

УДК 532.546:536.42

© 2000 г. М.Б. ПАНФИЛОВ, Н.Н. ШИЛОВИЧ

**ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТЕЙ С СИЛЬНО РАЗЛИЧАЮЩИМИСЯ  
ПОДВИЖНОСТЯМИ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ:  
ЯВЛЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ, ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ  
ФАЗОВЫЕ СТРУКТУРЫ, НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ**

Для двух жидкостей с сильно различающимися (контрастными) подвижностями предложена модель фильтрации с фазовыми переходами, которая допускает эффективное качественное исследование. Показано, что модельная задача течения к единичному стоку является сингулярно возмущенной и может быть решена аналитически методами сращения асимптотик. Природа сингулярности связана с нарушением условия контрастности течения в отдельных зонах. Решение может быть неустойчивым, в зависимости от направления межфазного массообмена и зоны протекания процесса.

Многие процессы в гидрологии и нефтяной инженерии приводят к задачам двухфазного течения с "распределенными" в пространстве фазовыми переходами в пористой среде, происходящими не на отдельной поверхности, как, например, в классической задаче Стефана, а в пространственной области. Это имеет место всегда, когда жидкость состоит из нескольких химически различных компонентов. Типичными примерами являются выделение газа при течении нефти, углеводородного конденсата при течении природного газа, образование твердой серы при фильтрации сероводородосодержащего газа, выделение кислых газов при течении минерализованных растворов подземной воды и др. Во всех этих случаях новая фаза образуется в достаточно малых количествах, при которых ее фильтрация в пористой среде затруднена. В силу этого подвижности фаз сильно различаются, т.е. оказываются контрастными.

Основная проблема заключается в следующем. При контрастных подвижностях фаз неизбежно их относительное движение. В результате этого в любом элементарном объеме порция новой фазы, образовавшейся согласно условиям равновесия, быстро выводится в соседний объем, где оказывается в неравновесных условиях, что в свою очередь порождает вновь фазовый переход для установления нового состояния равновесия. В итоге относительное движение фаз вызывает дополнительный межфазный массообмен, который назван конвективным [1]. В системах с контрастными подвижностями фаз роль конвективного массообмена становится определяющей в формировании законов распределения насыщенностей фаз, которое в связи с этим оказывается зависящим от скорости течения и не имеет ничего общего с тем, что следует ожидать из чистой термодинамики.

Качественная теория течений подобного рода в настоящее время не разработана, хотя ранее в [1–3] на частном примере фильтрации газоконденсатной смеси было показано, что в системах подобного типа возможны новые эффекты.

В настоящей работе предлагается обобщенная эффективная модель течения с контрастными подвижностями, позволяющая проводить качественное исследование особенностей процесса, и на ее базе изучена задача возмущения изначально однофазной покоящейся жидкости, сопровождающегося фазовым переходом. Внимание кон-

центрируется на четырех новых результатах: явлении логарифмического дробно-степенного пограничного слоя, типичной моделью которого оказывается исследуемая задача; образовании пространственных фазовых структур вокруг источника возмущения; свойстве скейлинговой инвариантности решений и существовании режимов неустойчивого течения, порождающих осциллирующие в пространстве структуры, развивающиеся во времени. Неустойчивость автомодельных и стационарных решений может возникать в зоне, где фазовый переход имеет обратную чем в остальной области направленность.

**1. Характеристика исследуемых смесей.** Рассмотрим смесь, состоящую из  $N$  химических компонентов, способных образовать две различные фазы, между которыми существует поверхность раздела. Фазы будем подразделять на первичную ( $A$ ), изначально существовавшую в системе, и вторичную ( $B$ ), появляющуюся после внесения возмущения (понижения давления).

Для описания двухфазного течения используем феноменологический подход [4–6], полагая, что смесь всегда хорошо перемешана, а межфазная поверхность раздела рассеяна в пространстве, например, в форме системы менисков в отдельных порах. Следствием гипотезы хорошо перемешанной смеси является условие локального равновесия ее фазового состояния.

Рассмотрим подземный пласт, характеризуемый обычно изотермическими условиями. Вполне закономерно пренебрежение капиллярными силами, так как вблизи точки начала фазового перехода фазы обладают достаточно близкими свойствами и поверхностное натяжение сравнительно мало. Будем считать, что компонентный состав смеси удовлетворяет следующим пяти условиям.

1. Смесь многокомпонентна (химических компонент не менее двух). Вследствие этого двухфазным состояниям на фазовой диаграмме отвечает невырожденная область, так что смесь может пребывать в двухфазном состоянии в некотором диапазоне давлений. Существование двухфазных состояний означает, что при фазовом переходе лишь часть фазы переходит в другую.

2. Компоненты делятся на три класса, различающихся по их отношению к фазовому состоянию:  $A$ -образующие,  $B$ -образующие и "промежуточные".  $A$ -образующие – те, которые доминируют в фазе  $A$ . К ним относятся те компоненты, которые в чистом виде в данных термодинамических условиях существуют в виде фазы  $A$ . Они доминируют в фазе  $A$ . Для  $B$ -образующих – аналогично. Для газожидкостных систем понятия  $A$ - и  $B$ -образующих компонентов эквивалентны понятиям "летучий" и "тяжелый". Наряду с ярко выраженными  $A$ - и  $B$ -образующими компонентами может существовать ряд промежуточных, которые нейтральны к фазовому состоянию и потому более-менее равномерно распределяются по обоим фазам.

Для определенности  $A$ -образующим компонентам присвоим номера от 1 до  $N_A$ , а  $B$ -образующим – от  $N_B$  до  $N$ , где  $N_B \geq N_A + 1$ . По определению  $A$ - и  $B$ -образующие компоненты не могут быть одинаковыми, иначе они попадают в класс нейтральных к фазовому состоянию. Промежуточные компоненты могут не выделяться в отдельный класс, а произвольным образом быть включены в число  $A$ - или  $B$ -образующих. Это наводит на мысль о том, что система близка по свойствам к псевдобинарной, в которой все  $A$ -образующие компоненты плюс произвольная часть нейтральных формируют  $A$ -образующий псевдокомпонент (I), а все  $B$ -образующие компоненты плюс оставшаяся часть нейтральных формируют  $B$ -образующий псевдокомпонент (II).

3.  $A$ - и  $B$ -образующие компоненты являются доминирующими компонентами соответствующих фаз. Доминирование компонентов в фазах означает, что  $A$ -образующих компонентов мало в фазе  $B$ ,  $B$ -образующих мало в фазе  $A$ , а нейтральных мало в обеих фазах. Это допущение исключает тот достаточно редкий на практике случай, когда каждая фаза содержит достаточно много промежуточных компонентов. Тогда составы фаз наполовину одинаковы, их свойства оказываются неконтрастными.

4. Будем считать, что *B*-образующих компонентов в смеси мало. Следовательно, новая фаза будет образовываться в малых количествах и ее фазовая проницаемость много меньше, чем у другой фазы. Это свойство весьма существенно в рамках данной работы, так как является достаточным условием контрастного течения. Под контрастным течением понимаем течение с контрастными подвижностями фаз. Указанное условие означает, что контрастность обеспечивается не столько различием вязкостей фаз, сколько различием фазовых проницаемостей.

5. Компоненты химически взаимно нейтральны. Это допущение необязательно и вводится только для того, чтобы исследовать фазовый переход в чистом виде. Из него следует, что новые химические компоненты в смеси не образуются, старые не уничтожаются и баланс массы каждого компонента независим. Это допущение вовсе не исключает из рассмотрения системы с химическими реакциями, если в них ввести понятия вседокомпонентов. Существенное следствие – возможность пренебречь диффузией компонентов внутри каждой фазы, если нет иных источников возникновения аномалий концентраций.

Приведем примеры систем, удовлетворяющие всем перечисленным свойствам.

Течение газоконденсатных смесей к скважине в природном пласте, при котором из газа (фаза *A*), изначально насыщающего пласт, образуется жидкий углеводородный конденсат (фаза *B*) в результате ретроградного фазового перехода. Каждая фаза состоит из одинакового набора *N* компонентов парафинового ряда и малых добавок азота, сероводорода, углекислоты и водорода. Доминирующими компонентами газовой фазы являются метан, этан. Доминирующими компонентами жидкой фазы являются более тяжелые углеводороды, начиная с пентана. Промежуточные компоненты (пропан, бутан) нейтральны к фазовому состоянию.

Течение нефти (фаза *A*) с высвобождением растворенного газа (фаза *B*). Смесь состоит из компонентов парафинового ряда, ароматических углеводородов, смолистых веществ. Доминирующими компонентами жидкой фазы являются тяжелые парафины, а газовой – метан.

Течение минерализованной воды в горных породах к разгрузочной трещине с образованием насыщенных солевых или кислотных растворов (фаза *A*) и газа из летучих кислот (фаза *B*). Поскольку происходят химические реакции (типа "вода + газ = кислород + кислород"), система может быть рассмотрена в рамках псевдобинарной модели. Тогда *A*-образующий псевдокомпонент является смесью газа и кислорода, а *B*-образующий псевдокомпонент представлен водой и кислотой.

Течение природного газа (фаза *A*), содержащего сероводород, с формированием твердой серы (фаза *B*). В системе происходит химическая реакция между сероводородом и железистыми соединениями вмещающих пород с образованием окислов железа, чистой серы и водорода. *A*-образующим псевдокомпонентом является смесь углеводородных компонентов природного газа, сероводорода и водорода, *B*-образующий компонент представлен твердой серой.

**2. Уравнения процесса.** При допущениях о химической нейтральности компонентов и изотермичности процесса достаточны уравнения сохранения массы каждого химического компонента и импульсы каждой фазы [4–6]. Как обычно, пренебрегаем обменом импульсом при фазовых переходах в пористой среде [5], поэтому уравнения импульса имеют вид закона Дарси.

Будем использовать верхний индекс *k* для *k*-го химического компонента и нижний индекс *i* для *i*-фазы (*i* = *A*, *B*). Через  $c_i^k$  будем обозначать массовую концентрацию *k*-го компонента в *i*-й фазе, через  $\eta_k$  массовую концентрацию *k*-го компонента в смеси в целом. Уравнения сохранения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\varphi_B c_B^k s + \varphi_A c_A^k (1-s)) = \operatorname{div} \left( \left[ \psi_B c_B^k f_B + \frac{1}{\omega} \psi_A c_A^k f_A \right] \operatorname{grad} p \right), \quad k = 1, \dots, N \quad (2.1)$$

$$\varphi_i = \frac{\rho_i}{\rho_A^0}, \quad \Psi_i = \frac{\rho_i \mu_i^0}{\rho_i^0 \mu_i}, \quad p = \frac{P}{P^0}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad \tau = \frac{t}{t^*},$$

$$t^* = \frac{L^2 m \mu_B^0}{K k_i^0 P^0}, \quad f_i = \frac{k_i}{k_i^0}, \quad \omega = \frac{\rho_B^0 \mu_A^0 k_B^0}{\rho_A^0 \mu_B^0 k_A^0}$$

Здесь операторы  $\text{div}$  и  $\text{grad}$  выполняются в переменных  $x$ ;  $s$  – объемная насыщенность пор фазой  $B$ ,  $c_i^k$  – весовая концентрация  $k$ -го компонента в  $i$ -фазе,  $k(s)$  – относительная фазовая проницаемость,  $m$ ,  $K$  – пористость и проницаемость среды,  $X$  – размерный вектор пространственных координат,  $t$ ,  $P$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  – размерные время, давление, плотность, динамическая вязкость,  $L$  – характерный линейный размер области. Величины  $k_i^0$  – характерные средние для данного процесса значения относительных проницаемостей, в остальных случаях верхний индекс "градус" ассоциирован с начальным состоянием системы.

Для определенности будем считать процесс выпадения фазы  $B$  из фазы  $A$  основным направлением фазового перехода.

Независимыми переменными (базисными) системы  $N$  уравнений являются давление  $p$  и  $N - 1$  базисных концентраций компонентов в фазах либо давление  $p$ , насыщенность  $s$  и  $N - 2$  базисных концентраций. Базисные концентрации обозначены как  $\chi^q$  и выбираются произвольно. Обычно удобно их выбрать равными концентрациям  $N - 2$   $A$ -образующих компонентов в фазе  $A$ :  $\chi^q \equiv c_A^q$ .

В общем случае многокомпонентной смеси оставшиеся концентрации вместе с вязкостями и плотностями фаз являются функциями  $N$  базисных переменных

$$F = F(p, \eta^1, \eta^2, \dots, \eta^{N-1}) \quad (2.2)$$

где под функцией  $F$  понимается любая из перечисленных выше величин.

Зависимости (2.2) определяются из замыкающих соотношений, в качестве которых выступает система уравнений фазового равновесия

$$v_A^k(p, c_A^1, c_A^2, \dots, c_A^{N-1}) = v_B^k(p, c_B^1, c_B^2, \dots, c_B^{N-1}), \quad k = 1, \dots, N \quad (2.3)$$

где  $v_i^k$  – химический потенциал  $k$ -го компонента в  $i$ -фазе. Кроме того, принимается, что  $m = \text{const}$ ,  $K = \text{const}$ ,  $k_i = k_i(s)$ .

Концентрации в фазах и полные концентрации смеси связаны соотношениями

$$\eta^j = \frac{\Phi_B c_B^j s + \Phi_A c_A^j (1-s)}{\Phi_B s + \Phi_A (1-s)}, \quad j = 1, \dots, N-1 \quad (2.4)$$

Зависимости (2.2), (2.3) для смесей описанного типа упрощаются. Разложим соотношения (2.3) по малым концентрациям  $B$ -образующих компонентов в фазе  $A$  и  $A$ -образующим компонентам в фазе  $B$ , тогда в главном приближении получим

$$v_{A0}^k(p, c_A^1, c_A^2, \dots, c_A^{N_A}) = v_{B0}^k(p, c_B^{N_B}, c_B^{N_B+1}, \dots, c_B^{N_B}) + o \dots, \quad (2.5)$$

$$k = 1, \dots, N_A, N_B, \dots, N$$

$$v_{A0}^k \equiv v_A^k(p, c_A^1, c_A^2, \dots, c_A^{N_A}, 0, \dots, 0), \quad v_{B0}^k \equiv v_B^k(p, 0, \dots, 0, c_B^{N_B}, c_B^{N_B+1}, \dots, c_B^{N_B})$$

где через  $o \dots$  обозначены малые второго порядка.

Отметим, что  $N_A + N - N_B + 1$  уравнений (2.4) содержат  $N_A + N - N_B + 2$  переменных  $p, c_A^1, c_A^2, \dots, c_A^{N_A}, c_B^{N_B}, c_B^{N_B+1}, \dots, c_B^{N_B}$ . В силу этого система содержит одну независимую переменную. Поэтому вместо (2.2) выполняется асимптотически  $F = F(p) +$

+  $o \dots$ , где под функцией  $F$  понимаются плотности фаз, концентрации компонентов в фазах и вязкости. Таким образом, система действительно близка к бинарной.

В силу свойства контрастности подвижностей фаз параметр  $\omega \ll 1$ .

**3. Модель контрастного течения с фазовым переходом.** Уравнения (2.1) могут быть упрощены, если учесть описанные ранее свойства смеси. Просуммируем (2.1) по всем компонентам

$$\operatorname{div}[(\psi_A f_A \operatorname{grad} p + \omega \psi_B f_B) \operatorname{grad} p] = \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \quad (3.1)$$

$$\varphi \equiv \varphi_B s + \varphi_A (1 - s), \quad \Delta c^k \equiv c_B^k - c_A^k$$

Умножим уравнение (3.1) на  $c_A^k$ , вычтем полученный результат из  $k$ -го уравнения системы (2.1) и просуммируем полученные уравнения по всем  $A$ -образующим компонентам

$$\begin{aligned} (\eta^l - c_A^l) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \varphi \frac{\partial \eta^l}{\partial \tau} = \Delta c^l \operatorname{div}(\psi_B f_B \operatorname{grad} p) + \\ + \operatorname{grad} p \left[ \frac{1}{\omega} \psi_A f_A \operatorname{grad} c_A^l + \psi_B f_B \operatorname{grad} c_B^l \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для упрощения модели используем свойство контрастности течения.

В силу  $1 \ll \omega$  вторым слагаемым в квадратных скобках уравнений (3.1), (3.2) можно пренебречь. Пренебрегать другими составляющими уравнений некорректно, так как они выражаются через операторы другого типа либо другого порядка.

Согласно следствию свойства контрастности 5 (разд. 1), насыщенности новой фазы малы. При малых  $s$  из (2.4) следует:

$$\eta^k = c_A^k + s \frac{\varphi_B \Delta c^k}{\varphi_A} + O(s^2) \quad (3.3)$$

Учтем (2.5). Модель контрастного течения многокомпонентной смеси принимает вид системы двух уравнений относительно давления  $p$  и насыщенности  $s$

$$\operatorname{div}(\psi_A f_A \operatorname{grad} p) \equiv \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial (\varphi_B \Delta c^l s)}{\partial \tau} - \varphi_A \frac{\partial \eta^l}{\partial \tau} + \Delta c^l \operatorname{div}(\psi_B f_B \operatorname{grad} p) + \lambda_1(p, s)(\operatorname{grad} p)^2 \quad (3.5)$$

$$\lambda_1(p, s) \equiv \frac{1}{\omega} \psi_A(p) f_A(s) c_{Ap}'(p)$$

С учетом (2.5) эта система замкнута.

Концентрации компонентов определяются после определения давления и насыщенности из системы уравнений, получаемой вычитанием (3.2) из оставшихся уравнений (2.1)

$$\varphi \left( \frac{1}{\Delta c^k} \frac{\partial c_A^k}{\partial \tau} - \frac{1}{\Delta c^N} \frac{\partial c_A^N}{\partial \tau} \right) \equiv \frac{1}{\omega} \psi_A f_A \operatorname{grad} p \left[ \frac{1}{\Delta c^k} \operatorname{grad} c_A^k - \frac{1}{\Delta c^N} \operatorname{grad} c_A^N \right], \quad (3.6)$$

$$k = 2, \dots, N_A$$

Величина  $\lambda_1(p, s)$  характеризует интенсивность фазового перехода за счет изменения давления.

Уравнение (3.5) имеет прозрачный физический смысл. Локальные изменения массовой насыщенности фазы  $B$  могут происходить за счет четырех основных факторов:

локального изменения во времени давления и состава смеси (первое слагаемое справа), течения этой фазы (второе слагаемое), конвективного массообмена первого рода – за счет пространственных изменений давления (третье слагаемое). В более общем случае возможен и конвективный массообмен второго рода – за счет пространственных вариаций суммарного состава смеси или, что то же, смещения фазовой диаграммы.

Под конвективным массообменом понимается процесс фазового перехода, вызванный движением фаз. Конвективный массообмен первого рода связан с тем, что смесь перетекает из одной точки с высоким давлением в точку с более низким давлением, за счет чего в ней происходит фазовое превращение. Этот тип фазового перехода вызван градиентами давлений.

Рассмотрим одномерную задачу возмущения изначального однофазного флюида, соответствовавшего фазе А, в цилиндрической области толщиной  $H$ . Возмущение вносится за счет непрерывного отбора флюида с постепенным массовым расходом  $G$  из центра координат.

Численные эксперименты, проведенные в [1], показали, что функции  $\varphi_B \Delta c^k$  достаточно консервативны и при малых возмущениях системы подвержена значительно меньшим относительным изменениям, нежели насыщенность. Поэтому можно в (3.5) вынести ее из-под знака производной. Изменения насыщенности, вызванные локальными производными по времени от параметров состояния, играют роль только в очень удаленной от точки возмущения зоне [7], поэтому ими можно пренебречь.

Тогда в радиальной системе координат в рамках модели (3.4), (3.5) имеем задачу

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Psi_A f_A r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \quad (3.7)$$

$$\varphi_B \Delta c^l \frac{\partial s}{\partial \tau} = \Delta c^l \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Psi_B f_B r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \lambda_1(p, s) \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 \quad (3.8)$$

$$p = 1, \quad s = 0, \quad \tau = 0, \quad r \rightarrow \infty$$

$$\left( \varphi_A f_A r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r \rightarrow 0} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \varepsilon = G \mu_A^\circ / (\pi H k m k_A^\circ \rho_A P^\circ) \quad (3.9)$$

Условие (3.9) означает, что задан постоянный во времени дебит скважины  $G$ . Параметр  $\varepsilon$  характеризует интенсивность возмущения пласта. Возмущение считается малым, поэтому  $\varepsilon \ll 1$ . Процесс извлечения нефти, газа или воды из подземного пласта скважинами всегда характеризуется малой величиной  $\varepsilon$  ( $\approx 10^{-4} - 10^{-2}$ ) [7]. В последнем условии (3.9) отброшены малые члены порядка  $\omega$ .

Если коэффициенты уравнения (3.8) не зависят от давления, то для исключения давления достаточно определить  $\partial p / \partial r$ . Это легко сделать, если в (3.7) пренебречь производной в правой части, которая имеет порядок  $\omega$ . Тогда получим  $\partial p / \partial r = \varepsilon / 2$ . Задача для насыщенности примет вид

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial f_B(s)}{\partial r} + \frac{\lambda \varepsilon^2 f_A}{r^2}, \quad s|_{\tau=0} = 0 \quad (3.10)$$

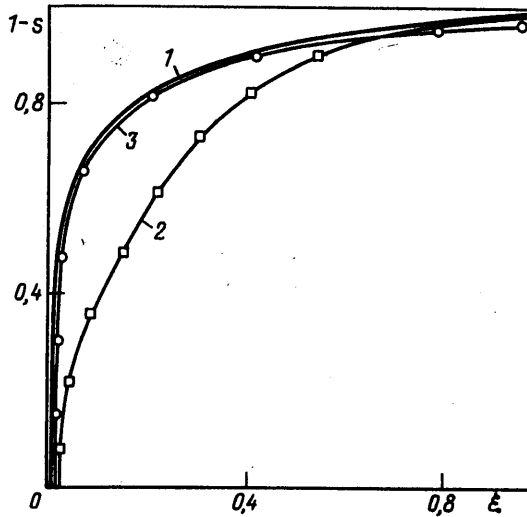
Интенсивность фазового перехода  $\lambda$  будем считать постоянной.

Задача Коши (3.10) для уравнения конвективного переноса с затуханием корректна при следующих аппроксимациях фазовых проницаемостей:

$$f_A = 1 - s, \quad f_B \approx \Lambda s^\beta, \quad s \rightarrow 0; \quad \beta > 1 \quad (3.11)$$

Ее решение автомодельно, так что  $s = s(\xi)$ ,  $\xi = r / \sqrt{\tau}$ . Тогда (3.10) примет вид

$$(\xi^3 + \varepsilon \gamma \xi s^{\beta-1}) \frac{ds}{d\xi} = -2\lambda \varepsilon^2 (1 - s), \quad \xi \in \Omega = \{\xi > 0\}; \quad s(\infty) = 0; \quad \beta > 1; \quad \omega = \Lambda \beta \quad (3.12)$$



Фиг. 1. Иллюстрация явления перерождения типа особенности: 1 – точное решение (4.2) с точкой ветвления в  $\xi = 0$ ; 2 – разложение при  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\xi = O(1)$ ; 3 – разложение при  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\xi = O(\Delta(\epsilon))$

**4. Внешнее разложение. Перерождение типа особенности.** Построим асимптотическое разложение решения задачи (3.12) при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Разложение при  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow O(1)$  названо внешним (индекс *ex*); разложение при  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow 0$  называется внутренним, или разложением в пограничном слое (индекс *in*). Обычная техника метода возмущений дает

$$s_{ex}(\xi; \epsilon) = \frac{\lambda \epsilon^2}{\xi^2} - \frac{2\gamma \lambda^\beta \epsilon^{2\beta+1}}{2(\beta+1)\xi^{2(\beta+1)}} + o(\epsilon^{2\beta+1}) \quad (4.1)$$

Решение задачи (3.12) при  $\xi = 0$  имеет точку ветвления и ведет себя как

$$s \approx 1 - \xi^{2\lambda\epsilon/\gamma}, \quad \xi \rightarrow 0, \quad \forall \epsilon \quad (4.2)$$

оставаясь к тому же ограниченным.

Формальное разложение по степеням параметра  $\epsilon$  имеет вид (4.1) со следующим пределом:

$$s \approx \frac{\lambda \epsilon^2}{\xi^2}, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \xi = O(1) \quad (4.3)$$

Функция (4.3) определена во всей области  $\Omega$ , а точка  $\xi = 0$  является для нее полюсом. В итоге смена последовательности предельных переходов приводит к перерождению типа особенности решений. Точка ветвления для  $s(\xi; \epsilon)$  при переходе  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow 0$  переходит в полюс при  $\xi \rightarrow 0$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Следовательно, обычный ряд возмущений сходится неравномерно, поэтому задача сингулярно возмущена [8].

Фигура 1 иллюстрирует поведение точного решения (4.2) (кривая 1) и формального разложения (4.1) (кривая 2). Разложение в степенной ряд по  $\epsilon$  не сходится к точному решению в пограничном слое вблизи особой точки.

Перерождение типа особенности отличается от классических типов явления пограничного слоя, известных в механике жидкости. Первое из них соответствует экспо-

ненициальному пограничному слою [7, 9–12], который в теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений порождается наличием малого параметра перед старшей производной.

Второй тип известен как степенной пограничный слой, впервые описанный на физическом уровне строгости как модельная задача Пуанкаре – Лайтхилла – Го [11]. Строго он изучался в [8]. Явление вызвано наличием перед старшей производной суммы  $(\xi - \epsilon)$ . Точное решение имеет особенность в точке  $\xi = \epsilon$ , тогда как в формальном асимптотическом разложении происходит сдвиг особенности в точку  $\xi = 0$ .

Как видно, перерождение типа особенности вызвано появлением множителя  $(\xi^{k+1} + \epsilon\xi)$ ,  $k > 1$ , перед старшей производной.

**5. Разложение в пограничном слое. Сращивание разложений.** Масштаб пограничного слоя  $\Delta(\epsilon)$  может быть найден следующим путем.

Если  $\xi \rightarrow 0$ , то член  $\xi^3 s'$  является главным в левой части (3.12), тогда как в формальном разложении (4.1) главным является слагаемое  $\epsilon \gamma \xi s^{\beta-1} s'$ . Поэтому разложение (4.3) становится некорректным начиная с зоны, где оба слагаемых в левой части (3.12) оказываются одного порядка. Размер этой зоны и является размером пограничного слоя. Тогда, вводя новую переменную  $\zeta = \xi/\Delta(\epsilon)$ , имеющую порядок единицы в пограничном слое, и записывая главный член внутренней асимптотики как  $s(\zeta \cdot \Delta) \approx \delta(\epsilon) s_1(\zeta)$ , получим  $\Delta^3 = \Delta \epsilon \delta^{\beta-1}$ . Второе необходимое условие вытекает, если приравнять порядок левой и правой частей в (3.12):  $\Delta^2 \delta = \epsilon^2$ .

Два уравнения содержат два неизвестных параметра:  $\Delta$  и  $\delta$ . Решение этой системы имеет вид

$$\Delta(\epsilon) = \epsilon^{1-1/2\beta}, \quad \delta(\epsilon) = \epsilon^{1/\beta} \quad (5.1)$$

Размер пограничного слоя является нетривиальной дробно-степенной функцией параметра возмущения.

Согласно (5.1), для внутреннего разложения имеем

$$s_{in} = \epsilon^{1/\beta} s_1(\zeta) + O(\epsilon^{2/\beta}), \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \zeta = \zeta/\Delta = O(1) \quad (5.2)$$

Уравнение (3.12), записанное через новые переменные, приводится к виду

$$(\zeta^3 + \zeta \gamma s_1^{\beta-1}) \frac{ds_1}{d\zeta} = -2\lambda \quad (5.3)$$

Это – уравнение Бернулли относительно обратной функции  $\zeta(s_1)$ , оно имеет аналитическое решение

$$\frac{\lambda}{\zeta^2} = \int_0^{s_1} \exp[\Theta(s_1^\beta - u^\beta)] du + C \exp[\Theta s_1^\beta], \quad \Theta = \gamma/(\lambda\beta) \quad (5.4)$$

Константа  $C$  может быть определена из условия сращивания внутреннего и внешнего разложений. Сращивание производится для обратных функций  $\xi_{ex}(s)$  и  $\xi_{in}(s)$ , которые могут быть выведены из (4.1) и (5.2)

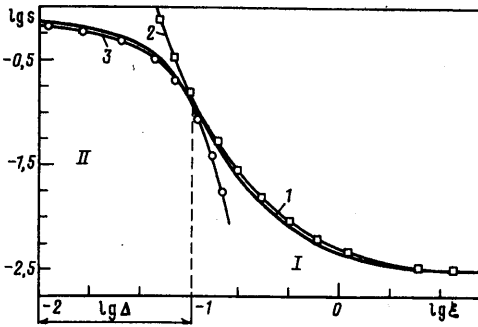
$$\xi_{ex} = \frac{\lambda \epsilon^2}{s} + O(\epsilon^{2\beta+1}) \quad (5.5)$$

$$\xi_{in} = \lambda \epsilon^2 \left[ \int_0^s \exp\left[\frac{\Theta}{\epsilon}(s^\beta - u^\beta)\right] du + C \epsilon^{1/\beta} \exp\left[\frac{\Theta}{\epsilon} s^\beta\right] + O(\epsilon^{1/\beta}) \right]^{-1} \quad (5.6)$$

Введем "промежуточную" функцию  $\sigma = s/\Psi(\epsilon)$ , где  $\epsilon^2 < \Psi < \epsilon^{1/\beta}$ , которая по порядку величины соответствует промежуточной зоне между внешней и внутренней. Перепишем разложения (5.5), (5.6) через промежуточную переменную

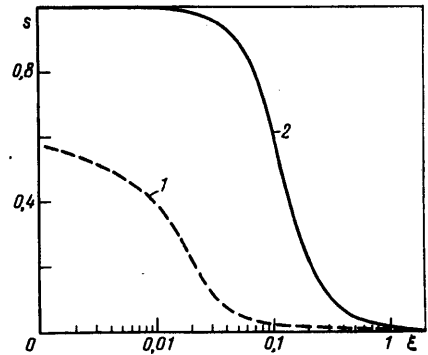
$$\xi_{ex} = \frac{\lambda \epsilon^2}{\gamma \sigma} + O(\epsilon^{2\beta+1}), \quad \xi_{in} = \frac{\lambda \epsilon^2}{C \epsilon^{1/\beta} + \gamma \sigma + o(\Psi(\epsilon)) \sigma}$$





Фиг. 2

Фиг. 2. Сращивание асимптотических разложений модельной задачи: 1 – точное решение; 2 – внешнее разложение; 3 – внутреннее разложение



Фиг. 3

Фиг. 3. Профиль насыщенности при интенсивности фазового перехода умеренной ( $\lambda = 1$ , линия 1) и высокой ( $\lambda = 100$ , линия 2)

В промежуточной зоне оба разложения должны совпадать, тогда  $C = 0$ . Первый член разложения (5.2) полностью определен с помощью (5.4) при  $C = 0$ .

Кривая 3 на фиг. 1 иллюстрирует поведение внутреннего разложения. Характер точного решения 1, внешнего разложения 2 и разложения в пограничном слое 3 и их сращивание представлены на фиг. 2.

Согласно [10], интеграл в (5.4) может быть представлен в виде следующего разложения при  $\zeta \rightarrow 0$ :

$$s_1(\zeta) \approx \left\{ \frac{1}{\Theta} \ln \left[ \frac{\lambda \beta \Theta^{1/\beta}}{\zeta^2 \Gamma(1/\beta)} \right] \right\}^{1/\beta} \quad (5.7)$$

Здесь  $\Gamma$  – символ гамма-функции Эйлера. Возвращаясь к насыщенности  $s(\xi)$ , получим

$$s(\xi) \approx \left\{ \frac{\varepsilon}{\Theta} \ln \left[ \frac{\lambda \beta \varepsilon^2 (\Theta/\varepsilon)^{1/\beta}}{\xi^2 \Gamma(1/\beta)} \right] \right\}^{1/\beta} \quad (5.8)$$

Это соотношение показывает, что в пограничном слое решение ведет себя как дробная степень логарифмической функции координаты:  $s \approx A(\varepsilon \ln \varepsilon)^{1/\beta}$ , где  $A$  – константа.

Таким образом, с явлением перерождения типа особенности связан логарифмический дробно-степенной пограничный слой.

Физическая природа пограничного слоя заключается в следующем. Принятое условие  $\beta > 1$  означает, что подвижности фаз контрастны. Отставание фазы  $B$  велико практически во всем пласте, за исключением узкой зоны вокруг стока, где скорости фаз становятся одного порядка вследствие неограниченно возрастающих градиентов давления. Следовательно, в пограничном слое нарушается условие контрастности течения фаз. Вследствие этого профиль насыщенности в пограничном слое становится более гладким, тогда как в остальной зоне насыщенность фазы  $B$  быстро нарастает из-за конвективного массообмена первого рода.

Соотношения (5.7), (5.8) показывают, что характер особенностей разложения в пограничном слое и истинного решения (4.2) остается различным. Однако это различие теперь сохраняется лишь в экспоненциально малой по размеру зоне вблизи особой точки.

**6. Свойства решений. Скейлинговая инвариантность.** Рассмотрим вариант модели (3.10), в которой примем, что фазовая проницаемость по фазе  $A$  неизменна (что допустимо вследствие малых насыщенных фазы  $B$ ) и степенной закон (3.11) для проницаемости по фазе  $B$

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{\varepsilon \Lambda}{r} \frac{\partial s^\beta}{\partial r} + \frac{\lambda \varepsilon^2}{r^2}, \quad s(\tau=0) = 0 \quad (6.1)$$

Тогда ее решение инвариантно относительно следующего скейлингового преобразования:

$$s(\xi; (\lambda \varepsilon^2), (\Lambda \varepsilon)) = \eta^{2/(2\beta-1)} s[\xi \eta; (\lambda \varepsilon^2) \eta^{4(\beta-1)/(2\beta-1)}, (\Lambda \varepsilon \beta) \eta^{(6\beta-4)/(2\beta-1)}], \quad \xi = r/\sqrt{\tau} \quad (6.2)$$

Если известно значение насыщенности в некоторой точке  $\xi$ , то соотношение (6.2) позволяет рассчитать насыщенность в любой другой точке.

Отсюда можно сделать и обобщение результатов на случай, когда интенсивность фазового перехода  $\lambda$  велика. Тогда размер пограничного слоя и порядок решения в нем (6.3) определяются иначе

$$\Delta = \varepsilon^{1/2} (\lambda \varepsilon)^{(\beta-1)/2\beta}, \quad \delta = (\lambda \varepsilon)^{1/\beta} \quad (6.3)$$

Отсюда следует, что решение сохраняет прежнюю структуру, если  $\lambda \ll 1/\varepsilon$ . Если  $\lambda > 1/\varepsilon$ , то структура решения качественно меняется. В пограничном слое имеет место  $s(\xi) \equiv 1$ . Это легко следует и из (6.2). Характер решений при разных  $\lambda$  изображен на фиг. 3, где кривые 1, 2 соответствуют случаям умеренной ( $\lambda \ll 1/\varepsilon$ ) и высокой ( $\lambda > 1/\varepsilon$ ) интенсивности фазового перехода.

Уравнения (3.7), (3.8) имеют стационарные решения вида

$$\frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial f_{B(s)}}{\partial r} + \frac{\lambda \varepsilon^2 f_A}{r^2} = 0, \quad \varphi_A f_A r \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\varepsilon}{2} \quad (6.4)$$

Для первого уравнения необходима постановка граничного условия вдали от точки возмущения, например вида  $s(r=1) = 0$ . Если пренебречь изменениями фазовой проницаемости по фазе  $A$  при малых насыщенностях  $s$  и считать постоянной интенсивность фазового перехода  $\lambda$ , то (6.4) имеет явное решение

$$f_B(s) = -\lambda \varepsilon \ln r \varphi_A \quad (6.5)$$

Из (6.4), в частности, следует, что при  $\lambda < 0$  производная  $\partial f_B / \partial r$  положительна, что соответствует убыванию насыщенности в сторону точки возмущения.

Из соотношения (4.2) для автомодельных решений следует, что точка возмущения – неустойчивый узел, если  $\lambda < 0$ . Это означает, что если в задаче возможна смена знака параметра  $\lambda$ , то можно ожидать неустойчивого поведения решений в окрестности точки возмущения.

Рассмотрим задачу (3.10), (3.12) в варианте аппроксимации фазовых проницаемостей (3.11), полагая, что интенсивность фазового перехода – переменная величина  $\lambda = \lambda(r, t, s)$ . Пусть на внешнее воздействие  $\varepsilon$  наложено малое возмущение порядка  $\alpha$ :  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha \varepsilon_1(\tau)$ . Тогда насыщенность  $s = s_0 + \alpha s_1 + \dots$

Невозмущенное поле  $s_0$  соответствует либо автомодельному решению, либо стационарному (6.5). Для возмущенного поля насыщенности  $s_1$  нетрудно получить из (6.1) обычной техникой разложений по малому параметру  $\alpha$

$$\frac{\partial s_1}{\partial \tau} - \frac{\Lambda \beta \varepsilon_0 s_0^{\beta-1}}{r} \frac{\partial s_1}{\partial r} - \left( \frac{\Lambda \beta \varepsilon_0}{r} \frac{\partial s_0^{\beta-1}}{\partial r} + \lambda'_{s_0} \right) s_1 = \left( \frac{\Lambda \partial s_0^\beta}{\partial r} + \frac{2 \varepsilon_0 \lambda_0}{r^2} \right) \varepsilon_1(\tau), \quad s_1|_{\tau=0} = 0 \quad (6.6)$$

Экспоненциальное во времени нарастание или затухание возмущений определяется знаком величины

$$I = \frac{\Delta \beta \varepsilon_0}{r} \frac{\partial s_0^{\beta-1}}{\partial r} + \lambda'_{s_0} \quad (6.7)$$

Система неустойчива, если  $I > 0$ .

Ранее указывалось, что зависимость  $\lambda$  от  $s$  связана с вариациями полного состава системы и что зависимость эта достаточно слабая, поэтому производной  $\lambda_{s_0}$  можно пренебречь. Тогда знак величины  $I$  целиком определяется характером невозмущенного распределения насыщенности в пространстве.

Возможны два случая. Если интенсивность фазового перехода  $\lambda$  не меняет знак (фазовый переход везде однонаправленный), то насыщенность  $s_0$  монотонно убывает в направлении от стока (фиг. 2, 3). Тогда  $(\partial s_0^{\beta-1})/(\partial r) < 0$  и процесс устойчив.

Если интенсивность фазового перехода в некоторой подобласти  $\Omega^*$  меняет знак, т.е. фазовый переход в этой области имеет обратную направленность (из фазы  $B$  в фазу  $A$ ), то невозмущенное распределение насыщенности немонотонно. Тогда в подобласти  $\Omega^*$   $(\partial s_0^{\beta-1})/(\partial r) > 0$  и процесс неустойчив. В реальности это всегда имеет место вблизи стока, когда давление становится ниже давления максимума конденсации/испарения.

Направление развития возмущений определяется знаком правой части в (6.6).

Таким образом, для возникновения неустойчивостей система должна пройти некоторый начальный этап разгона, когда после повсеместного выпадения фазы  $B$  начинают появляться зоны обратного перехода фазы  $B$  в фазу  $A$ . В этом смысле состояние покоя системы всегда устойчиво, так как невозможно, чтобы в начальный момент, когда фаза  $B$  еще не появилась, возникли зоны ее обратного перехода в фазу  $A$ . Этот результат отличается от [14], где исследовалась устойчивость состояния покоя полной системы уравнений двухфазной фильтрации с фазовым переходом.

На практике осциллирующие режимы работы нефтяных скважин при выделении газа или газоконденсатных скважин наблюдаются регулярно на множестве месторождений.

**Заключение.** Разработанная техника решения и полученные решения моделей задачи фильтрации контрастных жидкостей являются базовыми для качественного анализа процессов фильтрационного переноса таких жидкостей. На их базе могут быть исследованы задачи с включением капиллярных сил, неравновесности фазовых переходов, неравновесности фазовых проницаемостей, а также неизотермических эффектов. Результаты работы непосредственно приложены к прогнозированию процессов истощения газоконденсатных и нефтегазовых пластов.

Работа выполнена при поддержке Европейского Фонда INTAS (грант № 94-4367) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-01179а).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Панфилов М.Б. Асимптотика решения задач фильтрации многокомпонентной смеси с пограничным слоем // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 4. С. 94–100.
2. Панфилов М.Б. Асимптотические методы решения задач фильтрации многокомпонентных смесей в процессах истощения газоконденсатных залежей // Динамика многофазных сред. Новосибирск: Наука, 1985. С. 183–187.
3. Панфилов М.Б. Сращивание асимптотических разложений в задачах фильтрации газоконденсатной смеси // Инж.-физ. журн. 1983. Т. 45. № 4. С. 608–616.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 535 с.
5. Николаевский В.Н., Бондарев Э.А., Миркин М.И. др. Движение углеводородных смесей в пористой среде. М.: Недра, 1968. 190 с.

6. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 2. М.: Наука, 1987. 360 с.
7. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
8. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.
9. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
10. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
11. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
12. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 231 с.
13. *Сомов Б.Е.* О методах решения задач гетерогенной фильтрации многокомпонентных смесей в пористой среде // Разработка и эксплуатация месторождений. М., 1983. С. 55–65. (Тр. МИНХ и ГПИ; № 174.)
14. *Mitlin V.S.* Two-phase multicomponent filtration: instabilities, autowaves and retrograde phenomena // J. Fluid Mech. 1990. V. 220. P. 369–395.

Москва

Поступила в редакцию  
30.XII.1996