

УДК 532.59 + 539.3

© 2000 г. И.В. ЛАВРЕНОВ, А.В. НОВАКОВ

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН С УПРУГИМИ ЛЬДИНАМИ

Численно в линейной постановке моделируется самосогласованное движение жидкости и упругих колебаний пластин, частично покрывающих жидкость. Задача сводится к нахождению совместного решения уравнения Лапласа для жидкости и уравнения колебаний упругой пластины для льда. Проводится сопоставление численного и аналитического решения, которое находится из интегрального уравнения с функцией Грина. Для численной реализации задачи предложено использовать метод граничных элементов для уравнения Лапласа и метод конечных элементов для решения уравнения для упругой пластины. Получены значения коэффициентов прохождения и отражения поверхностных гравитационных волн от плавающих пластин. Показано, что решение может иметь квазипериодический характер, определяемый исходными значениями параметров волн и ледяных пластин. Льдины могут оказывать фильтрующее влияние на спектр поверхностного волнения, существенно уменьшая отдельные его компоненты, подверженные наибольшему отражению.

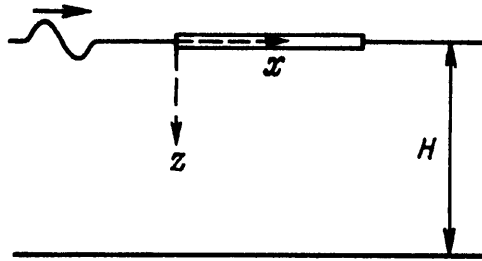
Волны зыби из открытого моря могут проникать в зоны битого и сплоченного льда. Много экспериментального материала о режиме волнения при наличии льда было получено в ходе эксперимента MIZEX [1]. Наблюдения за волнами, проникающими под сплоченный лед, описаны в [2]. Отмечается, в частности, что под ледяным покровом длинные волны могут проникать на значительные расстояния, достигать существенных амплитуд и даже взламывать сплоченный лед [3].

Методы моделирования взаимодействия гравитационных волн со сплошным ледяным покровом или с полубесконечной ледяной пластиной достаточно хорошо проработаны [4, 5]. Попытка моделирования волнения на акваториях, занятых плавающими льдинами конечной длины, была предпринята в [6] для оценки эволюции волнового спектра при наличии льда. Лед моделировался абсолютно жесткими плавающими пластинками, однако, как показывают расчеты, взаимодействие гравитационной волны с упругой пластиной имеет характер, существенно отличный от взаимодействия с жесткой неупругой пластиной.

Решение задачи взаимодействия гравитационных волн с льдиной конечной длины сопряжено с рядом трудностей, так как задача сводится к совместному решению уравнения Лапласа для жидкости и уравнения изгиба тонкой упругой пластины, содержащего четвертую пространственную производную.

В приближении мелкой воды решение задачи было предложено в [7], где показано, что полосы пропускания гравитационных волн могут в некоторых случаях иметь место даже при наличии бесконечной последовательности плавающих льдин конечной длины.

Задачи о дифракции изгибно-гравитационных волн во льду с трещинами и разводами рассматривались в [8, 9]. Аналитическое решение задачи для глубокой воды путем ее сведения к интегральному уравнению методом функции Грина было получено в [10]. Однако такой подход позволяет решить задачу лишь для определенных идеализированных условий (бесконечно глубокое дно, однородность свойств ледяной пластины по всей ее длине и т.д.).



Фиг. 1. Постановка задачи

Для преодоления подобных ограничений в данной работе предлагается численное решение задачи. Численная реализация была выполнена на основе совместного метода конечных и граничных элементов. При этом использовалась постановка задачи, сходная с [10], что позволило в некоторых случаях сравнить результаты расчетов с аналитическим решением. В настоящей работе получено решение более общей задачи. В частности, выполнены расчеты отражения и прохождения волн не только от одной или двух, но также от системы трех и четырех льдин различной длины. Учитывается эффект внутреннего напряженного состояния.

**1. Постановка задачи.** Пусть на поверхности идеальной жидкости плавает однородная ледяная изотропная пластинка длиной  $L$  (фиг. 1). Начало системы координат выберем на свободной поверхности жидкости и ось  $Z$  направим вертикально вниз. Линеаризованную граничную задачу для потенциала скорости  $\phi(x, z, t)$  несжимаемой и невращающейся жидкости представим в виде

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0; \quad 0 < z < H \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0; \quad z = H \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= -\frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad -\rho \left( g \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial t}; \quad z = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $g$  – ускорение свободного падения,  $p$  – давление на поверхность жидкости,  $\rho$  – плотность воды,  $\zeta$  – отклонение свободной поверхности,  $H$  – глубина жидкости.

Для случая однородной и изотропной пластинки ее смещение от положения равновесия подчиняется бигармоническому уравнению колебаний

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \mu^2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = \frac{p}{\rho' h}; \quad z = 0; \quad 0 < x < L$$

Таким образом, граничное условие под ледяной пластиной записывается в виде

$$-\rho \left( g \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) = \rho' h \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial^2 t \partial z} + \mu^2 \frac{\partial^5 \phi}{\partial^4 x \partial z} \right); \quad z = 0; \quad 0 < x < L \quad (1.2)$$

На открытой воде в предположении  $\partial p / \partial t = 0$

$$g \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0; \quad z = 0; \quad -\infty < x < 0; \quad L < x < \infty \quad (1.3)$$

На кромке льда также должны выполняться условия свободного края, заключающиеся в равенстве нулю изгибающего момента и перерезывающей силы [11].

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0; \quad x = 0; \quad x = L; \quad z = 0 \quad (1.4)$$

В уравнениях (1.2)–(1.4) использованы следующие обозначения:  $\rho'$  – плотность льда,  $\mu^2 = Eh^2/12\rho'(1 - \nu^2)$ ,  $E$  – модуль Юнга,  $h$  – толщина ледяной пластины,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Считая процесс периодическим во времени, будем искать решение в виде  $\phi = \phi' e^{i\omega t}$  для бесконечно глубокой жидкости. Следовательно, задача может быть переписана следующим образом (штрихи далее опущены):

$$\nabla^2 \phi = 0; \quad \infty < z < 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0; \quad z \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\omega^2}{g} \phi = 0; \quad z = 0; \quad -\infty < x < 0; \quad L < x < \infty$$

$$\frac{\partial^5 \phi}{\partial x^4 \partial z} + \alpha^4 \frac{\partial \phi}{\partial z} + \beta \phi = 0; \quad z = 0; \quad 0 < x < L$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^3 \partial z} = 0; \quad x = 0; \quad x = L; \quad z = 0$$

$$\alpha^4 = -\frac{\omega^2}{\mu^2} + \frac{\rho g}{\rho' h \mu^2}; \quad \beta = \frac{\omega^2 \rho}{\rho' h \mu^2} \quad (1.5)$$

Предполагая, что потенциал приходящей волны имеет единичную амплитуду, граничное условие при  $x \rightarrow \pm\infty$  можно записать в следующем виде:

$$\phi = T \exp(-ikx - kz); \quad x \rightarrow \infty \quad (1.6)$$

$$\phi = \exp(-ikx - kz) + R \exp(ikx - kz); \quad x \rightarrow -\infty$$

Здесь  $R$  и  $T$  – коэффициенты отражения и прохождения волны соответственно.

Аналитическое решение задачи (1.5), (1.6) в виде интегрального уравнения Фредгольма предложено в [10]

$$R = ik \int_0^L e^{-ik\xi} \left[ \phi(\xi, 0) + \beta \int_0^L \delta(\xi, \iota) \phi(\iota, 0) d\iota \right] d\xi$$

$$T = 1 + ik \int_0^L e^{ik\xi} \left[ \phi(\xi, 0) + \beta \int_0^L \delta(\xi, \iota) \phi(\iota, 0) d\iota \right] d\xi$$

$$\phi(x, 0) = e^{-ikx} + k \int_0^L [G(\xi, 0; \zeta, 0) + i \cos(kr)] \left[ \phi(\xi, 0) + \beta \int_0^L \delta(\xi, \iota) \phi(\iota, 0) d\iota \right] d\xi \quad (1.7)$$

Здесь  $G$  – функция Грина уравнения Лапласа,  $\delta$  – функция Грина уравнения для упругой пластины из (1.2).

**2. Численное решение.** Для численной реализации задачи были использованы совместно методы граничных (для аппроксимации уравнения Лапласа) и конечных (для аппроксимации уравнения упругой пластины) элементов.

Учитывая свойство функции Грина

$$\frac{\partial \phi(x, 0)}{\partial z} = -\beta \int_0^L g(x, \xi) \phi(\xi, 0) d\xi$$

уравнение для потенциала скорости из (1.6) перепишем в виде

$$\phi(x, 0) = e^{-ikx} + \int_0^L [G(\xi, 0; \zeta, 0) + i \cos(kr)] \left[ k\phi(\xi, 0) + \frac{\partial \phi(\xi, 0)}{\partial z} \right] d\xi \quad (2.1)$$

Это уравнение и рассматривалось как гранично-элементная постановка задачи [12].

Предполагается, что функция Грина  $G$  в этом выражении должна удовлетворять граничным условиям на свободной поверхности и на нижней границе. В [10] предложено следующее выражение для  $G$ :

$$G(\xi, \zeta; x, z) = \frac{1}{4\pi} \ln[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2] - \frac{1}{4\pi} \ln[(\xi - x)^2 + (\zeta + z)^2] - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\omega| - k} e^{-|\omega|(\zeta+z)} e^{i\omega(\xi-x)} d\omega$$

На поверхности ( $z = \zeta = 0$ ) это выражение приводится к виду

$$G(\xi, 0; x, 0) = -\frac{1}{\pi} \left( Ci(kr) \cos(kr) + \sin(kr) \left( Si(kr) + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

После пространственной дискретизации (1.7) можно записать в матричном виде

$$M_{ij} \phi_i + N_{ij} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} = B_i \quad (2.2)$$

В этом уравнении вид матриц  $M$  и  $N$  зависит от выбора формул численного интегрирования.

Конечно-элементная формулировка уравнения ледяной пластины из (1.2) записывается следующим образом:

$$\int_{S(x)} \left[ W_i \frac{\partial^5 \phi'}{\partial x^4 \partial z} + \alpha W_i \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right] dS(x) - \beta \int_{S(x)} W_i \phi' dS = 0$$

$$\alpha = \frac{\omega^2}{\mu^2} - \frac{\rho g}{\rho' h \mu^2}$$

$$\phi'(x) = \varphi_1(x) \phi_1 + \varphi_2(x) \phi_2 + \dots$$

Здесь  $\varphi_i(x)$  – базисные функции,  $W_i$  – весовые функции, которые в данном случае в соответствии с методом Бубнова – Галеркина принимались равными базисным.

Дважды интегрируя по частям первый интеграл в левой части, получаем

$$\int_{S(x)} \left[ \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \alpha W_i \varphi_j \right] \frac{\partial \phi_i}{\partial z} dS(x) - \beta \int_{S(x)} W_i \varphi_j \phi_i dS(x) + \left[ W_i \frac{\partial^4 \phi'}{\partial x^3 \partial z} - \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial^3 \phi'}{\partial x^2 \partial z} \right]_{x=0, L} = 0 \quad (2.3)$$

Учитывая граничные условия на концах пластины (1.4), исключим из выражения (2.3) последний член левой части. Тогда в матричном виде уравнение (2.3) перепишем как

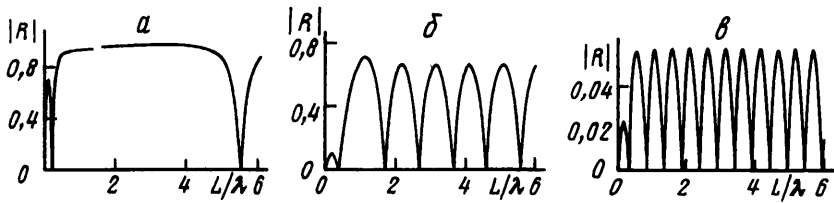
$$M'_{ij} \phi_i + N'_{ij} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

$$M'_{ij} = \int_{S(x)} \left[ \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \alpha W_i \varphi_j \right] dS(x), \quad N'_{ij} = \beta \int_{S(x)} W_i \varphi_j dS(x)$$

При выборе конечных элементов необходимо, чтобы на границах элементов выполнялось не только условие непрерывности потенциала, но и условие непрерывности его первой производной по  $x$  [13].

Таким образом, для решения граничной задачи для уравнения Лапласа (1.1)–(1.5) требуется решить совместно системы (2.2) и (2.4). При тестировании численного алгоритма выполнялось сопоставление численных результатов с аналитическим решением. При этом отличие полученных результатов от аналитических, полученных решением системы (1.7), не превышало  $10^{-6}$ .

**3. Результаты численного моделирования взаимодействия волн с льдиной.** В расчетах, представленных в этом разделе, использовались следующие значения физических



Фиг. 2. Зависимость коэффициента отражения  $|R|$  от длины ледяного поля  $L$  при толщине льда  $h = 1$  м и длинах волн  $\lambda = 10, 50, 200$  м (фиг. а, б, в соответственно)

величин: модуль Юнга  $E = 6 \cdot 10^9$  Па, коэффициент Пуассона для льда  $\nu = 0,3$ , плотности морской воды и льда  $1025$  и  $922,5$  кг/м<sup>3</sup> соответственно.

Зависимости модуля коэффициента отражения волны  $|R|$  от длины ледяной пластины  $L$  для различных длин волн (10, 50 и 200 м) представлены на фиг. 2. Каждая кривая имеет примерно одинаковую структуру и представляет собой последовательность выгнутых вверх сегментов, на концах которых  $|R| = 0$ , т.е. при таких параметрах системы волна проходит под пластиной без отражения. Такие нулевые точки, пользуясь терминологией [10], будем называть резонансными.

При  $L/\lambda \gg 1$  расстояние между резонансными точками стремится к половине длины волны подо льдом. В случае малой длины пластины структура кривой нарушена, что можно объяснить влиянием краевых эффектов при проникновении волны под ледяной покров. Расчеты показывают, что эти эффекты становятся заметными при длине ледяной пластины менее  $c_1 \lambda'$  ( $\lambda'$  – длина волны подо льдом,  $c_1 = 0,80-0,85$  – эмпирический коэффициент). Также рассчитано, что своего максимального значения модуль коэффициента отражения достигает при следующем соотношении длины волны и пластины:  $L \approx c_2 \lambda_2$  ( $c_2 = 0,55-0,60$ ).

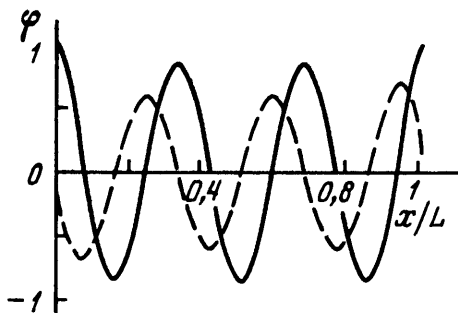
Потенциал скорости под ледяной пластиной (при  $z = 0$ ) как функция от безразмерной координаты  $x/L$  (при длине пластины около 366 м – одна из резонансных длин) показан на фиг. 3. Следует отметить, что амплитуда потенциала скорости в прикорневой области превышает амплитуду в середине пластины на 10–12%, эта величина может меняться в зависимости от соотношения длин волны и пластины и достигать 20% в нерезонансном случае. На границе ледяной пластины действительная часть потенциала достигает максимального значения, а мнимая обращается в ноль. Это свидетельствует о том, что на границе (при  $z = 0$ ) горизонтальная скорость волновых движений жидкости обращается в ноль, а фаза волны меняется на противоположную.

Длина волны под ледяной пластиной  $\lambda = 2\pi/k$  может быть оценена из дисперсионного соотношения. Для получения этой зависимости подставим решение в виде  $\phi(x, z) = \exp(-ikx - kz)$  в исходные уравнения (1.5) и получим

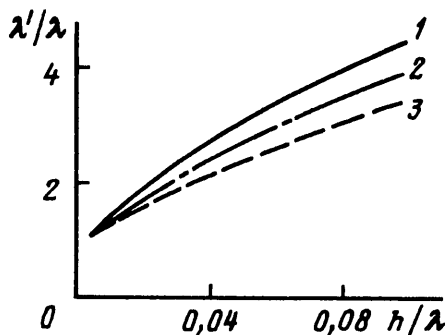
$$\left(1 + \frac{\rho' h k}{\rho}\right) \omega^2 = gk + \frac{E h^3 k^5}{12\rho(1 - \nu^2)} \quad (3.1)$$

График зависимости длины волны под ледяным покровом  $\lambda'$  от толщины льда, рассчитанный по (3.1) для длин волн  $\lambda = 50, 100$  и  $200$  м на открытой воде, приведен на фиг. 4. Таким образом, волны, проникающие под ледяной покров, обладают большей длиной, чем исходные на открытой воде, причем в большей степени трансформируются более короткие волны.

При увеличении толщины льда происходит увеличение коэффициента отражения. Так как толщина льда входит в виде параметра в дисперсионное уравнение (3.1), длина волны под более толстым льдом будет больше, поэтому расстояние между резонансными точками также увеличится.



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Зависимость потенциала скорости  $\phi$  под ледяной пластиной от безразмерной координаты  $x/L$  ( $L = 366$  м). Длина волны  $\lambda = 100$  м, толщина льда  $h = 1$  м. Сплошная линия – действительная часть, пунктир – мнимая часть

Фиг. 4. Зависимость длины волны  $\lambda'/\lambda$  под ледяным покровом от толщины льда  $h/\lambda$  для длины волны на открытой воде  $\lambda = 50, 100, 200$  м (кривые 1–3)

Для решения задачи взаимодействия волн со льдом с учетом внутреннего напряжения ледяного покрова уравнение ледяной пластины следует модифицировать

$$\rho' h \mu^2 \frac{\partial^5 \phi}{\partial x^4 \partial z} + h P \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial z} + (\rho' h \omega^2 - \rho g) \frac{\partial \phi}{\partial z} - \omega^2 \rho \phi = 0 \quad (3.2)$$

где  $P$  – внутреннее напряжение в ледяном покрове.

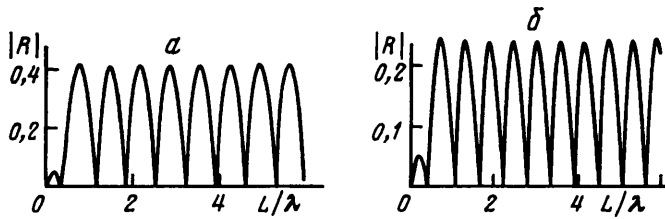
Наличие внутреннего сжатия в ледяном покрове приводит к уменьшению отражения гравитационной волны от пластины и, наоборот, при внутреннем растяжении модуль коэффициента отражения увеличивается (фиг. 5).

Длина волны подо льдом также зависит от внутреннего напряжения во льду. Расчетные длины волн  $\lambda'$  для значений ледяного растяжения  $P = -10^6$  н/м<sup>2</sup> и ледяного сжатия  $P = 10^6$  н/м<sup>2</sup> будут соответственно 138,2 м и 114,2 м. Таким образом, расстояние между резонансными точками будет увеличиваться при внутреннем растяжении и уменьшаться при сжатии.

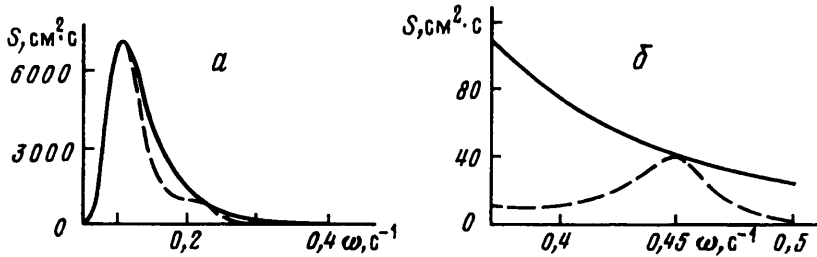
Модуль коэффициента отражения зависит от длины волны не только качественно, но и количественно. Особенно ярко это проявляется на примере трансформации частотного спектра волн, обусловленного влиянием плавающей льдины. Так, если при волне 10 м коэффициент отражения достигает почти единицы, то при длине волны 200 м он уже не превышает 0,06, т.е. при больших длинах волн отражение от ледяной пластины становится несущественным. Из этого можно заключить, что высокочастотная составляющая волнового спектра будет отражаться льдиной сильнее, однако наличие резонансных точек может привести к тому, что некоторая часть спектра будет проникать под ледяную пластину почти беспрепятственно.

На фиг. 6, а показано изменение спектра Пирсона – Московича [14] после прохождения волн под ледяной пластиной длиной 110 м. Как видно, в спектре образовался второй максимум на частоте 0,23 Гц. Более подробный график высокочастотной части спектра (фиг. 6, б) позволяет выделить также и третий максимум на частоте 0,45 Гц. Частота 0,45 Гц соответствует длине волны чуть более 7 м, т.е. даже такие короткие волны в некоторых случаях могут проникать под лед почти без отражения.

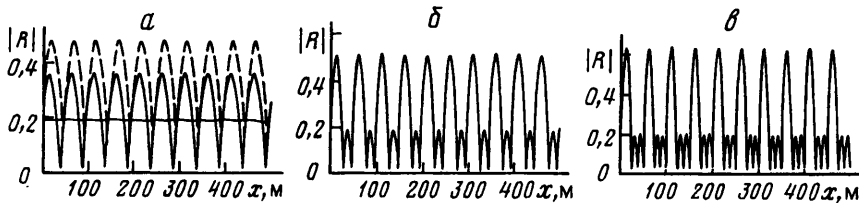
**4. Результаты численного моделирования волн с несколькими льдинами.** Описанный метод решения задачи взаимодействия гравитационных волн с ледяной пластиной можно обобщить на случай нескольких пластин с координатами кромок  $x_j, L_j$  ( $j$  –



Фиг. 5. Зависимость коэффициента отражения  $|R|$  от длины ледяного поля  $L$  при длине волны  $\lambda = 10$  м, толщине льда  $h = 1$  м: с учетом ледяного растяжения, внутреннее напряжение льда  $P = -10^6$  н/м<sup>2</sup> (а); с учетом ледяного сжатия, внутреннее напряжение льда  $P = 10^6$  н/м<sup>2</sup> (б)



Фиг. 6. Спектр Пирсона – Московца до и после (пунктир) прохождения (а) волнового пакета под ледяной пластиной  $L = 110$  м,  $h = 1$  м. Более подробное изображение высокочастотной части спектра (б)



Фиг. 7. Зависимость коэффициента отражения  $|R|$  от расстояния между двумя (а), тремя (б) и четырьмя (в) ледяными пластинами при длине волны  $\lambda = 100$  м, толщине льда  $h = 1$  м. а: сплошная линия – две пластины по 100 м; пунктир – пластины 100 и 150 м; точки – пластины 100 и 175 м

номер пластины)

$$\phi(x, 0) = e^{-ikx} + \sum_j \int_{x_j}^{L_j} [G(\xi, 0; \zeta, 0) + i \cos(kr)] \left[ k\phi(\xi, 0) + \frac{\partial \phi(\xi, 0)}{\partial z} \right] d\xi \quad (4.1)$$

На фиг. 7 представлены результаты расчетов для случаев двух, трех и четырех ледяных пластин. Интересен тот факт, что система из нескольких ледяных пластин конечной длины при некоторых условиях может иметь нулевое отражение даже в случае, если каждая из этих пластин не является абсолютно прозрачной для волны. Такая ситуация, однако, имела место только при одинаковых длинах всех пластин. При произвольном выборе длин пластин коэффициент отражения системы не достигал нуля, это иллюстрируется на фиг. 7, а, где показаны зависимости коэффициента отражения системы из двух пластин от расстояния между пластинами. Как

видно из рисунка, при некоторых параметрах системы зависимость может вырождаться в практически прямую линию (как, например, для пластин 100 и 175 м).

Общая структура кривых также сегментарна и расстояние между резонансными точками в этом случае соответствует половине длины волны на открытой воде. В случае систем из трех и четырех пластин этот период сохраняется, однако появляются дополнительные максимумы (один – для случая трех пластин (фиг. 7, б) и два – для четырех (фиг. 7, в)) между основными максимумами. Максимальное значение коэффициента отражения становится больше при увеличении числа пластин.

**Заключение.** При проникновении гравитационной волны под ледяную пластину возможно такое сочетание параметров системы, когда отражения не происходит (резонансные точки). Коэффициент отражения сильно зависит от длины волны и может варьироваться от практически полного отражения до нескольких процентов при длинах волн 200 м и более. Максимальный коэффициент отражения имеет место при длине ледяной пластины  $L \approx c_2 \lambda'$  ( $c_2 = 0,55-0,60$ ). При увеличении толщины льда увеличиваются максимальное значение коэффициента отражения и расстояние между резонансными точками. При наличии внутреннего сжатия в ледяном покрове максимальное значение коэффициента отражения и расстояние между резонансными точками уменьшаются и, наоборот, при внутреннем растяжении увеличиваются.

Система из нескольких ледяных пластин имеет отражательную способность меньшую, чем любая из пластин, и может достигать нуля для системы из пластин равной длины. Зависимость модуля коэффициента отражения от расстояния между пластинами системы имеет период, равный половине длины волны на открытой воде.

Имеет место фильтрующий эффект льдин на спектр поверхностного волнения: высокочастотная составляющая волнового спектра отражается льдиной значительно сильнее его низкочастотной составляющей, однако из-за наличия резонансных точек возможно появление локальных максимумов в спектре, в том числе и в его высокочастотной области.

Работа выполнена в рамках договора о научно-техническом сотрудничестве между Институтом полярных исследований Норвегии и ГНЦ РФ Арктическим и Антарктическим научно-исследовательским институтом Росгидромета (NP project 1707/201).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wadhams P., Squire V.A., Ewing J.A., Paskal R.W.* The effect of the marginal ice zone on the directional wave spectrum of the ocean // *J. Phys. Oceanogr.* 1986. V. 16. № 2. P. 358–376.
2. *Squire V.A.* How waves break up inshore fast ice // *J. Polar Record.* 1984. V. 22. № 138. Sept. P. 281–285.
3. *Liu A.K., Mollo-Christensen E.* Wave propagation in a solid ice pack // *J. Phys. Oceanogr.* 1988. V. 18. № 11. P. 1702–1712.
4. *Букатов А.Е., Черкесов Л.В., Ярошенко А.А.* Изгибно-гравитационные волны от движущихся возмущений // *ПМТФ.* 1984. № 2. С. 151–157.
5. *Fox C., Squire V.A.* Strain in shore fast ice due to incoming ocean waves and swell // *J. Geophys. Res.* 1991. V. 96. № C3. P. 4531–4547.
6. *Masson D., LeBlond P.H.* Spectral evolution of wind-generated surface gravity waves in a dispersed ice field // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 202. P. 43–81.
7. *Marchenko A., Purini P., Voliak K.* Filtering surface waves by the ice floes // *Proc. 13th Intern. Conf. on Port and Ocean Eng. under Arctic Cond. (POAC'95. Murmansk).* St. Petersburg, 1995. V. 3. P. 134–142.
8. *Марченко А.В.* Дифракция изгибно-гравитационных волн на линейных неоднородностях в ледяном покрове // *Изв. РАН. МЖГ.* 1997. № 4. С. 97–112.
9. *Marchenko A., Voliak K.* Surface wave propagation in shallow water beneath an inhomogeneous ice cover // *J. Phys. Oceanogr.* 1997. V. 27. № 8. P. 1602–1613.



10. *Meylan M., Squire V.A.* The response of ice floes to ocean waves // *J. Geophys. Res.* 1994. V. 99. № С1. P. 891–900.
11. *Красильников В.Н.* Влияние тонкого упругого слоя на распространение звука в жидком полупространстве // *Акуст. журн.* 1960. Т. 6. Вып. 2. С. 220–228.
12. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
13. *Съярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир. 1980. 512 с.
14. *Давидан И.Н., Лопатухин Л.И., Рожков В.А.* Ветровое волнение в Мировом океане. Л.: Гидрометеиздат, 1985. 256 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию  
3.XI.1998