

УДК 533.6.011

© 2000 г. Л.М. ЗИГАНГАРЕЕВА, О.М. КИСЕЛЕВ

О СТРУКТУРЕ ДАЛЬНОГО ПОЛЯ ПЛОСКИХ ДОЗВУКОВЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Рассматриваются плоские дозвуковые потенциальные течения около конечных и полубесконечных тел, симметричные относительно оси x , вдоль которой направлена скорость набегающего потока. Находится форма изолиний модуля скорости и угла наклона вектора скорости к оси симметрии на большом удалении от обтекаемых тел.

Скорость затухания возмущений и структура потенциала скорости в дальнем поле плоских дозвуковых потенциальных течений общего вида исследовались ранее методами теории квазиконформных отображений и теории псевдоаналитических функций в работах [1–3], результаты которых изложены в [4, п. 11]. Форма изолиний модуля и угла наклона скорости в дальнем поле рассматриваемых течений ранее не исследовалась.

1. Плоские течения несжимаемой жидкости. Пользуясь методами теории функций комплексного переменного, исследуем сначала дальнее поле плоских симметричных течений несжимаемой жидкости.

Пусть в плоскости $z = x + iy$ имеет место плоское потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости; $w = \varphi + i\psi$ – комплексный потенциал течения; V – модуль скорости, θ – угол наклона вектора скорости к оси x , V_∞ – значение V в невозмущенном потоке, где $\theta = 0$; $t = V_\infty^{-1} dw / dz$.

Пусть в плоскости w области течения G_z соответствует верхняя полуплоскость G_w , а в плоскости t – конечная односвязная область G_t с разрезом вдоль луча $\text{Im}t = 0$, $\text{Re}(t - 1) \leq 0$; точка $t = 1$ отвечает бесконечно удаленной точке A области G_w ; точка $t = 0$ может принадлежать границе области G_t , но не самой области (фиг. 1, а, б; соответственные точки отмечаются одинаковыми буквами; $t_1 = \text{Re}t$, $t_2 = \text{Im}t$).

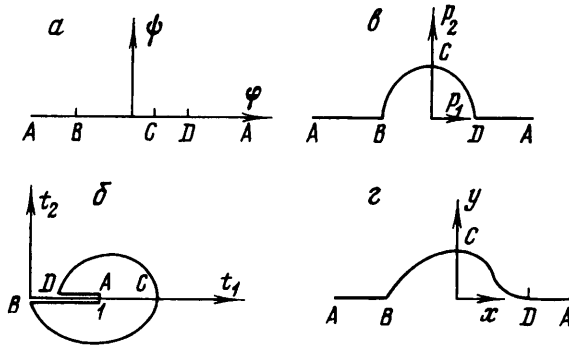
Преобразование $p = -(1-t)^{-1/2}$ переводит G_t в область G_p , при этом берегам разреза соответствуют полубесконечные участки прямой $\text{Im}p = 0$ (фиг. 1, в; $p_1 = \text{Re}p$, $p_2 = \text{Im}p$). Основываясь на известных свойствах конформных отображений, можно утверждать, что для достаточно больших значений $|p|$ зависимость $w(p)$ выражается формулой вида

$$w = KV_\infty \left(p + \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^{-n} \right) \quad (1.1)$$

где K – постоянная, имеющая размерность длины, a_n – вещественные коэффициенты. Поскольку $dz/dw = (V_\infty t)^{-1}$, $t = 1 - p^{-2}$, то

$$\frac{dz}{dp} = \frac{dz}{dw} \frac{dw}{dp} = K(1 - p^{-2})^{-1} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n p^{-n-1} \right)$$

$$z = K \left(p + g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n p^{-n} \right) \quad (1.2)$$



Фиг. 1. Обтекание профиля несжимаемой жидкостью: области $G_w, G_p, G_z - a, б, в, г$

где c_n – вещественные коэффициенты, линейно выражающиеся через a_n, g_0 – произвольная постоянная, которую будем полагать вещественной.

Нетрудно убедиться, что при принятых допущениях в плоскости z имеет место течение около некоторого замкнутого контура, симметричное относительно оси x , вдоль которой направлена скорость набегающего потока; область G_z – верхняя половина области такого течения (фиг. 1, г).

Пусть, кроме того, область G_t симметрична относительно вещественной оси. При этом область G_p симметрична относительно мнимой оси, а формулы (1.1), (1.2) принимают вид

$$w = KV_\infty \left(p + \sum_{n=1}^{\infty} a_n p^{1-2n} \right), \quad z = K \left(p + \sum_{n=1}^{\infty} c_n p^{1-2n} \right) \quad (1.3)$$

Здесь постоянные a_0, g_0 положены равными нулю. Этому случаю отвечает обтекание контура, симметричного относительно обеих координатных осей x и y .

Пусть в плоскости w области течения G_z по-прежнему соответствует верхняя полуплоскость G_w с бесконечно удаленной точкой A (фиг. 1, а), а в плоскости t – конечная односвязная область G_t , в которой точке A отвечает точка $t = 1$; граница области G_t содержит прямолинейный отрезок $t_2 = 0, a \leq t_1 \leq b, 0 \leq a < 1 < b$; ϵ – окрестность точки A , принадлежащая G_t расположена снизу от прямой $\text{Im} t_2 = 0$; точка $t = 0$ не принадлежит области G_t (разные варианты области G_t показаны на фиг. 2, а, б, в).

Очевидно, для достаточно малых значений $|t - 1|$ зависимость $w(t)$ выражается формулой

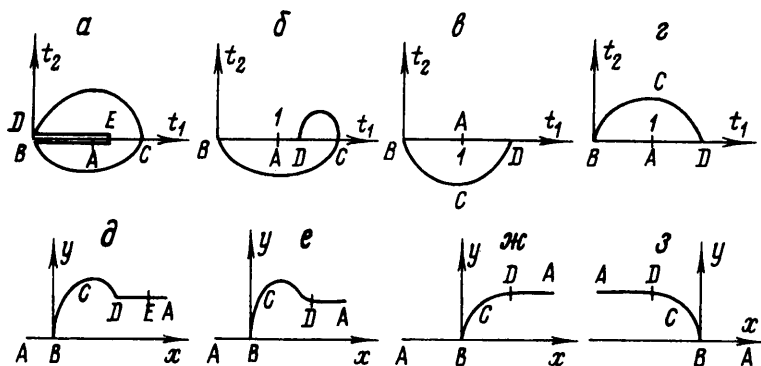
$$w = KV_\infty \left[(t-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (t-1)^n \right] \quad (1.4)$$

где b_n – вещественные коэффициенты. При этом

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dw} \frac{dw}{dt} = \frac{K}{1+(t-1)} \left[-(t-1)^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n (t-1)^{n-1} \right]$$

$$z = K \left[(t-1)^{-1} + \ln(t-1) + h_1 + i h_2 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (t-1)^n \right] \quad (1.5)$$

где d_n – вещественные коэффициенты, линейно выражающиеся через b_n ; h_1 и h_2 – произвольные вещественные постоянные.



Фиг. 2. Обтекание полубесконечного тела несжимаемой жидкостью: разные варианты областей $G_1(a, б, в, г)$ и $G_2(д, е, ж, з)$

Положим $h_2 = \pi$ и будем считать, что $\arg(t-1) \in (-\pi, 0)$ при $t \in G_1$. При этом областям G_1 , показанным на фиг. 2, а, б, в отвечают области G_2 , схематически показанные на фиг. 2, д, е, ж. Иными словами, при принятых допущениях в плоскости z имеет место симметричное относительно оси x течение около некоторого полубесконечного тела, составленного из прямоугольной полуполосы и примыкающей к ней головной части (область G_2 – верхняя половина такого течения, скорость набегающего потока направлена вдоль оси x).

Пусть области G_1 описанного класса соответствует область G_2 , а область G_1^* получается из G_1 путем преобразования симметрии относительно вещественной оси. Тогда, как нетрудно убедиться, области G_1^* соответствует область G_2^* в плоскости z , симметричная G_2 относительно оси y (фиг. 2, г, з; направление набегающего потока сохраняется).

Таким образом, двум рассмотренным выше классам областей G_1 отвечают два класса течений, симметричных относительно оси x , вдоль которой направлена скорость набегающего потока. Очевидно, справедливо и обратное: симметричному обтеканию замкнутого профиля и симметричному обтеканию полубесконечного тела, составленного из прямоугольной полуполосы и примыкающей к ней головной части, отвечают области G_1 типа тех, что показаны на фиг. 1, б и 2, а, б, в соответственно. В обоих случаях требуется только, чтобы контур, ограничивающий тело, был гладким или кусочно-гладким с такими угловыми точками, в которых скорость обращается в нуль.

Введем новые переменные

$$\tau = V/V_\infty, \quad \zeta = \tau - 1, \quad \kappa = (\zeta^2 + \theta^2)^{1/2}, \quad \beta = \arctg(\theta/\zeta)$$

Поскольку $t = (1 + \zeta)\exp(-i\theta)$, $\zeta = \kappa \cos \beta$, $\theta = \kappa \sin \beta$, то, разложив $\exp(-i\theta)$ в степенной ряд и полагая κ достаточно малым, получим

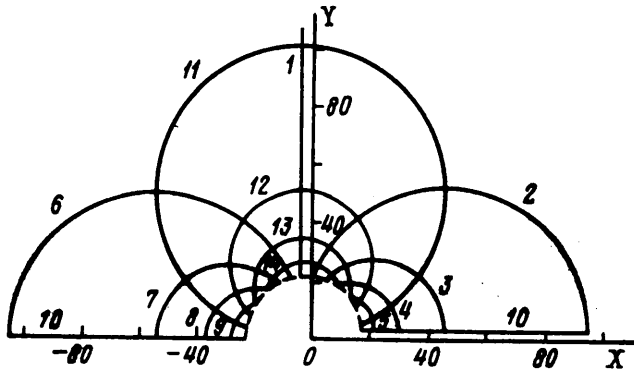
$$1 - t = -\kappa e^{-i\beta} + \frac{1}{2} \kappa^2 (\sin^2 \beta + i \sin 2\beta) + \kappa^3 \epsilon_0 \sin^2 \beta$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2} \cos \beta - (1 + \zeta) \sin \beta \left[\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k-3}}{(2k)!} - i \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k-2}}{(2k+1)!} \right]$$

$$(t-1)^{-1} = \kappa^{-1} e^{i\beta} + \frac{1}{2} e^{2i\beta} (\sin^2 \beta + i \sin 2\beta) + \kappa \epsilon_1 \sin^2 \beta \quad (1.6)$$

$$p = -(1-t)^{-1/2} = i\kappa^{-1/2} e^{i\beta/2} + \frac{1}{4} \kappa^{1/2} e^{3i\beta/2} (i \sin^2 \beta - \sin 2\beta) + \kappa^{3/2} \epsilon_2 \sin^2 \beta$$

где ϵ_1, ϵ_2 – ограниченные комплекснозначные функции переменных κ, β .



Фиг. 3. Изолинии $\zeta = 0, (0,01), 0,04$ (кривые 1-5), $\zeta = -0,01, (-0,01), -0,04$ (кривые 6-9), $\theta = 0, (0,01), 0,04$ (кривые 10-14) и $\kappa = 0,05$ (штриховая линия) в дальнем поле течения несжимаемой жидкости около полубесконечного тела ($h_1 = 0, \kappa \leq 0,05, X = x/K, Y = y/K$)

Будем исследовать дальнее поле течений, где величины ζ, θ, κ малы. Рассмотрим симметричное течение около полубесконечного тела, состоящего из прямоугольной полуполосы и примыкающей к ней головной части. Из (1.6) и (1.5) при $h_2 = \pi$ следует

$$\begin{aligned} z &= K[\kappa^{-1} e^{i\beta} + \frac{1}{2} e^{2i\beta} (\sin^2 \beta + i \sin 2\beta) + \ln \kappa + i(\pi - \beta) + h_1 + O(\kappa)] \\ x &= K[\kappa^{-1} \cos \beta + \ln \kappa + h_1 - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos 2\beta + \frac{1}{8} \cos 4\beta + O(\kappa)] \\ y &= K[\kappa^{-1} \sin \beta + \pi - \beta + \frac{1}{4} \sin 2\beta + \frac{1}{8} \sin 4\beta + O(\kappa)], \quad \kappa \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Отбросив в (1.7) члены, стремящиеся к нулю при $\kappa \rightarrow 0$, и положив $\kappa = \zeta \cos^{-1} \beta$, $\zeta = \text{const}$ или $\kappa = \theta \sin^{-1} \beta$, $\theta = \text{const}$, получим параметрические уравнения изолиний $\zeta = \text{const}$ или $\theta = \text{const}$, справедливые в асимптотическом смысле для дальнего поля течения, где $\kappa \rightarrow 0$. Будем рассматривать верхнюю половину течения, для которой $\beta \in [0, \pi]$. Поскольку $\theta = \kappa \sin \beta$, то $\theta = 0$ при $y = 0$ и $y = K\pi$ ($\beta = 0, \pi$). Поскольку $\zeta = \kappa \cos \beta$, то уравнение кривой $\zeta = 0$ получается из (1.7) при $\beta = \pi/2$

$$y/K = \exp(-x/K + h_1 - 1/2) + \pi/2 \quad (\zeta=0)$$

На фиг. 3 показаны изолинии $\zeta = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ в дальнем поле течения несжимаемой жидкости около полубесконечного тела, полученные из (1.7) при $h_1 = 0$ ($\kappa \leq 0,05$).

Рассмотрим течение несжимаемой жидкости около замкнутого симметричного профиля. Согласно (1.6) и (1.2), при $\kappa \rightarrow 0$

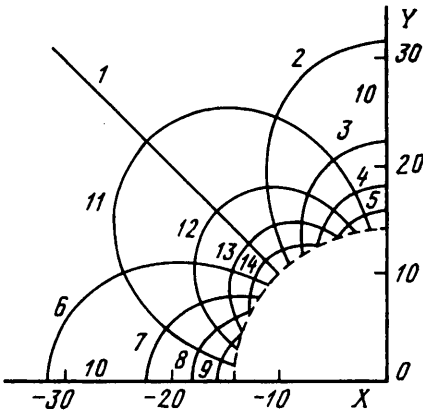
$$x = K[-\kappa^{-1/2} \sin \beta/2 + g_0 + O(\kappa^{1/2})], \quad y = K[\kappa^{-1/2} \cos \beta/2 + O(\kappa^{1/2})] \quad (1.8)$$

Отбросив в (1.8) члены, стремящиеся к нулю при $\kappa \rightarrow 0$, и положив $g_0 = 0$ (что необходимо сделать в случае симметрии профиля относительно обеих координатных осей), получим уравнения изолиний $\zeta = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ в дальнем поле течения

$$x = -K |\zeta|^{-1/2} |\cos \beta|^{1/2} \sin \beta/2, \quad y = K |\zeta|^{-1/2} |\cos \beta|^{1/2} \cos \beta/2 \quad (1.9)$$

$$x = -K |\theta|^{-1/2} |\sin \beta|^{1/2} \sin \beta/2, \quad y = K |\theta|^{-1/2} |\sin \beta|^{1/2} \cos \beta/2$$

Для верхней половины течения $\beta \in [-\pi, \pi]$, причем $\zeta > 0$ при $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\zeta < 0$ при $\beta \in (-\pi, -\pi/2)$ и $\beta \in (\pi/2, \pi)$, $\zeta = 0$ на прямых $y = \pm x$ ($\beta = \pm \pi/2$); $\theta > 0$ при $\beta \in (0, \pi)$, $\theta < 0$ при $\beta \in (-\pi, 0)$, $\theta = 0$ на осях $x = 0$ и $y = 0$ ($\beta = 0, \pm \pi$).



Фиг. 4. Изолинии $\zeta = 0, (0,001), 0,004$ (кривые 1-5), $\zeta = -0,001, (-0,001), -0,004$ (кривые 6-9), $\theta = 0, (0,001), 0,004$ (кривые 10-14) и $\kappa = 0,005$ (штриховая линия) в дальнем поле течения несжимаемой жидкости около симметричного профиля ($g_0 = 0, \kappa \leq 0,005, X = x/K, Y = y/K$)

Принятие условия $g_0 = 0$ для симметричного относительно оси x профиля общего вида эквивалентно такому выбору начала координат в плоскости z , при котором ось y является асимптотой линии $\theta = 0$, уходящей на бесконечность. При этом дальнее поле течения в асимптотическом смысле симметрично относительно обеих координатных осей. На фиг. 4 показаны изолинии $\zeta = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$, построенные в соответствии с (1.9) для второго квадранта плоскости z ($\kappa \leq 0,005$).

2. Плоское течение сжимаемой жидкости около замкнутого профиля. Функция тока ψ плоского потенциального баротропного течения сжимаемой жидкости, вводимая с помощью соотношений $V \cos \theta = v^{-1}\psi_y, V \sin \theta = -v^{-1}\psi_x$, удовлетворяет уравнению Чаплыгина

$$L(\psi) = (1 - M^2)\psi_{\theta\theta} + \tau^2\psi_{\tau\tau} + \tau(1 + M^2)\psi_\tau = 0 \quad (2.1)$$

где M – число Маха, $\tau = V/V_\infty, v = \rho/\rho_\infty, \rho$ – плотность жидкости, ρ_∞ – значение ρ в невозмущенном потоке. Координаты x, y связаны с ψ формулами

$$V_\infty \begin{Bmatrix} x_\tau \\ y_\tau \end{Bmatrix} = \frac{1}{v\tau^2} \left((M^2 - 1)\psi_\theta \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \mp \tau\psi_\tau \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix} \right) \quad (2.2)$$

$$V_\infty \begin{Bmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{v\tau} \left(\tau\psi_\tau \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \mp \psi_\theta \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix} \right)$$

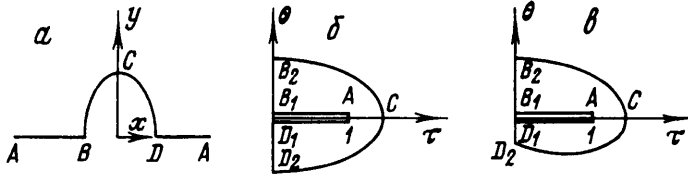
При заданной связи между плотностью и давлением зависимости $v(\tau), M(\tau)$ определяются через интеграл Бернулли. Будем считать, что $v(\tau), M(\tau)$ – функции, аналитические в окрестности точки $\tau = 1$. При этом коэффициенты выражений (2.1), (2.2), зависящие от τ , представимы в виде рядов по степеням $\zeta = \tau - 1$

$$\tau^2 = 1 + 2\zeta + \zeta^2, \quad 1 - M^2 = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \zeta^k, \quad \tau(1 + M^2) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \zeta^k$$

$$u_0 = 1 - M_\infty^2, \quad u_k = -\frac{1}{k!} \left. \frac{d^k M^2}{d\tau^k} \right|_{\tau=1} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

$$q_0 = 2 - u_0, \quad q_1 = 2 - u_0 - u_1, \quad q_n = -u_{n-1} - u_n \quad (n = 2, 3, \dots)$$

$$\frac{1}{v\tau} = 1 - u_0\zeta + \dots, \quad \frac{1}{v\tau^2}(M^2 - 1) = -u_0 + (u_0^2 + u_0 - u_1)\zeta + \dots$$



Фиг. 5. Обтекание симметричного профиля сжимаемой жидкостью: $a, б$ – области G_2 и Σ для двоякссимметричного профиля, $в$ – область Σ для симметричного профиля общего вида

Здесь M_∞ – число Маха набегающего потока. Для совершенного газа с показателем адиабаты γ

$$u_1 = -2M_\infty^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right)$$

Введем переменные σ и ω

$$\sigma = (\theta^2 + \alpha^2 \zeta^2)^{1/2}, \quad \omega = \arctg \frac{\theta}{\alpha \zeta}, \quad \alpha = u_0^{1/2} = \sqrt{1 - M_\infty^2}$$

Легко убедиться, что

$$\zeta = \alpha^{-1} \sigma \cos \omega, \quad \theta = \sigma \sin \omega, \quad \sigma_\tau = \alpha \cos \omega \tag{2.4}$$

$$\sigma_\theta = \sin \omega, \quad \omega_\theta = \sigma^{-1} \cos \omega, \quad \omega_\tau = -\alpha \sigma^{-1} \sin \omega$$

Пусть замкнутый профиль, симметричный относительно осей x и y , обтекается дозвуковым потенциальным бесциркуляционным потоком сжимаемой жидкости, направленным вдоль оси x . Верхняя половина области течения и соответствующая ей область Σ в плоскости переменных τ, θ показаны на фиг. 5, $a, б$. Бесконечно удаленной точке A отвечает точка $\tau = 1, \theta = 0$, которая является особой для функции $\psi(\tau, \theta)$: при приближении к ней почти по всем направлениям $\psi \rightarrow \infty$.

Будем искать асимптотическое разложение функции ψ по малому параметру σ , полагая

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots, \quad \psi_k = h_k(\sigma) f_k(\omega) \tag{2.5}$$

$$h_{k+1}(\sigma) / h_k(\sigma) \rightarrow 0 \quad (\sigma \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, \dots)$$

и требуя выполнения условий

$$\psi_k = 0 \quad (\tau, \theta) \in AB_1 \quad (\tau < 1, \theta = 0), \quad \psi_{k\theta} = 0 \quad (\tau, \theta) \in AC \quad (\tau > 1, \theta = 0) \tag{2.6}$$

$$\psi_1 > 0, \quad (\tau, \theta) \in \Sigma$$

где второе из условий (2.6) – условие симметрии потока относительно оси y .

Главный член разложения (2.5) представим в виде $\psi_1 = \sigma^{-n} f_1(\omega)$ ($n = \text{const} > 0$). Используя (2.3), (2.4), нетрудно показать, что

$$L(\psi_1) = L_1^\circ + \Delta L_1^\circ, \quad L_1^\circ = \Lambda(\psi_1) = \alpha^2 \sigma^{-n-2} (n^2 f_1 + f_1''), \quad \Delta L_1^\circ = O(\sigma^{-n-1})$$

$$\Lambda(\psi) = \alpha^2 \psi_{\theta\theta} + \psi_{\tau\tau}$$

Приравняв нулю L_1° – главный член в разложении $L(\psi_1)$ по степеням σ , с учетом

(2.6) получим краевую задачу

$$\begin{aligned} n^2 f_1 + f_1'' = 0, \quad f_1'(0) = f_1(\pi) = 0 \\ f_1(\omega) > 0 \quad (0 \leq \omega < \pi); \quad n > 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Существует единственное (с точностью до постоянного множителя при f_1) решение задачи (2.7), которое дает

$$\psi_1 = KV_\infty \sigma^{-1/2} \cos(\omega/2) \quad (2.8)$$

$$\psi_{1\tau} = -1/2 KV_\infty \alpha \sigma^{-3/2} \cos 3/2 \omega, \quad \psi_{1\theta} = -1/2 KV_\infty \sigma^{-3/2} \sin 3/2 \omega$$

$$L(\psi_1) = L_1 + \Delta L_1, \quad \Delta L_1 = O(\sigma^{-1/2})$$

$$L_1 = -\alpha^2 \sigma^{-3/2} F_2, \quad F_2 = KV_\infty (-2\beta_1 \cos 3/2 \omega - 12\beta_2 \cos 7/2 \omega)$$

$$-2\beta_1 = \alpha^{-1} - 1/2 \alpha - 12\beta_2, \quad -12\beta_2 = 3/8 u_1 \alpha^{-3} - 3/4 \alpha^{-1}$$

Второй член разложения (2.5) ищем в виде $\psi_2 = \sigma^{1/2} f_2(\omega)$. При этом

$$L(\psi_1 + \psi_2) = L_2^\circ + \Delta L_2^\circ, \quad L_2^\circ = L_1 + \Lambda(\psi_2)$$

$$\Lambda(\psi_2) = \alpha^2 \sigma^{-3/2} (1/4 f_2 + f_2''), \quad \Delta L_2^\circ = O(\sigma^{-1/2})$$

Приравняв нулю L_2° , с учетом (2.6) получим краевую задачу

$$1/4 f_2 + f_2'' = F_2, \quad f_2'(0) = f_2(\pi) = 0$$

в результате решения которой найдем ψ_2

$$\psi_2 = KV_\infty \sigma^{1/2} (k_1 \cos 1/2 \omega + \beta_1 \cos 3/2 \omega + \beta_2 \cos 7/2 \omega) \quad (2.9)$$

где k_1 – произвольная постоянная. Появления неопределенных коэффициентов в разложении (2.5) следовало ожидать, поскольку условия (2.6) являются общими для всех двоякосимметричных профилей; очевидно, каждому конкретному профилю соответствует свой набор коэффициентов.

Намеченный процесс определения членов ряда (2.5), основанный на последовательном повышении порядка малости выражения $L(\psi_1 + \dots + \psi_k)$ при соблюдении условий (2.6), может быть продолжен. При этом для ψ_3 получается выражение вида

$$\psi_3 = KV_\infty \sigma^{3/2} \left(k_2 \cos \frac{3}{2} \omega + \sum_{k=1}^4 \delta_k \cos \frac{4k-3}{2} \omega \right)$$

где k_2 – произвольная постоянная, а коэффициенты δ_k выражаются через u_0, u_1, u_2, k_1 ;

$$L(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) = O(\sigma^{1/2})$$

Таким образом, для двоякосимметричного профиля при $\sigma \rightarrow 0$

$$\psi = KV_\infty [\sigma^{-1/2} \cos 1/2 \omega + \sigma^{1/2} (k_1 \cos 1/2 \omega + \beta_1 \cos 3/2 \omega + \beta_2 \cos 7/2 \omega) + O(\sigma^{3/2})] \quad (2.10)$$

Учитывая, что $\sigma = \kappa, \omega = \beta, \alpha = 1, u_1 = 0$ при $M_\infty = 0$, из (2.10) при $M_\infty = 0$ будем иметь

$$\psi = KV_\infty [\kappa^{-1/2} \cos \beta / 2 + \kappa^{1/2} (k_1 \cos \beta / 2 + 1/8 \cos 3/2 \beta + 1/16 \cos 7/2 \beta) + O(\kappa^{3/2})]$$

То же самое выражение нетрудно получить из (1.3), (1.6), если принять $a_1 = -k_1 - 3/16$.

Если отказаться от требований симметрии профиля относительно оси y (сохранив требование симметрии относительно оси x), то второе из условий (2.6) следует заменить на условие $\psi_k = 0$ на AD_1 (область Σ для рассматриваемого течения показана схематически на фиг 5, θ). Найденные выше функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 удовлетворяют условию $\psi_k = 0$ на AD_1 и сохраняют свое место в разложении (2.5). В этом разложении новая цепочка функций ψ_k , удовлетворяющих условиям

$$\psi_k^\circ = 0 \quad (\tau, \theta) \in AB_1 \cup AD_1 \quad (\tau < 1, \theta = 0)$$

$$\psi_{k\theta}^\circ \neq 0 \quad (\tau, \theta) \in AC \quad (\tau > 1, \theta = 0)$$

получается, если положить $\psi_1^\circ = KV_\infty l_1 \theta = KV_\infty l_1 \sigma \sin \omega$, $\psi_2^\circ = 2KV_\infty l_2 \zeta \theta = KV_\infty l_2 \sigma^2 \sin 2\omega$, а затем использовать процедуру последовательного повышения порядка малости выражения $L(\psi_1^\circ + \dots + \psi_k^\circ)$ (l_1, l_2 – произвольные постоянные; функции $\psi_1^\circ, \psi_2^\circ$ замечательны тем, что $L(\psi_1^\circ) = 0$, $\Lambda(\psi_2^\circ) = 0$).

Таким образом, для симметричного относительно оси x профиля общего вида вместо (2.10) справедливо выражение

$$\psi = KV_\infty [\sigma^{-1/2} \cos \frac{1}{2} \omega + \sigma^{1/2} (k_1 \cos \frac{1}{2} \omega + \beta_1 \cos \frac{3}{2} \omega + \beta_2 \cos \frac{7}{2} \omega) + O(\sigma)] \quad (2.11)$$

Соотношения (2.2), (2.11) используем для исследования зависимостей $x(\tau, \theta)$, $y(\tau, \theta)$ в дальнем поле течения. Четвертое из равенств (2.2) дает

$$V_\infty y(\tau, \theta) = \frac{1}{v\tau} \left[\psi \cos \theta + \int_0^\theta (\tau \psi_\tau + \psi) \sin \theta d\theta \right] + \Omega_1(\tau) \quad (2.12)$$

$$\Omega_1(\tau) = V_\infty y(\tau, 0) - \frac{1}{v\tau} \psi(\tau, 0) \quad (2.13)$$

Согласно второму из равенств (2.2), на AC (фиг. 5, $\theta = 0$; $\tau > 1$)

$$V_\infty y(\tau, 0) = \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{1}{v\tau} \psi_\tau(\tau, 0) d\tau + C_1', \quad \tau_1, C_1' = \text{const}, \quad (\tau_1, 0) \in AC$$

Взяв последний интеграл по частям, найдем

$$V_\infty y(\tau, 0) = \frac{1}{v\tau} \psi(\tau, 0) + \int_1^{\tau} \frac{1}{v\tau^2} (1 - M^2) \psi(\tau, 0) d\tau + C_1 \quad (2.14)$$

Сравнивая (2.13) и (2.14) и учитывая, что $y = \psi = 0$ на AB_1 и AD_1 (фиг. 5, θ), получим

$$\Omega_1(\tau) = \int_1^{\tau} \frac{1}{v\tau^2} (1 - M^2) \psi(\tau, 0) d\tau + C_1 \quad (2.15)$$

$$C_1 = 0 \quad (\tau < 1), \quad C_1 = C_{11} = \text{const} \quad (\tau > 1)$$

Аналогичным образом получаются формулы

$$V_\infty x(\tau, \theta) = \frac{1}{v\tau} \int_0^\theta (\tau \psi_\tau \cos \theta - \psi_\theta \sin \theta) d\theta + \Omega_2(\tau)$$

$$\Omega_2(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{v\tau^2} (M^2 - 1) \psi_\theta(\tau, 0) d\tau + C_2, \quad \tau_0 = \tau_1 > 1 \quad (\tau > 1) \quad (2.16)$$

$$\tau_0 = \tau_2 < 1 \quad (\tau < 1), \quad C_2 = C_{21} \quad (\tau > 1)$$

$$C_2 = C_{22} \quad (\tau < 1, \theta \geq 0), \quad C_2 = C_{23} \quad (\tau < 1, \theta \leq 0)$$

$$\tau_1, \tau_2, C_{21}, C_{22}, C_{23} = \text{const}$$

Для функций $x(\tau, \theta)$, $y(\tau, \theta)$ можно получить разложения по малому параметру σ , аналогичные (2.5). Согласно (2.12), (2.15), (2.16), начальные члены этих разложений находятся с учетом (2.8), (2.9) по формулам

$$V_{\infty}y = \psi_1 + \psi_2 - \alpha^2 \zeta \psi_1 + \int_0^{\theta} \psi_{1\tau} \theta d\theta + \alpha^2 \int_1^{\tau} \psi_1(\tau, 0) d\tau + C_1 + V_{\infty}y^{\circ} \quad (2.17)$$

$$V_{\infty}x = \int_0^{\theta} \psi_{1\tau} d\theta - \alpha^2 \int_{\tau_0}^{\tau} \psi_{1\theta}(\tau, 0) d\tau + C_2 + (1 - \alpha^2) \zeta \int_0^{\theta} \psi_{1\tau} d\theta + \int_0^{\theta} \psi_{2\tau} d\theta - \int_0^{\theta} \psi_{1\theta} \theta d\theta - \alpha^2 \int_1^{\tau} \psi_{2\theta}(\tau, 0) d\tau + (\alpha^2 + \alpha^4 - u_1) \int_1^{\tau} \zeta \psi_{1\theta}(\tau, 0) d\tau + V_{\infty}x^{\circ} \quad (2.18)$$

где $V_{\infty}y^{\circ}$, $V_{\infty}x^{\circ}$ – члены более высокого порядка малости, чем остальные выписанные.

Обращаясь к формуле (2.17), рассмотрим выражение

$$J = \int_0^{\theta} \psi_{1\tau} \theta d\theta + \alpha^2 \int_1^{\tau} \psi_1(\tau, 0) d\tau + C_1 \quad (2.19)$$

Учитывая, что в первом из интегралов $d\theta = \alpha \zeta (\cos \omega)^{-2} d\omega$, $\theta = \sigma \sin \omega$, $\sigma = \alpha \zeta (\cos \omega)^{-1}$, заменим интегрирование по θ на интегрирование по ω в пределах от ω_0 до ω , где $\omega_0 = \omega_1 = 0$ при $-\pi/2 < \omega < \pi/2$ ($\tau > 1$), $\omega_0 = \omega_2 = \pi$ при $\pi/2 < \omega \leq \pi$ ($\tau < 1$, $\theta \geq 0$), $\omega_0 = \omega_3 = -\pi$ при $-\pi \leq \omega < -\pi/2$ ($\tau < 1$, $\theta \leq 0$). В результате будем иметь

$$J = KV_{\infty} \sigma^{1/2} G_1 + C_{11} \quad (-\pi/2 < \omega < \pi/2)$$

$$J = KV_{\infty} \sigma^{1/2} G_2 \quad (\pi/2 < \omega \leq \pi)$$

$$J = KV_{\infty} \sigma^{1/2} G_3 \quad (-\pi \leq \omega < -\pi/2)$$

$$G_k = \frac{\alpha p_k}{2} |\cos \omega|^{1/2} \int_{\omega_k}^{\omega} \frac{\cos^{3/2} \omega \sin \omega d\omega}{|\cos \omega|^{3/2}} + 2\alpha r_k |\cos \omega|^{1/2}$$

$$k = 1, 2, 3, \quad p_1 = -1, \quad p_2 = p_3 = 1, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = r_3 = 0$$

Анализ показывает, что все три функции G_k имеют единое выражение: $G_k = \alpha(3/2 \cos 1/2 \omega + 1/2 \cos 3/2 \omega)$. Чтобы функция $y(\tau, \theta)$ не терпела разрыва при переходе через прямую $\tau = 1$, необходимо положить $C_{11} = 0$. В результате из (2.17) получим

$$y = K\{\sigma^{-1/2} \cos 1/2 \omega + \sigma^{1/2}[(k_1 + 1) \cos 1/2 \omega + \beta_1 \cos 3/2 \omega + \beta_2 \cos 7/2 \omega]\} + y^{\circ} \quad (2.20)$$

Аналогичным образом с помощью (2.18) могут быть найдены начальные члены разложения функции $x(\tau, \theta)$. Довольно длинный ряд выкладок приводит к выражению

$$x = K\{-\alpha \sigma^{-1/2} \sin 1/2 \omega + g_0 + \sigma^{1/2}[(\alpha(k_1 + 4\beta_1 - 16\beta_2) + 2 - 1/2 \alpha^2) \sin 1/2 \omega + (\alpha(-\beta_1 + 8\beta_2) + 1/2 \alpha^2 - 1) \sin 3/2 \omega - \alpha \beta_2 \sin 7/2 \omega]\} + x^{\circ} \quad (2.21)$$

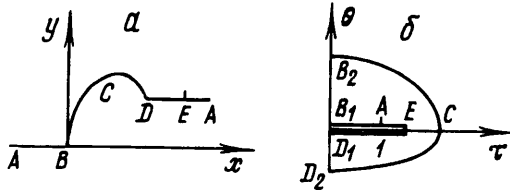
где g_0 – произвольная постоянная (используя условие непрерывности функции $x(\tau, \theta)$, две из трех постоянных C_{21} , C_{22} , C_{23} можно выразить через третью). Для профиля, симметричного относительно обеих координатных осей, $g_0 = 0$ ($C_{21} = 0$). Дополнительный анализ показывает, что x° , $y^{\circ} = O(\sigma^{3/2})$ для двоякосимметричного профиля и x° , $y^{\circ} = O(\sigma)$ для симметричного профиля общего вида.

Из (2.20), (2.21) предельным переходом при $M_\infty \rightarrow 0$ получим

$$y = K\{\kappa^{-1/2} \cos \frac{1}{2}\beta + \kappa^{1/2}[(k_1 + 1) \cos \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{8} \cos \frac{3}{2}\beta + \frac{1}{16} \cos \frac{7}{2}\beta]\} + y^\circ$$

$$x = K\{-\kappa^{-1/2} \sin \frac{1}{2}\beta + g_0 + \kappa^{1/2}[(k_1 + 1) \sin \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8} \sin \frac{3}{2}\beta - \frac{1}{16} \sin \frac{7}{2}\beta]\} + x^\circ$$

Те же самые выражения получаются из (1.2), (1.6) при $a_1 = -k_1 - \frac{3}{16}$, что подтверждает правильность результатов.



Фиг. 6. Обтекание полубесконечного профиля сжимаемой жидкостью: а - область G_z , б - область Σ

Отбросив в (2.20), (2.21) члены, стремящиеся к нулю при $\sigma \rightarrow 0$, получим выражения, справедливые в асимптотическом смысле для дальнего поля дозвукового течения сжимаемой жидкости около симметричного профиля

$$y = K\sigma^{-1/2} \cos \frac{1}{2}\omega, \quad x = -K\alpha\sigma^{-1/2} \sin \frac{1}{2}\omega + g_0 \quad (2.22)$$

Согласно (2.22), при $g_0 = 0$ уравнения изолиний $\zeta = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ получаются из уравнений (1.9), записанных для несжимаемой жидкости, в результате замены x на x/α и ζ на $\alpha\zeta$. Аналогичное замечание справедливо по отношению к фиг. 4.

Пусть $z_\alpha = x/\alpha + iy$. В соответствии с (2.20), (2.21)

$$\sigma = K^2 |z_\alpha|^{-2} + O(K^n |z_\alpha|^{-n}) \quad (2.23)$$

где $n = 4$ для двоякссимметричного профиля и $n = 3$ для симметричного профиля общего вида. Соотношение (2.23) характеризует скорость затухания возмущений в дальнем поле дозвукового течения около симметричного профиля.

3. Плоское течение сжимаемой жидкости около полубесконечного тела. Пусть симметричное относительно оси x полубесконечное тело, составленное из прямоугольной полуполосы и примыкающей к ней головной части, обтекается дозвуковым потенциальным потоком сжимаемой жидкости. Верхняя половина области течения и соответствующая ей область Σ в плоскости переменных τ , θ показаны на фиг. 6. Бесконечно удаленной точке A отвечает точка $\tau = 1$, $\theta = 0$, ϵ -окрестность которой, принадлежащая Σ , представляет собой верхнюю половину круга. Эта точка является особой для функции $\psi(\tau, \theta)$.

Будем искать асимптотическое разложение функции ψ вида (2.5), требуя выполнения условий

$$\psi_k = 0 \quad (\tau, \theta) \in AB_1 \quad (\tau < 1, \theta = 0), \quad (\tau, \theta) \in AE \quad (\tau > 1, \theta = 0)$$

$$\psi_1 > 0 \quad (\tau, \theta) \in \Sigma$$

Используя приемы, описанные в разд. 2, найдем

$$\psi_1 = KV_\infty \sigma^{-1} \sin \omega, \quad \psi_2 = KV_\infty (\gamma_1 \sin 2\omega + \gamma_2 \sin 4\omega)$$

$$\psi_3 = KV_\infty \delta_0 \sigma \ln \sigma \sin \omega, \quad \psi_4 = KV_\infty \sigma \left[k_1 \sin \omega + \sum_{k=1}^3 \delta_k \sin(2k+1)\omega \right]$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{4}(\alpha - u_1\alpha^{-3}), \quad \gamma_2 = \frac{1}{16}(2\alpha^{-1} - u_1\alpha^{-3}) \quad (3.1)$$

$$\delta_0 = \frac{1}{4}\alpha^{-2}[(\gamma_1 + \gamma_2)u_1\alpha^{-1} + 4\alpha(\gamma_1 - \gamma_2) + u_2\alpha^{-2} - 1 - 2\alpha q_0\gamma_1 + q_1]$$

Здесь k_1 – произвольная постоянная, а коэффициенты $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ выражаются через u_0, u_1, u_2 . Введение в разложение (2.5) члена порядка $\sigma \ln \sigma$ вызвано необходимостью: при его отсутствии краевая задача для члена порядка σ оказывается неразрешимой.

Согласно (3.1) при $M_\infty = 0$

$$\psi = KV_\infty[\kappa^{-1} \sin \beta + \frac{1}{4} \sin 2\beta + \frac{1}{8} \sin 4\beta + O(\kappa)], \quad \kappa \rightarrow 0$$

($\delta_0 = 0$ при $M_\infty = 0$). То же самое выражение получается из (1.4), (1.6).

Формулы (2.17), (2.18) остаются в силе, но рассматриваются только две подобласти области Σ : $\tau < 1, \theta \geq 0$ ($\pi/2 < \omega \leq \pi$) и $\tau > 1, \theta \geq 0$ ($0 \leq \omega < \pi/2$). В соответствии с (3.1)

$$\psi_{1\tau} = -KV_\infty\alpha\sigma^{-2} \sin 2\omega, \quad \psi_{1\theta} = KV_\infty\sigma^{-2} \cos 2\omega$$

$$\psi_{2\tau} = -KV_\infty\alpha\sigma^{-1} \sin \omega(2\gamma_1 \cos 2\omega + 4\gamma_2 \cos 4\omega) \quad (3.2)$$

$$\psi_{2\theta} = KV_\infty\sigma^{-1} \cos \omega(2\gamma_1 \cos 2\omega + 4\gamma_2 \cos 4\omega)$$

Обратившись к (2.17), рассмотрим выражение (2.19). Заменяя интегрирование по θ на интегрирование по ω в пределах от ω_0 до ω , найдем

$$J = KV_\infty\alpha(\frac{1}{2} \sin 2\omega - \omega) + C_{11} \quad (0 \leq \omega < \pi/2)$$

$$J = KV_\infty\alpha(\frac{1}{2} \sin 2\omega - \omega + \pi) \quad (\pi/2 < \omega \leq \pi)$$

Чтобы функция $y(\tau, \theta)$ не терпела разрыва при переходе через прямую $\tau = 1$ ($\omega = \pi/2$), необходимо положить $C_{11} = KV_\infty\alpha\pi$.

Аналогичными преобразованиями из (2.17), (2.18) с помощью (3.1), (3.2) находятся члены порядка $\sigma^{-1}, \ln \sigma, 1$. Функция ψ_3 порождает в разложениях x и y по σ члены порядка $\sigma \ln \sigma$ (обращающиеся в нуль при $M_\infty = 0$), функция ψ_4 – члены порядка σ . Результат исследования функций $x(\tau, \theta), y(\tau, \theta)$ при $\sigma \rightarrow 0$ можно представить в виде

$$x = K[\alpha\sigma^{-1} \cos \omega + \gamma_0 \ln \sigma + g_1 + O(\sigma \ln \sigma)]$$

$$y = K[\sigma^{-1} \sin \omega + g_2 + O(\sigma \ln \sigma)] \quad (3.3)$$

$$g_1 = h_0 + \gamma_3 \cos 2\omega + \gamma_4 \cos 4\omega, \quad g_2 = \gamma_1 \sin 2\omega + \gamma_2 \sin 4\omega + \alpha(\pi - \omega)$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{4}u_1\alpha^{-2}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha^2, \quad \gamma_4 = \alpha\gamma_2$$

$$h_0 = \text{const}, \quad 0 \leq \omega \leq \pi$$

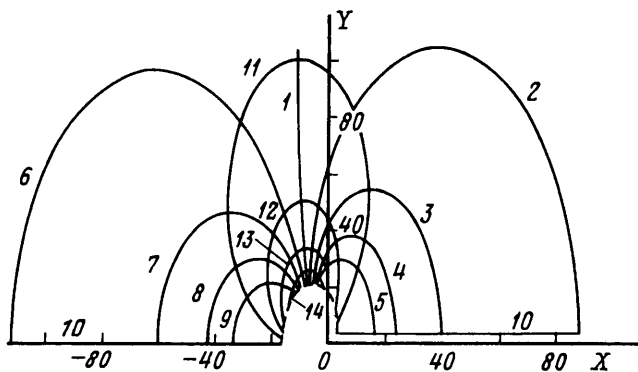
При $M_\infty = 0$ (3.3) переходит в (1.7) ($h_0 = h_1 - 3/8$).

Отбросив в (3.3) члены, исчезающие при $\sigma \rightarrow 0$, запишем уравнения изолиний $\zeta = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ для дальнего поля течения около полубесконечного тела

$$x = K\left[\zeta^{-1} \cos^2 \omega + \gamma_0 \ln\left(\frac{\alpha\zeta}{\cos \omega}\right) + g_1\right], \quad y = K(\alpha^{-1}\zeta^{-1} \sin \omega \cos \omega + g_2) \quad (3.4)$$

$$x = K\left[\alpha\theta^{-1} \cos \omega \sin \omega + \gamma_0 \ln\left(\frac{\theta}{\sin \omega}\right) + g_1\right], \quad y = K(\theta^{-1} \sin^2 \omega + g_2)$$

Изолинии $\zeta = \text{const}, \theta = \text{const}$ в дальнем поле течения совершенного газа с показателем адиабаты $\gamma = 1.4$ при $M_\infty^2 = 0,75, h_0 = -3/8$, построенные в соответствии с (3.4), показаны на фиг. 7 ($\sigma \leq 0,05$).



Фиг. 7. Изолинии $\zeta = 0, (0,01), 0,04$ (кривые 1–5), $\zeta = -0,01, (-0,01), -0,04$ (кривые 6–9), $\theta = 0, (0,01), 0,04$ (кривые 10–14) и $\kappa = 0,05$ (штриховая линия) в дальнем поле при обтекании полубесконечного тела совершенным газом с показателем адиабаты $\gamma = 1,4$ при $M_\infty^2 = 0,75$ ($h_0 = -3/8, \sigma \leq 0,05, X = x/K, Y = y/K, K = H/(2\alpha\pi)$)

Пусть H – ширина полуполосы, входящей в состав рассматриваемого тела, тогда $K = H(2\alpha\pi)^{-1}$ и в соответствии с (3.3)

$$\sigma = |z_\alpha^*|^{-1} + O(|z_\alpha^*|^{-2} \ln |z_\alpha^*|), \quad z_\alpha^* = z_\alpha / K = 2\pi(x + i\alpha y) / H \quad (3.5)$$

Соотношение (3.5) характеризует скорость затухания возмущений в дальнем поле дозвукового течения около рассматриваемого полубесконечного тела.

Заключение. Исследована структура дальнего поля плоских дозвуковых потенциальных течений двух типов: симметричного течения около замкнутого профиля и симметричного течения около полубесконечного тела, составленного из прямоугольной полуполосы и примыкающей к ней головной части. К рассмотрению течения второго типа приводит исследование обтекания симметричного профиля в рамках модели "невязкое ядро + пограничный слой".

Выражения, характеризующие дальнее поле течения первого типа, содержат неопределенный масштабный множитель K и неопределенную постоянную сдвига вдоль оси x ; в случае симметрии профиля относительно обеих координатных осей постоянная сдвига отсутствует. Выражения, характеризующие дальнее поле течения второго типа, содержат только одну неопределенную постоянную – постоянную сдвига вдоль оси x (масштабный множитель K выражается через ширину полуполосы H).

Дальние поля течений первого и второго типов существенно различаются. Так, для течения первого типа в области $y > 0$ имеются две уходящие на бесконечность изолинии $V = V_\infty$ и одна уходящая на бесконечность изолиния $\theta = 0$, асимптотами которых при надлежащем выборе начала координат служат соответственно прямые $y = \pm x/\alpha$ и $x = 0$. В то же время для течения второго типа в области $y > H/2$ не существует уходящих на бесконечность изолиний $\theta = 0$ и существует единственная уходящая на бесконечность изолиния $V = V_\infty$, на которой

$$x \rightarrow -\infty, \quad \frac{dy}{dx} \rightarrow -\infty \quad (y \rightarrow \infty)$$

Соотношения (2.23), (3.5), характеризующие скорость затухания возмущений в дальнем поле дозвуковых симметричных течений соответственно около замкнутого профиля и около рассматриваемого полубесконечного тела, согласуются с резуль-

татами работ [1–3], изложенными в [4] (формулы (11.5), (11.6)), но являются более точными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00169).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ludford G.S.S.* The behaviour at infinity of the potential function of a two dimensional subsonic compressible flow // *J. Math. and Phys.* 1951. V. 30. № 3. P. 117–130.
2. *Bers L.* Existence and uniqueness of a subsonic flow past a given profile // *Communs Pure and Appl. Math.* 1954. V. 7. № 3. P. 441–504.
3. *Finn R., Gilbarg D.* Asymptotic behavior and uniqueness of plane subsonic flows // *Communs Pure and Appl. Math.* 1957. V. 10. № 1. P. 23–63.
4. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 208 с.

Казань

Дата поступления
27.I.1999