

УДК 532.517.2:536.24

© 2000 г. С.Н. АРИСТОВ, В.Г. ЗЕЛЕНИНА

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛООБМЕНА НА ПУАЗЕЙЛЕВСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Рассматривается стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале, на границах которого заданы условия прилипания и теплообмена. Течение вызывается фиксированным перепадом давления, а вязкость зависит от температуры по степенному закону. На основе численного анализа показано, что зависимость числа Пекле от безразмерного перепада давления неоднозначна. В результате исследования зависимости решения от числа Био установлено, что профиль скорости имеет точку перегиба при числах Био, больших единицы.

При значительной разности температур в потоке изменение физических свойств с температурой оказывает существенное влияние на режим движения жидкости. Например, профиль скорости при течении капельной жидкости, коэффициент вязкости которой зависит от температуры, не будет параболическим. Для капельных жидкостей наиболее сильно изменяется с температурой коэффициент динамической вязкости. Поэтому остальные физические свойства капельных жидкостей часто полагают постоянными. В случае, когда вязкость жидкости зависит от температуры, поля скорости и температуры взаимно связаны, что требует совместного интегрирования уравнений движения и энергии. При этом возникают трудности, связанные с нелинейностью уравнений движения.

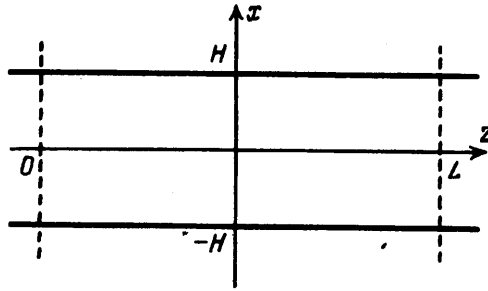
Впервые задача о движении жидкости, вязкость которой зависит от температуры, была поставлена Л.С. Лейбензоном в 1922 г. [1]. В предположении, что температура и вязкость жидкости постоянны по сечению и изменяются лишь по длине трубы, им было получено приближенное решение этой задачи. Такая постановка задачи интересна для расчета гидравлического сопротивления при движении подогретой жидкости (например, нефти) в длинных трубопроводах. Приближенное решение, когда температура стенки постоянна, было получено для течения жидкости с переменной вязкостью в круглой трубе [2]. Задача о стационарном течении при постоянстве плотности теплового потока по длине трубы была рассмотрена в [3].

Задача неизотермического течения вязких жидкостей в силу нелинейности уравнений движения может иметь неединственное решение.

Примером такой неединственности может быть явление теплового взрыва [4]. В [5–9] на основе интегральных оценок была показана возможность неоднозначной зависимости расхода термовязкой жидкости от перепада давления в трубе, стенки которой имеют температуру ниже температуры поступающей жидкости.

В случае, когда свойства жидкости зависят только от поперечной координаты [10], изучение структуры течений возможно в рамках автомоделных решений уравнений движения. В случае, когда коэффициент вязкости меняется вдоль потока, насколько авторам известно, автомоделные режимы ранее описаны не были.

1. Постановка задачи. Рассмотрим стационарное течение несжимаемой жидкости, вязкость которой является заданной функцией температуры. Жидкость движется в плоском бесконечном канале, ограниченном параллельными стенками, геометрия



Фиг. 1. Схема течения жидкости в плоском канале длины L

которого приведена на фиг. 1. Движение жидкости вызывается заданным перепадом давления. Требуется определить поля скорости, давления и температуры при условии, что на стенках канала заданы условия прилипания и теплообмена.

Движение жидкости и поле температур определяется системой

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\nabla p + \text{Div}(\tau_{ij})$$

$$\nabla V = 0, \quad \frac{dT}{dt} = \chi \Delta T \quad \tau_{ij} = \mu(T) \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right] \quad (1.1)$$

Здесь V — поле скорости, T — температура, p — давление, μ — вязкость жидкости, τ_{ij} — компоненты тензора вязких напряжений, χ — коэффициент температуропроводности.

Коэффициент температуропроводности считается постоянным, а эффекты нагрева за счет вязкой диссипации незначительны [10]. Исходя из того, что слой достаточно длинный, а условия на входе стационарные, естественно считать, что жидкость движется параллельно горизонтальным границам слоя, когда не равна нулю только одна компонента скорости. В этом случае система (1.1) и граничные условия приводятся к виду

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial V_z}{\partial x}, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad V_z = \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (1.2)$$

$$x = 0: V_z = 0, \quad T = T_0; \quad x = H: V_z = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = -\text{Bi} HT$$

где Bi — число Био, характеризующее интенсивность теплообмена.

Так как для большинства каплежидкостей вязкость убывает с ростом температуры, положим $\mu = \mu_0 T_0 / T^m$, $\mu_0 = \rho \nu$, где m — некоторая постоянная, зависящая от свойств материала.

Автомодельное решение существует при любых значениях m , но в данной работе для большей наглядности ограничимся случаем $m = 1$. Решение уравнений (1.2) будем искать в виде

$$T = \theta(\zeta) e^{-k\xi} T_0, \quad p = p_0 \frac{1 - p(\zeta) e^{(k/\delta)(\xi-1)}}{1 - e^{-k/\delta}}, \quad V_z = w(\zeta) w_0$$

$$\delta = \frac{H}{L}, \quad \zeta = \frac{x}{H}, \quad \xi = \frac{z}{L}$$

где k – некоторое число, T_0, p_0, w_0 – экстремальные значения соответствующих гидродинамических полей, L – некоторый участок канала, на границах которого заданы известные величины давления и температуры, H – полутолщина канала. Здесь и далее термин "автомодельное решение" используется в том смысле, что задача сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, несмотря на то что поля давления и температуры двумерные, т.е. изменяются как вдоль, так и поперек канала.

Подставляя указанные выражения в систему (1.2), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$-gkp(\zeta) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{\theta} \frac{\partial w}{\partial \zeta}, \quad g \frac{\partial p}{\partial \zeta} = -\frac{k \partial w}{\theta \partial \zeta}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} = -\theta(k^2 + k \text{Pe } w) \quad (1.3)$$

$$\text{Re} = \frac{w_0 H}{\chi_0}, \quad G = \frac{p_0 H^2}{\rho_0 \nu_0 \chi_0}, \quad g = \frac{G}{\text{Pe}(e^{k/8} - 1)}$$

Предположим, что максимальные значения давления и температуры достигаются при $\zeta = 0$.

Подставив второе уравнение системы (1.3) в первое, получим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \zeta^2} = k^2 p \quad (1.4)$$

Из симметрии граничных условий и равенства давления на входе в канал величине p_0 следует, что единственное решение уравнения (1.4) имеет вид $p = \text{ch } k\zeta$.

Подставляя это решение в оставшиеся уравнения системы (1.3), получим

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = -g\theta \text{sh } k\zeta \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} = -k\theta(k + \text{Pe } w)$$

При этом в соответствии с постановкой задачи граничные условия для скорости и температуры принимают вид:

$$\zeta = 0: w = 1, \theta = 1; \quad \zeta = 1: w = 0, \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = -\text{Bi } \theta \quad (1.6)$$

Таким образом получили краевую задачу для системы третьего порядка с четырьмя граничными условиями, т.е. переопределенную задачу.

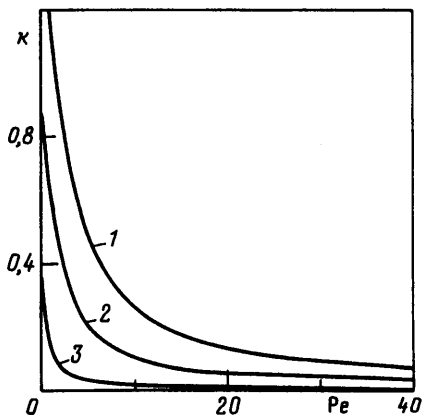
При фиксированном числе Bi будем искать такие значения параметров G и k , при которых уравнения (1.5) имеют решение, удовлетворяющее граничным условиям (1.6) для любого заданного числа Пекле.

2. Численное решение. Решение задачи находилось численно методом конечных разностей [12].

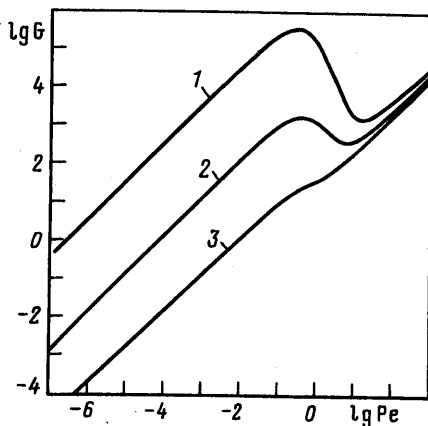
Характерные параметры находились следующим образом: фиксировалось число Pe и варьировались безразмерный перепад давления G и параметр автомодельности k . Значения k и G считались найденными, если величина функционала вида

$$F = \sqrt{w|_{\Gamma}^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \Big|_{\Gamma} + \text{Bi } \theta \Big|_{\Gamma} \right)^2} \quad (2.1)$$

становилась меньше заданной точности, где $\Gamma - \zeta = 1$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Зависимость параметра автомодельности от числа Re при $Bi = 10; 1; 0,1$ (кривые 1–3)

Фиг. 3. Зависимость безразмерного перепада давления от числа Re при $Bi = 10; 1; 0,1$ (кривые 1–3)

Функционал в пространстве (k, G, Re) имеет множество локальных минимумов, расположенных близко друг от друга. Этот факт делает затруднительным поиск интересующего глобального минимума функционала. Для нахождения глобального минимума приходится задавать очень мелкий шаг по параметрам, что значительно увеличивает время расчета. Поэтому описанный выше метод был изменен следующим образом.

Из анализа уравнений (1.5)–(1.6) вытекает, что $\theta > 0$ при $\zeta \in [0, 1]$, так как вязкость жидкости не может быть отрицательной. Следовательно, величина скорости монотонно убывает при удалении от середины слоя, а профиль температуры всегда выпуклый.

Установленные выше свойства функций $\theta(\zeta)$ и $w(\zeta)$ позволяют провести переформулировку задачи. Так как скорость пересекает ось только в одной точке, то удобно ввести новую переменную $z = k\zeta$ и решать задачу на интервале $z \in [0, k]$. Тогда единственная точка пересечения $w(\zeta)$ с осью позволяет определить k .

В результате переформулировки задачи вводились новые безразмерные комплексы

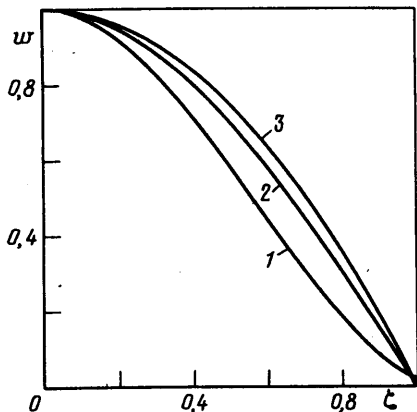
$$p = \frac{Re}{k}, \quad \lambda = \frac{G}{k Re (e^{k/6} - 1)}$$

При этом процедура решения сводилась к следующему: зафиксировав значение p , варьируем значение λ с некоторым шагом $h\lambda$. Исходя из граничных условий уравнения, решаем пока $w \geq 0$. Оптимальным будет параметр автомодельности k , при котором $w = 0$.

Коэффициенты k, p и λ считаются найденными, если значение нового функционала $F(k(\partial\theta/\partial z) + Vi\theta)_\Gamma$ изменит знак.

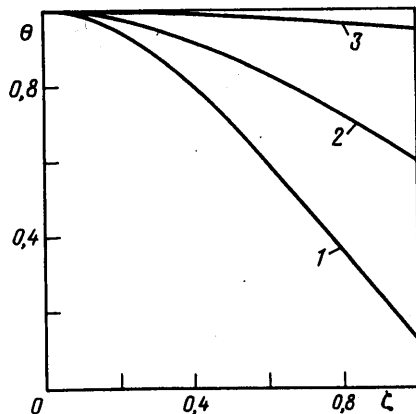
Выяснилось, что этот алгоритм пригоден для нахождения коэффициентов k и G при небольших числах Re . Параметр автомодельности k с ростом числа Re быстро убывает, следовательно, уменьшается расчетный интервал. Это приводит к необходимости задания очень маленького шага по автомодельной переменной, а следовательно, приводит к увеличению времени счета.

Поэтому для расчетов при больших числах Re была проведена еще одна переформулировка задачи. Вводилась автомодельная переменная $z = L\zeta$. Такая перенор-



Фиг. 4

Фиг. 4. Зависимость профиля скорости от числа Би: $Bi = 10; 1; 0,1$ (кривые 1–3)



Фиг. 5

Фиг. 5. Зависимость профиля температуры от числа Би: $Bi = 10; 1; 0,1$ (кривые 1–3)

мировка задачи приводит к тому, что расчетный интервал почти не изменяется, это в свою очередь позволяет проводить вычисления при любом числе Re .

3. Результаты расчета и выводы. Исследования показали, что параметр автономности k с ростом числа Re монотонно убывает. Так как параметр k характеризует температуру на выходе из канала, то с уменьшением k температура жидкости на выходе повышается. С увеличением интенсивности теплообмена через твердые стенки канала жидкость быстрее остывает (фиг. 2).

Расчеты показали, что при каждом заданном числе Re задача имеет единственное решение, но при фиксированном перепаде давления может быть от одного до трех значений скорости.

Как видно из фиг. 3, зависимость безразмерного перепада давления от числа Re имеет неоднозначный характер, т.е. при одном и том же перепаде давления скорости могут различаться на несколько порядков. С увеличением числа Би переходная область более выражена.

В работе были также найдены распределения скорости и температуры. Скорость монотонно убывает от центра к твердой стенке. При числе $Bi > 1$ в профиле скорости появляется перегиб. Критическое значение числа Би устанавливается точно в результате аналитического исследования, которое здесь не приводится [13]. При увеличении интенсивности теплоотдачи перегиб более выражен (фиг. 4). Температура – монотонно убывающая функция поперечной координаты. Причем с ростом числа Би температура жидкости у твердой стенки понижается (фиг. 5). Кроме этого, было установлено, что профиль скорости и температуры в исследованном диапазоне чисел Би от величины Re не зависят.

Наличие гистерезиса не связано с перестройкой потока, так как профили не меняются при увеличении расхода. Но так как температура сильно меняется вдоль потока и параметр автономности зависит от числа Пекле, в среднем меняется трение на стенках канала, что влечет за собой изменение зависимости расхода от перепада давления.

Заключение. Исследовано течение в плоском канале несжимаемой жидкости, вязкость которой – степенная функция температуры при заданном теплообмене на стенках. Установлено, что зависимость числа Пекле от безразмерного перепада давления неоднозначна, а профиль скорости поперек канала имеет при достаточно интенсивном теплообмене (число Био больше единицы) точку перегиба.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00063).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лейбензон Л.С.* О движении подогретой вязкой жидкости // *Азерб. нефт. хоз-во.* 1922. N2(3). С. 59–66.
2. *Янг Ван-цзу.* Конвективный теплообмен при вынужденном ламинарном течении жидкостей в трубах в случае переменной вязкости // *Теплопередача.* 1962. № 4. С. 95–105.
3. *Петухов Б.С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 411 с.
4. *Stolin A.M., Merzhanov A.G., Malkin A.Ya.* Non-isothermal phenomena in polymer engineering and science: a review. Pt 1. Non-isothermal polymerization // *Polymer Eng. and Sci.* 1979. V. 19. № 15. P. 1065–1073.
5. *Pearson J.R.A., Shan Y.T., Vieira E.S.A.* Stability of non-isothermal flow in channels. I. Temperature dependent Newtonian fluid without heat generation // *Chem. Eng. Sci.* 1973. V. 28. № 11. P. 2097–2088.
6. *Pearson J.R.* Instability in non-newtonian flow // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1976. V. 8. P. 163–181.
7. *Pearson J.R.A.* Polymer flows dominated by high heat generation and low heat transfer // *Polymer Eng. and Sci.* 1978. V. 18. № 3. P. 222–229.
8. *Pearson J.R.A.* Flow curves with a maximum // *J. Rheoly.* 1994. V. 38. № 2. P. 309–331.
9. *Скульский О.И., Славнов Е.В., Няшин Ю.И.* Неединственность решения задачи неизотермического течения термопластичных материалов в трубе конечной длины // *Конвективные течения и гидродинамическая устойчивость.* Свердловск: УНЦ АН СССР. 1979. С. 87–89.
10. *Тадмор Э., Гогос К.* Теоретические основы переработки полимеров. М.: Химия, 1984. 628 с.
11. *Лаврентьева О.М.* Течение вязкой жидкости в слое на вращающейся плоскости // *ПМТФ.* 1989. № 5. С. 41–48.
12. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
13. *Aristov S.N., Zelenina V.G.* The exact solution of the problem of steady flow of the fluid with variable viscosity // *Book of Abstracts. 11th Intern. Winter School on Continuous Media Mechanics.* Perm, 1997. P. 9.
14. *Андриенко Ю.А., Брутян М.А., Образцов И.Ф., Яковский Ю.Г.* Спурт-эффект для вязкоупругих жидкостей в четырехконстантной модели Олдройда // *Докл. РАН.* 1997. Т. 352. № 3. С. 327–330.

Пермь

Поступила в редакцию
3.VII.1997