

УДК 532.516

© 2000 г. Н.В. НИКИТИН

О МЕХАНИЗМЕ ПОДАВЛЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ БОКОВЫМИ ОСЦИЛЛЯЦИЯМИ ОБТЕКАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Изучается эффект ослабления интенсивности турбулентных пульсаций в пристенных течениях под действием боковых периодических осцилляций обтекаемой поверхности. В прямом численном моделировании течения в трубе кругового сечения с наложенными вращательными осцилляциями получено, что при $Re = 4000$ и оптимальном выборе частоты осцилляций степень ослабления турбулентности растет с увеличением амплитуды осцилляций вплоть до наступления реламинаризации. Дана оценка оптимальной частоты: $\omega^+ = 0,06$. Применение теории возникновения пристенных организованных структур дает результаты, качественно согласующиеся с результатами численного моделирования. Делается вывод о том, что снижение интенсивности пульсаций вызывается ослабляющим воздействием бокового движения на продольные вихри, являющиеся причиной турбулентных вспышек в пристенных течениях.

В численных расчетах турбулентных течений в канале с параллельными стенками [1] обнаружено, что наложение на поток периодического во времени градиента давления, действующего в боковом направлении, приводит к заметным изменениям интенсивности турбулентных пульсаций. При низких частотах осцилляций бокового градиента давления пульсации усиливаются, а при высоких – ослабляются. Соответственно меняется и турбулентное трение на стенках канала. При $Re = 6000$ получено снижение продольной компоненты трения на стенках до 40%. Аналогичный эффект наблюдается при боковых осцилляциях одной из стенок канала. В этом случае изменение интенсивности турбулентности происходит лишь со стороны осциллирующей стенки.

Этот результат, полученный прямым численным моделированием, подтвержден и экспериментально. В [2] исследовалось турбулентное течение в пограничном слое на плоской пластине, на некотором расстоянии от передней кромки которой имелась подвижная секция, осциллирующая в боковом направлении. В исследованном диапазоне частот и амплитуд колебаний подвижной секции наблюдалось снижение продольной компоненты трения. Судя по представленным в [2] профилям средней скорости, максимальное снижение трения достигало 50% при $Re_\delta = 10^4$.

Авторы работ [1, 2] связывают наблюдающийся эффект ослабления турбулентности с изменениями в пристенных организованных структурах, происходящими под действием бокового движения. Вблизи стенки доминирующими структурами являются продольные полосы – вытянутые вдоль потока области ускоренного и замедленного движения, почти периодически чередующиеся в боковом направлении [3]. Согласно общепринятому мнению, крупномасштабная боковая неоднородность скорости потока является основной причиной генерации мелкомасштабных турбулентных пульсаций. Полосы образуются под действием так называемых продольных вихрей, создающих циркуляционное движение в плоскостях, перпендикулярных основному потоку [3–5]. Со ссылкой на [6] в [2] утверждается, что движение жидкости, вызываемое осцилляциями стенки, переносит продольные вихри, в результате чего

возникает рассогласование во взаимном расположении вихрей и полос. Восходящие от стенки потоки, вызванные продольными вихрями, попадая в области ускоренного движения, и, наоборот, нисходящие потоки в областях ускоренного движения ослабляют полосы, в результате чего происходит уменьшение частоты турбулентных всплесков и как результат снижение средней интенсивности турбулентных пульсаций.

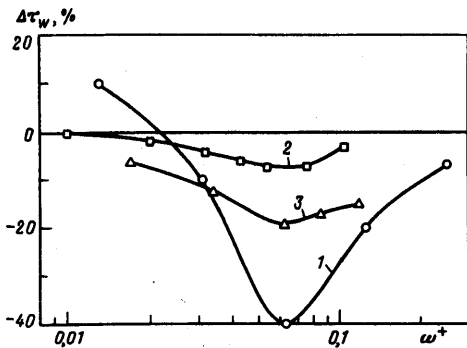
Недостаток приведенного объяснения состоит в том, что продольные вихри и полосы рассматриваются в нем как самостоятельные независимые образования, тогда как полосы в значительной мере являются следствием действия вихрей [5]. При боковом перемещении вихрей должно происходить аналогичное перемещение полос без нарушения согласованности в их взаимном расположении. Кроме того, описанный в [2] механизм не может объяснить усиление турбулентности при низких частотах боковых осцилляций, наблюдавшееся в [1].

В настоящей работе на примере течения в трубе с осциллирующей стенкой проводится дальнейшее изучение воздействия бокового движения на характеристики турбулентности. Кроме того, применяется теория возникновения продольных вихрей в пристенных турбулентных течениях [7], позволяющая сделать вывод о том, что боковое движение воздействует непосредственно на продольные вихри, усиливая их при низких частотах боковых осцилляций и ослабляя при высоких частотах. Изменения интенсивности продольных вихрей, являющихся одним из звеньев в цикле самоподдержания турбулентности, должны приводить к аналогичным изменениям интенсивности турбулентных пульсаций и как следствие величины среднего трения на стенке.

1. Результаты прямого численного моделирования. Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения при числе Рейнольдса $Re = U_m D / \nu = 4000$, U_m – средняя скорость движения, D – диаметр трубы, ν – кинематическая вязкость жидкости. Уравнения Навье–Стокса с условиями прилипания на стенке трубы и периодическими условиями в осевом направлении решаются численно методом [8, 9]. Пространственное разрешение в осевом, радиальном и угловом направлениях составляет $31 \times 48 \times 31$ соответственно, что достаточно для воспроизведения основных интегральных характеристик турбулентного движения с точностью 3–5% [10]. В начальный момент времени на течение Пуазейля накладываются некоторые случайные трехмерные возмущения и уравнения интегрируются до выхода решения на статистически стационарный режим. Затем накладываются вращательные осцилляции трубы вокруг своей оси по закону $W_w \sin(\omega t)$, где W_w – скорость стенки трубы и задача решается вновь до установления статистически стационарных колебаний. После этого уравнения интегрируются параллельно с вычислением средних величин. Кроме осреднения по времени проводится осреднение по однородным координатам (вдоль осевого и углового направления).

Во всех проведенных расчетах при ненулевой амплитуде скорости осцилляций стенки W_w получено уменьшение продольной компоненты напряжения трения на стенке τ_w по сравнению со случаем неподвижной трубы (фиг. 1). При фиксированном W_w наибольший эффект достигается при частоте осцилляций $\omega^+ = 0,06$, что согласуется с результатами [1] (знаком плюс обозначается нормировка на пристенные масштабы скорости $u_\tau = (\tau_w / \rho)^{0,5}$ и длины $l_\tau = \nu / u_\tau$). При $W_w / U_m = 0,2$ ($W_w^+ \approx 3$) максимальное снижение τ_w составляет 8%, а при $W_w / U_m = 0,4$ ($W_w^+ \approx 6$) – 20%. В [1] получено снижение трения на 40% при $W_w^+ = 13$ и $Re = 6000$. Отметим, что в рассмотренном течении ламинарное трение составляет 40% трения в турбулентном режиме, так что предел понижения трения равен 60%. В расчете с $W_w / U_m = 0,6$ при $\omega^+ = 0,06$ было получено полное подавление турбулентных пульсаций, т.е. реламинаризация течения.

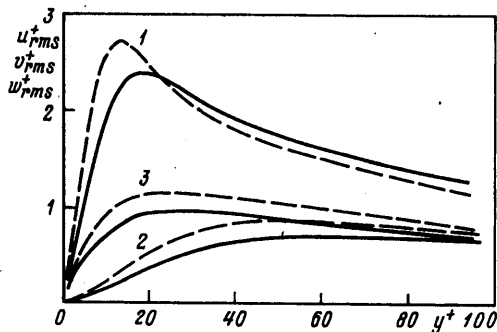
Качественный и количественный согласие результатов воздействия высокочастотных осцилляций стенки в плоском канале и в круглой трубе свидетельствует о том,



Фиг. 1

Фиг. 1. Изменение продольного трения $\Delta\tau_w$ под действием осцилляций стенки (в процентах к трению на неподвижной стенке):

1 – течение в плоском канале [1], $Re = 6000$, $W_w^+ = 13$; 2, 3 – течения в круглой трубе, $Re = 4000$, $W_w^+ = 3$ и 6



Фиг. 2

Фиг. 2. Распределения среднеквадратичных амплитуд пульсаций скорости в пристенной области круглой трубы при $Re = 4000$. Сплошные линии – осциллирующая стенка, $W_w^+ = 6$, $\omega^+ = 0,06$; штриховые линии – неподвижная стенка. Линии 1, 2 и 3 отвечают пульсациям в продольном, нормальном и боковом направлениях соответственно

что это воздействие осуществляется через пристенные структуры, поперечный масштаб которых заметно меньше радиуса кривизны стенки. Так, характерный диаметр пристенных продольных вихрей составляет $40l_\tau$ [3], тогда как радиус трубы при рассматриваемом $Re = 4000$ равен $150l_\tau$.

В отличие от [1] в проведенных расчетах не было обнаружено повышения трения при малых ω . Более того, в области сверхнизких частот ($\omega^+ < 0,005$) зафиксировано дополнительное снижение трения. Получение надежной статистической информации при столь низких частотах требует очень большого периода осреднения (в несколько периодов осцилляций стенки), что не было достигнуто в расчетах. Таким образом, достоверность этих результатов нуждается в дальнейшей проверке. Полученное отличие в воздействии низкочастотных осцилляций стенки в круглой трубе, вероятнее всего, объясняется влиянием центробежных сил, отсутствующих в плоском канале.

На фиг. 2 приведены пристенные распределения среднеквадратичных амплитуд пульсаций трех компонент скорости, полученные при $\omega^+ = 0,06$ и $W_w^+ = 6$. Сравнение с соответствующими распределениями в течении с неподвижной стенкой показывают, что наибольшее относительное понижение интенсивности наблюдается для боковых и нормальных пульсаций в области $10 < y^+ < 50$. Поскольку в этой области в пристенных турбулентных течениях сосредоточены продольные вихри, можно предположить, что в первую очередь именно продольные вихри ослабляются поперечным движением жидкости, вызванным осцилляциями стенки.

2. Применение теории возбуждения продольных вихрей. В [7] предложены возможный механизм возбуждения и модель описания продольных вихрей в пристенных областях турбулентных течений. Следуя идее [7], рассмотрим турбулентное течение над плоской гладкой стенкой, совершающей периодические осцилляции в боковом по отношению к основному потоку направлении. Направим ось x декартовой системы координат вдоль основного потока, ось y – по нормали к стенке, z – в боковом направлении. В качестве масштабов скорости и длины возьмем пристенные масштабы u_τ и l_τ . Будем считать течение статистически однородным в направлении x , тогда уравнения Рейнольдса для скоростей поперечного к основному потоку движения в выб-

ранных масштабах можно записать следующим образом [7]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial(P + \langle W'W' \rangle)}{\partial y} - \Delta V + \frac{\partial \langle V'W' \rangle}{\partial z} = F \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial(P + \langle W'W' \rangle)}{\partial z} - \Delta W + \frac{\partial \langle V'W' \rangle}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

$$F = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad Q = \langle W'W' \rangle - \langle V'V' \rangle, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.4)$$

Здесь V , W и V' , W' – средние и пульсационные скорости в направлениях y , z , угловые скобки обозначают осреднение по статистическому ансамблю. Скорость вдоль потока U непосредственно не входит в уравнения для поперечного движения, ее влияние осуществляется через распределения рейнولدсовых напряжений.

Если течение статистически однородно в направлении z , то $\langle V'W' \rangle = 0$, а сила F в правой части (2.1) зависит только от y и поэтому не вызывает поперечного движения, уравниваясь соответствующим распределением давления. В случае неподвижной стенки решение уравнений (2.1)–(2.4) отвечает состоянию покоя: $V = W = 0$. Однако, как показано в [7], если предположить, что движение в поперечной плоскости вызывает перенос напряжения Рейнольдса, то состояние покоя оказывается неустойчивым к малым возмущениям для типичных распределений $Q(y)$ в пристенных областях турбулентных течений. Возбуждающееся в результате неустойчивости движение в поперечной плоскости имеет вид циркуляционных ячеек. В трехмерном течении это соответствует продольным вихрям, характерные размеры которых согласуются с экспериментальными данными.

В рассматриваемом случае осциллирующей стенки уравнения (2.1)–(2.4) с граничными условиями

$$V = 0, \quad W = W_w \sin(\omega t), \quad y = 0; \quad V = 0, \quad W = 0, \quad y = \infty$$

имеют периодическое решение – течение Стокса: $V = 0$ и

$$W(t, y) = W_w e^{-\gamma y} \sin(\omega t - \gamma y), \quad \gamma = \sqrt{\omega/2} \quad (2.5)$$

Следуя [7], рассмотрим устойчивость решения (2.5) уравнений (2.1)–(2.4) при $\langle V'W' \rangle = 0$ в предположении, что возмущение q разности напряжений Рейнольдса Q описывается уравнением переноса с вязкой диффузией. В линейном приближении уравнения для возмущений имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + W \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} - \Delta v = \frac{\partial q}{\partial y} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - \Delta w = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v \frac{dq}{dy} + W \frac{\partial q}{\partial z} - \Delta q = 0 \quad (2.9)$$

Ограничимся рассмотрением небольших скоростей осцилляций стенки, при которых можно пренебречь изменением в распределении $Q(y)$ по сравнению со случаем неподвижной стенки. Как показано в [7], функция dQ/dy может быть аппрок-

симпирована выражением

$$\frac{dQ}{dy} = A \frac{y(1-y/18)}{(1+y/10)^3 [1+(y/30)^4]}, \quad A = A(\text{Re}) \sim 0,03 - 0,2 \quad (2.10)$$

Система (2.5)–(2.10) с нулевыми граничными условиями для v , w и q при $y = 0$ и ∞ представляет собой задачу с периодическими коэффициентами. Ее периодические по z собственные решения имеют вид

$$f(t, y, z) = \text{real}[g(t, y)e^{i\beta z}] \quad (2.11)$$

где f обозначает каждую из искомых функций. В силу теоремы Флоке [11]

$$g(t, y) = h(t, y)e^{\lambda t}, \quad h(t + 2\pi/\omega, y) = h(t, y)$$

При заданных $W(t, y)$ и dQ/dy коэффициент роста возмущений σ определяется как максимум $\text{real}(\lambda)$ по всем действительным β .

Задача (2.5)–(2.11) решалась численно. Производные по y от искомых функций аппроксимировались конечно-разностным способом на отрезке $y \in [0, Y]$. Значение Y и число узлов сетки увеличивались при необходимости до установления значений σ с тремя знаками. Применялось два вида условий на внешней границе расчетной области: $v = w = q = 0$ и $v = \partial w/\partial y = \partial q/\partial y = 0$. При $Y > 100$ и выбранной точности определения σ оба способа оказались эквивалентными.

После представления искомых функций в виде (2.11), дискретизации уравнений по y и исключения давления задача сводится к отысканию собственных решений системы обыкновенных линейных уравнений

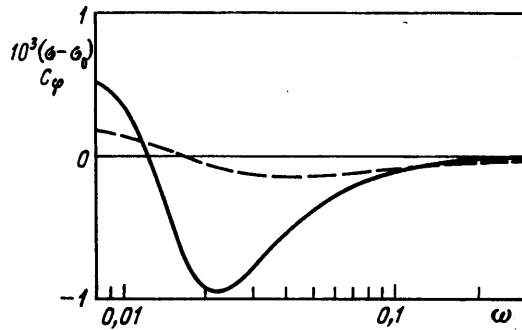
$$\frac{dG}{dt} = C(t)G$$

где G – вектор размерности $2M$ (M – число узлов разностной сетки) и $C(t)$ – квадратная матрица с периодическими коэффициентами. Согласно теории Флоке [11], искомые собственные значения определяются как $\lambda = \ln \mu$, где μ – собственные числа матрицы монодромии H : $H = B(2\pi/\omega) \cdot B(t)$ – матрица фундаментальных решений, определяемая из задачи Коши (E – единичная матрица)

$$\frac{dB}{dt} = C(t)B, \quad B(0) = E \quad (2.12)$$

Интегрирование (2.12) проводилось методом Рунге–Кутты 3-го порядка точности. На фиг. 3 представлены результаты вычислений $\sigma(\omega)$ по описанной выше процедуре, полученные при $W_w = 0,5$ и $A = 0,1$. На график нанесены значения $\sigma - \sigma_0$, где $\sigma_0 = 0,00338$ – коэффициент нарастания возмущений над неподвижной стенкой. Полученный результат показывает качественное согласие теории возбуждения продольных вихрей с результатами численного моделирования [1]. При низких частотах осцилляции стенки усиливают рост вихрей, при высоких – ослабляют. При очень высоких частотах эффект пропадает. Аналогичное поведение наблюдается в зависимости напряжения трения на стенке плоского канала от частоты осцилляции стенки (фиг. 1), хотя значения характерных частот заметно различаются. Следует учитывать, однако, что процесс формирования турбулентного трения определяется не только скоростью генерации продольных вихрей, но и многими другими факторами.

Пространственный период в направлении z , отвечающий возмущениям с наибольшим коэффициентом нарастания $L_z = 2\pi/\beta$, в осциллирующих течениях несколько больше, чем в случае неподвижной стенки, где он равен 77,0. Это отличие уменьшается с ростом частоты осцилляции. Так, если $L_z = 83,1$ при $\omega = 0,008$ и 80,3 при $\omega = 0,012$, то $L_z = 77,5$ при $\omega = 0,06$ и 77,1 при $\omega = 0,15$.



Фиг. 3. Зависимости от частоты осцилляций стѣнки коэффициента нарастания продольных вихрей σ ($\sigma_0 = 3,38 \cdot 10^{-3}$ соответствует неподвижной стенке) – сплошная линия и коэффициента C_φ (3.1) – штриховая линия

3. Механизм воздействия периодического поперечного движения на продольные вихри. Каким образом поперечное движение жидкости, вызванное осцилляциями стѣнки, меняет скорость роста продольных вихрей? Для ответа на этот вопрос рассмотрим уравнение для кинетической энергии возмущений

$$E(t) = \int_0^\infty dy \int_0^{L_z} \frac{v^2 + w^2}{2} dz$$

Умножая (2.6) на v , (2.7) на w и складывая полученные выражения, получим после интегрирования

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -D + P + \Pi$$

$$D(t) = \int_0^\infty dy \int_0^{L_z} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] dz$$

$$P(t) = \int_0^\infty dy \int_0^{L_z} v \frac{\partial q}{\partial y} dz$$

$$\Pi(t) = - \int_0^\infty \frac{\partial W}{\partial y} dy \int_0^{L_z} v w dz$$

Величина $D(t)$ представляет собой вязкую диссипацию энергии, $P(t)$ – производство энергии за счет возмущений напряжений Рейнольдса и $\Pi(t)$ – генерацию кинетической энергии продольных вихрей поперечным течением Стокса. Последняя величина может быть как положительная, так и отрицательная в зависимости от соотношения знаков $\partial W / \partial y$ и

$$\int_0^{L_z} v w dz$$

Знак последнего интеграла определяется наклоном линий равной фазы возмущений скорости в плоскости (y, z) . В самом деле, в соответствии с (2.11) можно записать

$$v(t, y, z) = A_y \cos[\beta(z - \varphi)]$$

где $A_v(t, y)$ и $\varphi(t, y)$ – амплитуда и фаза. Тогда из (2.8) следует

$$w(t, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} A_v \cos[\beta(z - \varphi)] - \beta^{-1} \frac{\partial A_v}{\partial y} \sin[\beta(z - \varphi)]$$

Отсюда видно, что

$$\int_0^{L_z} v w dz = 0, 5 A_v^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

т.е. знак этого интеграла совпадает со знаком $\partial \varphi / \partial y$. Для фиксированного момента времени на данном расстоянии y от стенки вклад в $\Pi(t)$ будет положительным, если $\partial W / \partial y$ и $\partial \varphi / \partial y$ имеют противоположные знаки или, другими словами, наклон линий равной фазы возмущений скорости совпадает с наклоном профиля $W(y)$. Таким образом, согласованность наклона линий равной фазы с градиентом поперечной скорости является определяющим условием усиления продольных вихрей. Можно предположить, что указанная согласованность будет иметь место при низких частотах.

Среднее за период осцилляций $T = 2\pi/\omega$ значение Π определяет усиление или ослабление вихрей поперечным движением. В качестве количественной меры согласованности наклона вихрей в плоскости (y, z) с градиентом скорости поперечного движения можно взять величину

$$C_\varphi = \frac{(f, g)}{\|f\| \|g\|} \quad (3.1)$$

$$f(t, y) = -e^{-2\sigma t} \int_0^{L_z} v w dz, \quad g(t, y) = \frac{\partial W}{\partial y}$$

$$(f, g) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^\infty f g dy, \quad \|f\|^2 = (f, f) \quad (3.2)$$

Величина C_φ имеет смысл косинуса угла между двумя векторами в пространстве периодических функций со скалярным произведением (3.2). Представляется, что эта величина должна более объективно характеризовать влияние поперечного движения на продольные вихри, т.е. меньше зависеть от конкретного механизма возбуждения вихрей.

Результаты расчета C_φ приведены на фиг. 3. Зависимость $C_\varphi(\omega)$, сохраняя качественный вид графика $\sigma(\omega) - \sigma_0$, по значениям характерных частот лучше согласуется с зависимостью $\tau_w(\omega)$, полученной в [1].

Заключение. Прямое численное моделирование турбулентного течения в трубе кругового сечения с наложенными периодическими вращательными осцилляциями показало ослабление интенсивности турбулентных пульсаций и понижение коэффициента продольного трения.

Наибольшее понижение трения для фиксированной амплитуды скорости осцилляций стенки наблюдается при частоте $\omega^+ = 0,06$. Этот результат согласуется с ранее проведенными расчетами течений в плоском канале [1]. При фиксированной частоте эффект усиливается с ростом амплитуды осцилляций (в рассмотренных вариантах при $Re = 4000$ и $\omega^+ = 0,06$ вплоть до реламинаризации течения).

В отличие от [1], где при малых частотах осцилляций стенки в плоском канале было отмечено повышение турбулентного трения, в рассмотренных течениях в трубе такое повышение не обнаружено. Это отличие может объясняться влиянием центробежных сил, отсутствующих в плоском канале.

Механизм подавления турбулентности боковыми осцилляциями стенки может заключаться в противодействии поперечного осциллирующего движения жидкости

возбуждению продольных вихрей. Применение теории [7] возбуждения продольных вихрей в пристенных турбулентных течениях к случаю осциллирующей стенки дает результаты, качественно согласующиеся с результатами [1]: поперечное течение Стокса усиливает скорость роста продольных вихрей при низких частотах осцилляций стенки и ослабляет при высоких частотах.

Ослабление продольных вихрей происходит вследствие рассогласованности наклона линий равной фазы вихрей в поперечной к потоку плоскости и градиента скорости осциллирующего движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-01095).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jung W.J., Mangiavacchi N., Akhavan R. Suppression of turbulence in wall-bounded flows by high-frequency spanwise oscillations // Phys. Fluids A. 1992. V. 4. № 8. P. 1605–1607.
2. Laadhari F., Skandaji L., Morel R. Turbulence reduction in a boundary layer by a local spanwise oscillating surface // Phys. Fluids. 1994. V. 6. № 10. P. 3218–3220.
3. Kim H.T., Kline S.J., Reynolds W.C. The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 1971. V. 50. Pt 1. P. 133–160.
4. Klebanoff P.S., Tidstrom K.D., Sargent L.M. The three-dimensional nature of boundary-layer instability // J. Fluid Mech. 1962. V. 12. Pt 1. P. 1–34.
5. Hamilton J.M., Kim J., Waleffe F. Regeneration mechanisms of nearwall turbulence structures // J. Fluid Mech. 1995. V. 287. P. 317–348.
6. Sendstad O., Moin P. On the mechanism of 3-D turbulent boundary layer // Proc. 8th Symp. Turbulent Shear Flows. Munich, Germany: Techn. Univ., 1991. V. 1. P. 5–41.
7. Никитин Н.В., Чернышенко С.И. О природе организованных структур в турбулентных пристенных течениях // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 1. С. 24–30.
8. Никитин Н.В. Спектрально-конечно-разностный метод расчета турбулентных течений несжимаемой жидкости в трубах и каналах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 6. С. 909–925.
9. Никитин Н.В. Статистические характеристики пристенной турбулентности // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 3. С. 32–43.
10. Никитин Н.В. Прямое численное моделирование трехмерных турбулентных течений в трубах кругового сечения // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 6. С. 14–26.
11. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.XI.1998