $x \rightarrow Ut$, $Ut \rightarrow v$ уравнение (4.4) сводится к (3.2) со всеми сопутствующими следствиями (с $\beta_s = \beta > 1$ или $\beta_s < 1$, в зависимости от параметров $M_\infty \alpha$ и γ). Для слабых волн коэффициент β_s убывает по тому же закону, что и (3.8)

$$\beta_s^2 \sim (1-k) \sim M_n - 1, \quad M_n = M_\infty \sin \alpha \quad (4.7)$$

Для сильных волн при $k \rightarrow 0$, согласно (3.6), имеем [5] при $\operatorname{tg} \alpha \sim 1$

$$M \sim k^{-1/2}, \quad \alpha^* \sim k^{1/2}, \quad \alpha - \theta \sim k, \quad \kappa_s \sim k^{-1/2} \quad (4.8)$$

Отсюда следует, что $\beta_s \sim k^{-1/4}$, как для нестационарных волн.

Рассмотрим окрестность звуковой точки за сильной ударной волной, в которой для совершенного газа [5] $ktg^2 \alpha = 1$, в то время как предыдущий результат получен при фиксированном $\operatorname{tg} \alpha \sim 1$. При постоянном k из кинематического соотношения

$\operatorname{tg}(\alpha - \theta) = k \operatorname{tg} \alpha$ и выражения для числа M за ударной волной (с учетом (3.6), где $D = U \sin \alpha$) следует

$$\theta_\alpha = \frac{d\theta}{d \operatorname{tg} \alpha} = \frac{(1 - k \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \theta}{(1 + k \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}, \quad M^2 - 1 = \frac{1 - k \operatorname{tg}^2 \alpha}{k(1 + k) \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (4.9)$$

Следовательно, $\theta_\alpha/N \rightarrow 0$ при $M \rightarrow 1$, а $\kappa_s \rightarrow p'_\alpha$. Отсюда при $M \rightarrow 1$ или $\alpha^* \rightarrow \pi/2$ с учетом вспомогательных формул

$$p'_\alpha = 2(1 - k) \sin \alpha \cos^3 \alpha, \quad \sin(\alpha + \alpha^* - \theta) = \cos(\alpha - \theta) = (1 + k)^{-1/2} \quad (4.10)$$

получим выражение для β_s

$$\beta_s = \beta_s^* = \frac{(1 + k)^{1/2}}{2k} \quad (4.11)$$

Величина $\beta_s^* = 2,24$ при $\gamma = 5/3$ и возрастает с уменьшением k существенно быстрее, чем при фиксированном $\operatorname{tg} \alpha \sim 1$.

Таким образом, для сильных стационарных волн, как и для нестационарных, угол между характеристиками уравнения фронта ударных волн может превышать угол раствора характеристического конуса за ударной волной с теми же возможными последствиями.

Заключение. Получены уравнения, описывающие локальные законы распространения двумерных нестационарных ударных волн в покоящемся газе и трехмерных стационарных волн со сверхзвуковым потоком за ними. Эти уравнения близки по свойствам к волновому, но имеют характеристиками, отличные от звуковых линий или линий Маха. Угол между характеристиками этих уравнений может быть меньше для слабых ударных волн, а для сильных – больше угла раствора характеристического конуса за ударной волной. В последнем случае превышение областей влияния и зависимости решения уравнения фронта по сравнению с определенным и характеристическим конусом за ударной волной может потребовать корректив критериев устойчивости разностных методов решения невязких задач.

Полученные уравнения могут быть использованы в аналитических исследованиях (асимптотики затухания ударных волн, например), при обосновании разностных схем и т.д.

Автор благодарит А.Н. Крайко за полезные дискуссии и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения // ПММ. 1945. Т. 9. № 4. С. 286–293.
2. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
3. Уизем Дж.Б. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
4. Лунёв В.В. К трехмерной теории уравнения обгара тел в высокотемпературном потоке газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. С. 143–151.
5. Лунёв В.В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.IV.1999