МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 2000

УДК 532.542.2

© 2000 г. А.И. МОШИНСКИЙ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ ПРИ ТЕЧЕНИИ В КАНАЛАХ В СЛУЧАЕ АНИЗОТРОПНОГО ТЕНЗОРА ДИФФУЗИИ

Рассматривается задача асимптотически обоснованного сведения трехмерного по координатам уравнения, описывающего процесс распространения массы (тепла) в потоке с анизотропными свойствами диффузионного переноса вещества, к одномерному уравнению. В качестве области конвективного переноса массы (тепла) взят цилиндрический канал произвольного поперечного сечения. Предполагается, что матрица коэффициентов диффузии зависит от пространственных координат. В построенном эквивалентном уравнении диффузии представлен некий эффективный коэффициент диффузии (дисперсии [1]). Получены формулы для расчета этого коэффициента. Установлена связь расчета эффективного коэффициента с задачей минимизации определенного функционала, т.е. отмечена возможность расчета при помощи вариационных методов. Рассмотрен пример точного расчета эффективного коэффициента диффузии. Указана возможность обобщения задачи, когда уравнение эффективной диффузии (теплопроводности) по существу становится нелинейным уравнением общего вида для одномерного случая.

В [1] предложено сведение двухмерного по пространственным координатам (радиальной и аксиальной) уравнения конвективного переноса примеси в круглой трубе к одномерному только по аксиальной координате. Предлагаемый переход обосновывался физическими аргументами и оценками. Подобное упрощение, особенно при наличии переменного по поперечной потоку координате коэффициента (профиля скорости), привлекательно для приложений и поэтому были проведены многочисленные исследования по выводу уравнений типа тейлоровского [1] с включением различных усложнений и на основе разных алгоритмов, из которых отметим только некоторые [2–7], где предложены оригинальные подходы к проблеме. В частности, в [8, 9] получена матрица коэффициентов эффективной диффузии, заменяющая при более сложных, чем одномерные течения, коэффициент дисперсии Тейлора [1, 2]. Проблемы дисперсии вещества по-прежнему актуальны и интересны (см., например, [10–12]).

Отметим, что уравнение эффективной диффузии в круглой трубе при ламинарном течении жидкости получено как асимптотическое выражение из точного решения задачи распространения примеси в [13].

Определенный интерес представляют задачи переноса вещества в канале с проницаемыми стенками (со вдувом), а также проблемы, связанные с диффузионным обменом веществом через границу канала. Задача со вдувом, но при отсутствии суммарного (диффузионный плюс конвективный) потока переносимого вещества через поверхность трубы рассматривалась в [14]. Конвективный поток вещества поперек основного течения появляется в турбулентных двухфазных течениях за счет разных скоростей несущей и дисперсной фаз. Проблему эффективной диффузии для этого потока в трубе анализировали в [15]. Но и там на стенках трубы суммарный поток частиц отсутствовал.

При интенсивных химических превращениях диффузионное уравнение с эффективным коэффициентом диффузии перестает быть адекватным исходному уравнению

[7, 16]. В таком случае в качестве замены фундаментального уравнения конвективной диффузии может выступать система двух уравнений первого порядка в частных производных гиперболического типа [7, 16]. В частности, коэффициент дисперсии начинает зависеть от параметров химической реакции [17], что вряд ли следует приветствовать, поскольку "перегружает" коэффициент дисперсии. В качестве недостатка диффузионной модели отмечается [16], что коэффициент эффективной диффузии в сложных ситуациях начинает зависеть неконтролируемым образом от множества параметров, входящих в постановку задачи. Для гиперболических систем уравнений предложен также учет химического превращения на стенке канала не малой интенсивности [18]. Явление эффективной диффузии рассматривают также при плавных изменениях площади сечения канала вдоль его осевой координаты [19].

При изучении влияния переноса вещества (энергии) в потоке при наличии двух факторов – изменения скорости течения по координатам и диффузионного переноса – традиционно упрощают задачу в двух аспектах. Во-первых, практически всегда рассматривают перенос вещества в потоках только с одной ненулевой компонентой скорости (вдоль канала, трубы и т.п.). При этом профиль скорости зависит только от одной поперечной потоку координаты, т.е. по существу рассматривают диффузию в течении Пуазейля в трубах при ламинарном режиме и соответствующего аналога при турбулентном движении несущей среды. Ясно, что это слишком идеализированная картина течения и часто, например в кавернах [20, 21], нельзя считать течение одномерным, хотя и в подобных потоках на практике используют теорию Тейлора.

Во-вторых, предельно упрощают диффузионные свойства системы, описывая их при помощи единственного коэффициента диффузии, принимаемого к тому же постоянным (с непринципиальными уточнениями при диффузии в турбулентном потоке). Тогда как, известно, что в общем случае нужно вводить тензор диффузионного переноса, компоненты которого могут зависеть от пространственных координат. Особенно это актуально при турбулентном течении жидкости [22]. Отметим также, что иногда [23, 24] рассматривают диффузию вещества в потоке с нестационарным профилем скорости (как правило, периодическим по времени). Настоящий подход, проверенный на некоторых задачах, обобщающих задачи Тейлора [9, 25], позволяет учесть нестационарность и неоднородность поля скоростей и поля тензора диффузии.

1. Постановка задачи. Построим асимптотическое разложение решений уравнений

$$\partial C/\partial\tau + \mathrm{div}(\mathbf{V}C) = \mathrm{div}(\mathbf{D}^* \cdot \mathrm{grad}\, C) \tag{1.1}$$

описывающего перенос вещества в трубе в общем случае с переменным по координатам тензором диффузии $\mathbf{D}^*(X, Y, Z)$ и соленоидальным полем скоростей

$$\mathrm{div}\, \mathbf{V} = 0 \tag{1.2}$$

При постановке задач массопереноса вектор $\mathbf{V}$, как правило, считается известной величиной. Поле скоростей $\mathbf{V}(X, Y, Z)$ – в общем случае неодномерное, подчиненное условию равенства нулю нормальной составляющей к боковой поверхности, ограничивающей область течения, т.е. на контуре γ: $V_n\big|_\gamma = 0$.

Далее существенным будет только одно дополнительное условие

$$n_i D^*_{ij} \frac{\partial C}{\partial X_j}\Big|_\gamma + n_i D^*_{iz} \frac{\partial C}{\partial Z}\Big|_\gamma = 0 \tag{1.3}$$

выражающее непроницаемость для потока вещества стенки канала γ. Область определения уравнения (1.1) – внутренность цилиндра с осью $Z \in (-\infty, +\infty)$, с сечением, ограниченным кусочно-гладким контуром γ в плоскости X, Y. В формуле (1.3) и других по повторяющемуся дважды латинскому индексу (в (1.3) по i и j) проводится суммирование от единицы до двух. Для удобства принято, что $X_1 = X, X_2 = Y, X_3 = Z$;

$D^*_{\mu\nu}(X, Y, Z)$ – тензор диффузии, который будем считать удовлетворяющим требованиям неравновесной термодинамики [26], а именно симметрии $D^*_{ij} = D^*_{ji}$ (соотношения Онзагера), и положительно определенным: $D^*_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu \geqslant \varkappa\xi_\mu\xi_\mu$ $(\varkappa > 0)$ (по повторяющемуся дважды греческому индексу подразумевается суммирование от одного до трех). В уравнениях (1.1), (1.3) C – концентрация примеси, τ – размерное время, n_μ – косинусы углов, образованных единичным вектором внешней нормали $\mathbf{n}$ и направлением соответствующей оси, причем $n_z = n_3 = 0$.

В качестве еще одного граничного условия для уравнения (1.1) возьмем следующее: $C|_{Z\to\pm\infty} < \infty$, которое выражает ограниченность решения на большом расстоянии от начала координат. Протяженность области в направлении оси Z не имеет принципиального значения, так же как и условия на границах Z = const в случае конечной области. Это условие выписано для конкретности постановки задачи. Задача дополняется также начальным условием

$$C|_{\tau=0} = C_n(X,Y,Z) \tag{1.4}$$

Рассмотрение основывается на асимптотическом анализе безразмерного уравнения (1.1)

$$\varepsilon^2\left[\frac{\partial C}{\partial t} + \mathrm{Pe}\, w\frac{\partial C}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(D_{zz}\frac{\partial C}{\partial z}\right)\right] + \varepsilon\left\{\mathrm{Pe}\left[\frac{\partial}{\partial z}(WC) + \frac{\partial}{\partial x}(UC) + \frac{\partial}{\partial y}(VC)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{iz}\frac{\partial C}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(D_{iz}\frac{\partial C}{\partial x_i}\right)\right\} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}\right) \tag{1.5}$$

$$x_1 = x = \frac{X}{L_*},\ x_2 = y = \frac{Y}{L_*},\ x_3 = z = \frac{Z}{Z_*},\ D_{\mu\nu} = \frac{D^*_{\mu\nu}}{D_*}$$

$$t = \tau\frac{D_*}{Z_*^2},\ \varepsilon = \frac{L_*}{Z_*},\ \mathrm{Pe} = \frac{W_* L_*}{D_*}, \tag{1.6}$$

где D_* – масштаб коэффициента диффузии, W_* – масштаб скорости вдоль оси Z, который связан с масштабом U_* скоростей по осям X и Y соотношением $W_*/Z_* = U_*/L_*$, вытекающим из уравнения неразрывности (1.2), L_* – масштаб (характерный размер поперечного сечения) вдоль осей X и Y, Z_* – характерная длина изменения концентрации вдоль оси Z. Число Pe имеет порядок единицы. Символом w обозначена безразмерная средняя по сечению скорость, направленная вдоль оси Z, соответственно W выражает скорость (безразмерную) вдоль оси Z за вычетом средней скорости, U и V – безразмерные скорости по осям X и Y соответственно.

При записи уравнения (1.5) полагалось, что масштабом средней скорости w служит величина U_*, т.е. значения рассматриваемых средних скоростей заметно меньше "пульсационных" W при $\varepsilon \to 0$. Традиционно [1, 7] среднюю скорость течения в канале исключают переходом в движущуюся с этой скоростью систему координат.

Граничное условие (1.3) в переменных (1.6) приобретает вид

$$n_i D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}\Big|_\gamma + \varepsilon n_i D_{iz}\frac{\partial C}{\partial z}\Big|_\gamma = 0 \tag{1.7}$$

Средняя величина определяется выражением

$$\langle F(\ldots)\rangle = \frac{1}{S}\int_S F(X,Y,\ldots)dS \tag{1.8}$$

где S – площадь поперечного сечения канала, а многоточиями под знаком функции F обозначены другие переменные (кроме X, Y), от которых может зависеть функция F.

Осреднение уравнения неразрывности, применение теоремы Грина по координатам x и y и условие $V_n\big|_\gamma = 0$ приводят к независимости средней скорости w от координаты z. В то же время по определению величины W имеем $\langle W\rangle = 0$.

2. Построение формального асимптотического разложения. Для переноса вещества в каналах обычно параметр $\varepsilon = L_*/Z_*$ – малая величина. Поэтому решение уравнения (1.5) ищется методом возмущений [27] в виде разложения по степеням параметра ε

$$C = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j C_j(x, y, z; t) \tag{2.1}$$

после подстановки которого в уравнение (1.5) и граничное условие (1.7) и группировки слагаемых одинакового порядка по ε получаем

$$\Phi C_0 = 0,\quad n_i D_{ij}\frac{\partial C_0}{\partial x_j}\Big|_\gamma = 0,\quad \Phi = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \tag{2.2}$$

$$\Phi C_1 = \mathrm{Pe}\left[\frac{\partial}{\partial z}(WC_0) + \frac{\partial}{\partial x_i}(U_i C_0)\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left(D_{iz}\frac{\partial C_0}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{iz}\frac{\partial C_0}{\partial z}\right)$$

$$n_i\left(D_{ij}\frac{\partial C_1}{\partial x_j} + D_{iz}\frac{\partial C_0}{\partial z}\right)\Big|_\gamma = 0 \tag{2.3}$$

$$\Phi C_{\alpha+2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{iz}\frac{\partial C_{\alpha+1}}{\partial z}\right) = \mathrm{Pe}\left[\frac{\partial}{\partial z}(WC_{\alpha+1}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(U_i C_{\alpha+1})\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left(D_{iz}\frac{\partial C_{\alpha+1}}{\partial x_i}\right) +$$

$$+\frac{\partial C_\alpha}{\partial t} + \mathrm{Pe}\, w\frac{\partial C_\alpha}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(D_{zz}\frac{\partial C_\alpha}{\partial z}\right)$$

$$n_i\left(D_{ij}\frac{\partial C_{\alpha+2}}{\partial x_j} + D_{iz}\frac{\partial C_{\alpha+1}}{\partial z}\right)\Big|_\gamma = 0,\quad \alpha = 0, 1, 2\ldots \tag{2.4}$$

Здесь и далее обозначено $U_1 = U$, $U_2 = V$.

Уравнение (2.2) приводит к независимости функции C_0 от переменных x и y, что вытекает из цепочки равенств

$$0 = \left\langle C_0 \Phi C_0\right\rangle = \frac{1}{s}\oint_\gamma n_i C_0 D_{ij}\frac{\partial C_0}{\partial x_j}d\gamma - \left\langle D_{ij}\frac{\partial C_0}{\partial x_i}\frac{\partial C_0}{\partial x_j}\right\rangle \tag{2.5}$$

Интеграл по контуру γ в силу граничного условия (2.2) равен нулю. Поскольку матрица D_{ij} – положительно-определенная и в силу предполагаемой непрерывности компонент матрицы D_{ij} и величин $\partial C_0/\partial x_j$, из уравнения (2.5) вытекает, что $\partial C_0/\partial x_j \equiv 0$, т.е. переменная C_0 не зависит от координат x и y. Обозначим $C_0 = G(z, t)$. С учетом этого и уравнения неразрывности задача (2.3) запишется в виде

$$\Phi C_1 = \mathrm{Pe}\, W\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial D_{iz}}{\partial x_i},\quad n_i\left(D_{ij}\frac{\partial C_1}{\partial x_j} + D_{iz}\frac{\partial G}{\partial z}\right)\Big|_\gamma = 0 \tag{2.6}$$

решение которой можно представить в виде

$$C_1 = N(x, y, z)\partial G/\partial z + C_1^\circ(z, t) \tag{2.7}$$

где функция $N(x, y, z)$ удовлетворяет задаче

$$\Phi N = \mathrm{Pe}\, W - \frac{\partial D_{iz}}{\partial x_i}, \quad n_i\left(D_{ij}\frac{\partial N}{\partial x_j} + D_{iz}\right)\Big|_\gamma = 0 \tag{2.8}$$

Из уравнения (2.8) следует, что функцию N можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$N = \mathrm{Pe}\,\mathrm{M} + R \tag{2.9}$$

где функции M и R удовлетворяют соответственно задачам

$$\Phi\mathrm{M} = W, \quad n_i D_{ij}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_j}\Big|_\gamma = 0 \tag{2.10}$$

$$\Phi R = -\frac{\partial D_{iz}}{\partial x_i}, \quad n_i\left(D_{ij}\frac{\partial R}{\partial x_j} + D_{iz}\right)\Big|_\gamma = 0 \tag{2.11}$$

При Pe = 0 (отсутствие течения) можно рассматривать только задачу (2.11) и, согласно (2.9), имеем $N = R$. В частном случае $\partial D_{iz}/\partial x_i = 0$ и $n_i D_{iz}\big|_\gamma = 0$ функция R может быть взята равной нулю. При этом коэффициент эффективной диффузии будет равен среднему значению компоненты D_{zz} плюс составляющая, связанная с функцией M.

При учете зависимостей (2.7)–(2.11) функция $\overset{\circ}{C_1}$ как легко убедиться, удовлетворяет задаче (2.2) и те же выкладки, что и для функции C_0 приводят к тому, что функция $\overset{\circ}{C_1}$ зависит только от z и t, что и выписано в формуле (2.7).

Задача определения функции N представляет собой задачу Неймана, которая для своей разрешимости требует специального условия, в данном случае такого (полученного из соотношений (2.3) и определения средней величины (1.8) после элементарных выкладок)

$$\mathrm{Pe}\left\{s\frac{\partial G\langle W\rangle}{\partial z} + G\oint_\gamma n_i U_i d\gamma\right\} = \oint_\gamma n_i\left(D_{ij}\frac{\partial C_1}{\partial x_j} + D_{iz}\frac{\partial G}{\partial z}\right)\Big|_\gamma d\gamma$$

Это требование выполняется (давая нуль в обеих частях равенства) в силу граничного условия (2.6), непроницаемости контура канала и равенства $\langle W\rangle = 0$. Несмотря на это, решение задачи (2.6) и соответственно задач (2.10), (2.11), "образующих" (2.9) не единственно (прибавление к N постоянной не меняет постановку задачи). Для получения единственной функции N достаточно наложить дополнительное требование $\langle N\rangle = 0$. В таком случае физический смысл слагаемого $\overset{\circ}{C_1}(z, t)$ в формуле (2.7) будет заключаться в равенстве его среднему значению функции C_1 первого приближения по числу ε: $\overset{\circ}{C_1}(z, t) = \langle C_1\rangle$. При этом легко видеть, что $\langle\mathrm{M}\rangle = \langle R\rangle = 0$.

Каждое уравнение (2.3) и (2.4) для функций C_α имеет определенное необходимое условие существования решения. Обозначим сумму всех слагаемых в правой части уравнения (2.4) символом F_α. Тогда, осреднив уравнение

$$\Phi C_{\alpha+2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{iz}\frac{\partial C_{\alpha+1}}{\partial z}\right) = F_\alpha, \quad \alpha = 0,1,2\ldots$$

применив теорему Грина и приняв во внимание граничное условие (2.4), получаем

$$\langle F_\alpha\rangle = 0, \quad \alpha = 0,1,2\ldots \tag{2.12}$$

Здесь будет рассматриваться только уравнение для главного приближения разложения (2.1), для чего достаточно взять в (2.12) $\alpha = 0$ при учете уже полученных зависимостей для переменных C_0 и C_1.

Имеем из соотношения (2.12)

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \mathrm{Pe}\, w\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\langle D_{zz}\rangle\frac{\partial G}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left\langle D_{iz}\frac{\partial C_1}{\partial x_i}\right\rangle + \mathrm{Pe}\frac{\partial}{\partial z}\langle WC_1\rangle = 0 \tag{2.13}$$

Далее, подставляя в (2.13) выражение (2.7), получаем

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \mathrm{Pe}\, w\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\left\langle D_{zz} - \mathrm{Pe}\, WN + D_{iz}\frac{\partial N}{\partial x_i}\right\rangle\frac{\partial G}{\partial z}\right) \tag{2.14}$$

где учтено, что C_1° не зависит от x_i ($i = 1, 2$). Из вида уравнения (2.14) вытекает формула для коэффициента эффективной диффузии

$$D_0(z) = \left\langle D_{zz} - \mathrm{Pe}\, WN + D_{iz}\frac{\partial N}{\partial x_i}\right\rangle \tag{2.15}$$

3. Вывод различных формул для коэффициента эффективной диффузии. Исходя из физического смысла коэффициента эффективной диффузии, $D_0(z)$ должно быть положительным. Из формулы (2.15) это не очевидно. Преобразуем ее следующим образом

$$D_0(z) = \langle D_{zz}\rangle + \left\langle D_{iz}\frac{\partial N}{\partial x_i} - \mathrm{Pe}\, WN - N\left(\Phi N - \mathrm{Pe}\, WN + \frac{\partial D_{iz}}{\partial x_i}\right)\right\rangle =$$

$$= \langle D_{zz}\rangle + 2\left\langle D_{iz}\frac{\partial N}{\partial x_i}\right\rangle - \langle N\Phi N\rangle - \left\langle\frac{\partial D_{iz}N}{\partial x_i}\right\rangle = \langle D_{zz}\rangle + 2\left\langle D_{iz}\frac{\partial N}{\partial x_i}\right\rangle +$$

$$+\left\langle D_{ij}\frac{\partial N}{\partial x_i}\frac{\partial N}{\partial x_j}\right\rangle - \frac{1}{s}\oint_\gamma n_i N\left(D_{ij}\frac{\partial N}{\partial x_j} + D_{iz}\right)\Bigg|_\gamma d\gamma \tag{3.1}$$

где к формуле (2.15) добавлено, согласно уравнению (2.8), нулевое слагаемое и использована теорема Грина аналогично выкладкам в (2.5) для слагаемого $\langle N\Phi N\rangle$ и непосредственно для слагаемого $\langle\partial D_{iz}N/\partial x_i\rangle$. В силу граничного условия (2.8) интеграл по контуру γ в выражении (3.1) равен нулю и поэтому имеем окончательно

$$D_0(z) = \left\langle D_{zz} + 2D_{iz}\frac{\partial N}{\partial x_i} + D_{ij}\frac{\partial N}{\partial x_i}\frac{\partial N}{\partial x_j}\right\rangle \tag{3.2}$$

Из формулы (3.2) легко видеть, что $D_0(z) > 0$. Действительно, рассмотрим вектор ξ с компонентами $\xi_1 = \partial N/\partial x_1$, $\xi_2 = \partial N/\partial x_2$, $\xi_3 = 1$. Тогда, учитывая симметрию коэффициентов $D_{\mu\nu} = D_{\nu\mu}$, замечаем, что под знаком осреднения в выражении (3.2) находится положительно-определенная квадратичная форма $D_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu$, которая в рассматриваемом случае строго положительна, поскольку вектор ξ содержит заведомо ненулевую компоненту $\xi_3 = 1$. Интегрирование (осреднение) в зависимости (3.2) строго положительной непрерывной функции сохраняет положительность, поэтому $D_0(z) > 0$. Более того, получаем следующие оценки для коэффициента $D_0(z)$:

$$D_0(z) \geqslant \varkappa \left\langle\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)^2 + 1\right\rangle \geqslant \varkappa$$

где $\varkappa$ – постоянная в соотношении положительной определенности матрицы $D_{\mu\nu}$: $D_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu \geqslant \varkappa\xi_\mu\xi_\mu$.

Из вывода (3.1) выражения (3.2) можно заметить (это также следует из сопоставления формул (2.15) и (3.2)), что имеет место равенство

$$\left\langle D_{ij} \frac{\partial N}{\partial x_i} \frac{\partial N}{\partial x_j} + D_{iz} \frac{\partial N}{\partial x_i} + \mathrm{Pe}\, WN \right\rangle = 0 \tag{3.3}$$

подстановка которого в формулу (2.15) дает еще одно полезное выражение для коэффициента эффективной диффузии

$$D_0(z) = \left\langle D_{zz} - D_{ij} \frac{\partial N}{\partial x_i} \frac{\partial N}{\partial x_j} - 2\,\mathrm{Pe}\, WN \right\rangle \tag{3.4}$$

Подставив в формулу (2.15) выражение для N (2.9), получим после простых выкладок, связанных с теоремой Грина и зависимостями (2.10), (2.11), еще два соотношения для коэффициента дисперсии D_0

$$D_0(z) = \langle D_{zz} \rangle + \left\langle D_{iz} \frac{\partial R}{\partial x_i} \right\rangle - \mathrm{Pe}^2 \langle W\mathrm{M} \rangle \tag{3.5}$$

$$D_0(z) = \langle D_{zz} \rangle - \left\langle D_{ij} \frac{\partial R}{\partial x_i} \frac{\partial R}{\partial x_j} \right\rangle + \mathrm{Pe}^2 \left\langle D_{ij} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_j} \right\rangle \tag{3.6}$$

Точно так же из формулы (3.2) можно получить следующую зависимость:

$$D_0(z) = \left\langle D_{zz} + 2D_{iz} \frac{\partial R}{\partial x_i} + D_{ij} \frac{\partial R}{\partial x_i} \frac{\partial R}{\partial x_j} \right\rangle + \mathrm{Pe}^2 \left\langle D_{ij} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_j} \right\rangle \tag{3.7}$$

Обратим внимание, что во всех трех формулах (3.5)–(3.7) отсутствуют линейные по Pe слагаемые. Это обстоятельство связано с раздельным влиянием на коэффициент D_0 характеристик тензора диффузии D_{iz} и поля скоростей W, которые в (3.5)–(3.7) представляют функции R и М соответственно. Естественно, что эти функции зависят также от "поперечной" части тензора диффузии D_{ij} и формы области течения. Формула (3.7) еще раз подтверждает, что $D_0 > 0$. Из зависимости (3.3) вытекают еще две формулы для средних характеристик функций R и М

$$\left\langle D_{ij} \frac{\partial R}{\partial x_i} \frac{\partial R}{\partial x_j} + D_{iz} \frac{\partial R}{\partial x_i} \right\rangle = 0, \quad \left\langle D_{ij} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_j} + W\mathrm{M} \right\rangle = 0 \tag{3.8}$$

Приведем еще одну формулу для расчета коэффициента $D_0(z)$, которая в ряде случаев позволяет получить точные аналитические результаты. Рассмотрим следующую спектральную задачу типа Штурма – Лиувилля:

$$\Phi P_k + \lambda_k P_k = 0, \quad n_i D_{ij} \left. \frac{\partial P_k}{\partial x_j} \right|_\gamma = 0, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3.9}$$

где λ_k при $k = 0, 1, 2, \ldots$ – собственные числа задачи (3.9), причем наименьшим собственным числом будет $\lambda_0 = 0$, при этом $P_0 = \mathrm{const} = 1$, а остальные $\lambda_k > 0$ и в общем случае могут зависеть от координаты z как от параметра. Функции $P_k(x, y, z)$, согласно общей теории [28], ортогональны (их можно нормировать): $\langle P_i P_j \rangle = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ – символ Кронекера. В силу того что $\lambda_0 = 0$ – собственное число, имеем $\langle P_j \rangle = 0$ при $j \neq 0$ (последнее следует также из осреднения уравнения (3.9) при $\lambda_k \neq 0$).

Разложим по системе функций P_k решение N задачи (2.8). При этом, чтобы выполнялось условие однозначности решения $\langle N\rangle = 0$, функцию P_0 использовать не будем. Домножим уравнение (2.8) на функцию $P_k (k > 0)$, осредним результат и "проинтегрируем по частям" (используем теорему Грина) два раза. Получим цепочку равенств

$$\mathrm{Pe}\langle WP_k\rangle - \left\langle P_k \frac{\partial D_{jz}}{\partial x_j}\right\rangle = \langle P_k \Phi N\rangle = \frac{1}{s}\oint_\gamma n_i P_k D_{ij} \frac{\partial N}{\partial x_j} d\gamma +$$

$$+ \left\langle D_{ij} \frac{\partial P_k}{\partial x_i} \frac{\partial N}{\partial x_j}\right\rangle = \frac{1}{s}\oint_\gamma n_i D_{ij}\left(P_k \frac{\partial N}{\partial x_j} - N\frac{\partial P_k}{\partial x_j}\right) d\gamma + \langle N\Phi P_k\rangle$$

откуда, применив формулу Грина к левой части и использовав соотношения (2.8) и (3.9), получим окончательно

$$\langle NP_k\rangle = -\frac{\alpha_k + W_k \mathrm{Pe}}{\lambda_k}, \quad \alpha_k = \left\langle D_{jz} \frac{\partial P_k}{\partial x_j}\right\rangle, \quad W_k = \langle WP_k\rangle$$

Теперь, подставив формулу разложения функции N

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} \langle NP_k\rangle P_k = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k + W_k \mathrm{Pe}}{\lambda_k} P_k$$

в выражение (2.15), получим искомую зависимость

$$D_0(z) = \langle D_{zz}\rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2 - W_k^2 \mathrm{Pe}^2}{\lambda_k} \tag{3.10}$$

Поскольку $D_0(z) > 0$, то сумма в (3.10) ограничена числом $\langle D_{zz}\rangle$ ($D_{zz} > 0$ в силу критерия Сильвестра положительной определенности квадратичной формы $D_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu$).

Примеры, когда удается получить точные аналитические результаты (например, [4]), показывают, что ряд в (3.10) сходится достаточно быстро (как k^{-6} для профиля Пуазейля в круглой трубе) и с приемлемой для приложений точностью можно ограничиться только одним слагаемым в ряде (3.10).

Формула для коэффициента α_k содержит сумму по j. В частном случае, если величины D_{jz} выражаются как градиент в метрике D_{ij}, т.е. $D_{jz} = D_{ij}\partial\varphi/\partial x_i$, использование теоремы Грина и условий (3.9) приводит к равенствам

$$\alpha_k = \left\langle D_{jz} \frac{\partial P_k}{\partial x_j}\right\rangle = -\langle \varphi\Phi P_k\rangle = \lambda_k \langle \varphi P_k\rangle$$

(в соотношении $\lambda_k \langle\varphi P_k\rangle$ нет суммирования по k).

Это означает, что получена формула для α_k, не содержащая суммирования. В результате в соотношении (3.10) вместо a_k^2/λ_k будем иметь $\lambda_k\langle\varphi P_k\rangle^2$ под знаком суммы. Естественно, что введенная функция φ не должна нарушать положительной определенности матрицы $D_{\mu\nu}$. Это накладывает определенные условия, которые здесь не приводятся.

Заметим, что вместо (3.9) можно было бы рассматривать другую задачу: наиболее естественная из возможных связана с заменой граничного условия (3.9) на условие третьего рода: $n_i D_{ij}\partial P_k/\partial x_j|_\gamma = -n_i D_{iz} P_k|_\gamma$, однако вариант (3.9) представляется более удачным, поскольку он не включает в граничное условие функцию D_{iz} и окончательная формула (3.10) получается более простой.

В формуле (3.10) под знаком суммы отдельно выражено влияние на коэффициент дисперсии D_0 анизотропии матрицы диффузии D_{ij} (точнее, ее недиагональных компонентов, содержащих индекс z) через параметры α_k и профиля скорости жидкости в канале, который представляют параметры W_k. Из (3.10) видно, что, поскольку $\lambda_k > 0$, первый эффект стремится "уменьшить" значение коэффициента D_0, вычитая из $\langle D_{zz}\rangle$ некоторую положительную величину, тогда как второй эффект (параметры скорости W_k) стремится увеличить значение D_0, внося положительную добавку в (3.10). Тем не менее заметим, что даже при Pe = 0, как показано выше, $D_0 > 0$. То же замечание относится и к формуле (3.6). Отметим также, что при тензоре диффузии, кратном единичному тензору, т.е. когда присутствует только один постоянный коэффициент диффузии, из формулы (3.10) вытекает соответствующий результат [9].

Проведенный асимптотический анализ показывает, что распространение массы (тепла) в канале с анизотропным тензором диффузии (теплопроводности) в неодномерном потоке происходит в асимптотическом представлении, так же как при поршневом (одномерном) течении жидкости и обычном диффузионном переносе, только в одном направлении.

4. О вариационных методах определения коэффициента эффективной диффузии. Отметим, что выражения для коэффициента дисперсии тесно связаны с вариационными методами анализа краевой задачи для функции N (2.8). Легко убедиться, что интегральной частью функционала, уравнения Эйлера [29] которого совпадают с (2.8), будет следующая:

$$I = \left\langle D_{ij}\frac{\partial N}{\partial x_i}\frac{\partial N}{\partial x_j} + 2D_{iz}\frac{\partial N}{\partial x_i} + 2\,\mathrm{Pe}\,WN \right\rangle \tag{4.1}$$

Раздельное определение "составляющих" функции N функций R (2.10) и М (2.11) позволяет также формулировать раздельно вариационные принципы для их определения. Например, для нахождения функции R подходит первая часть формулы (3.7)

$$I_R = \left\langle D_{zz} + 2D_{iz}\frac{\partial R}{\partial x_i} + D_{ij}\frac{\partial R}{\partial x_i}\frac{\partial R}{\partial x_j} \right\rangle \tag{4.2}$$

тогда как вторую часть (множитель при Pe^2) следует дополнить слагаемым $2\langle WN\rangle$, чтобы уравнение Эйлера для функции М совпадало с (2.10)

$$I_{\mathrm{M}} = \left\langle D_{ij}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_j} + 2W\mathrm{M} \right\rangle \tag{4.3}$$

Уравнения, вытекающие из вариационных принципов, дополняются соответствующими граничными условиями, которые часто [29] называют естественными (см., например, (2.8)). Отметим также, что обычно [29] вариационные методы дают лучшие результаты при определении интегральных характеристик (как здесь), чем для распределения искомой функции по области определения функционала. Таким образом, минимизация функционалов (4.1)–(4.3) стандартными методами [29] (например, методом Ритца) представляется перспективным методом расчета коэффициента эффективной диффузии $D_0(z)$. Для формулировки вариационных принципов и вычисления некоторых величин (интегралов) могут оказаться полезными соотношения (3.8). Заметим также, что в силу отмеченной выше хорошей сходимости ряда (3.10), вариационные методы расчета коэффициента $D_0(z)$, основанные на функционале для функций P_k (легко определяемом при помощи задачи (3.9)), становятся привлекательными для обычно встречающихся на практике функций W и $D_{\mu\nu}$.

5. Определение начального условия для уравнения (2.14). Для полной постановки задачи для уравнения эффективной диффузии (2.14) необходимо сформулировать начальное условие к нему. Запишем (2.14) в окончательном виде

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\mathrm{Pe}\,w\frac{\partial G}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(D_0(z)\frac{\partial G}{\partial z}\right) \tag{5.1}$$

При этом заметим, что выше фактически построено "внешнее" [27] разложение, пригодное для описания процесса при достаточно больших значениях времени. Свидетельством особого (сингулярного) поведения этого разложения является отсутствие в постановке задач для функций C_j (2.1) начального условия (1.4). Оно выпало в силу выбранного большого $\sim\varepsilon^{-2}$ масштаба для времени. Для описания поведения решения при малых t необходимо ввести "сжатое" время $\zeta = t/\varepsilon^2$ и построить новое разложение [27]. Новая "внутренняя" [27] задача запишется следующим образом:

$$\frac{\partial C}{\partial \zeta}+\varepsilon^2\left[\mathrm{Pe}\,w\frac{\partial C}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{zz}\frac{\partial C}{\partial z}\right)\right]+$$

$$+\varepsilon\left\{\mathrm{Pe}\left[\frac{\partial}{\partial z}(WC)+\frac{\partial}{\partial x_i}(U_iC)\right]-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{iz}\frac{\partial C}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{iz}\frac{\partial C}{\partial x_i}\right)\right\}=\Phi C$$

$$n_iD_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}\bigg|_\gamma+\varepsilon n_iD_{iz}\frac{\partial C}{\partial z}\bigg|_\gamma=0,\quad C|_{\zeta=0}=C_n(x,y,z) \tag{5.2}$$

Ограничимся, как и ранее, главным приближением внутреннего разложения

$$C=C_0^*(x,y,z,\zeta)+\varepsilon C_1^*(x,y,z,\zeta)+\ldots$$

где индекс "звездочка" помечает внутреннее решение. Уравнение для функции C_0^* главного приближения получается простой подстановкой в (5.2) значения $\varepsilon = 0$. Таким образом, имеем задачу

$$\frac{\partial C_0^*}{\partial \zeta}=\Phi C_0^*,\quad n_iD_{ij}\frac{\partial C_0^*}{\partial x_j}\bigg|_\gamma=0,\quad C_0^*\big|_{\zeta=0}=C_n(x,y,z) \tag{5.3}$$

Для сращивания с решением внешнней задачи (2.1) будет достаточно определить только среднее значение $\langle C_0^*\rangle$. Осредним для этого уравнение (5.3). Как и ранее, получаем среднее значение оператора в правой части равным нулю. Откуда находим

$$\left\langle\frac{\partial C_0^*}{\partial \zeta}\right\rangle=0\to\langle C_0^*\rangle=\mathrm{const}(\zeta,x,y)=\langle C_n\rangle \tag{5.4}$$

где использовано начальное условие (5.3). Теперь, используя (5.4), применим принцип предельного сращивания [27] для средних от главных слагаемых внешнего и внутреннего разложений

$$\lim_{t\to0}\langle C_0\rangle=\lim_{t\to0}G(z,t)=G\Big|_{t=0}=\lim_{\zeta\to\infty}\langle C_0^*\rangle=\langle C_n\rangle=G_n(z) \tag{5.5}$$

что дает начальное условие $G|_{t=0}=G_n(z)$ для уравнения (5.1). Таким образом, согласно (5.5), функция $C_0(z, t)$ в начальный момент времени равна среднему значению от начальной функции исходной задачи. Это можно было ожидать из интуитивных соображений.

Внутренняя задача описывает быстрый ($t = O(\varepsilon^2)$) процесс выравнивания концентрации вещества по сечению канала. Таким образом, безразмерное время гомогенизации в системе имеет порядок числа ε^2.

6. Пример. Основной проблемой при формулировке эффективного уравнения диффузии (2.14) или (5.1) является расчет коэффициента D_0 по одной из формул (2.15), (3.2), (3.4)–(3.7), (3.10), поскольку методы интегрирования уравнения (5.1) хорошо разработаны. В свою очередь эта проблема сводится к определению функции N. Ясно, что в случае достаточно сложной формы области поперечного сечения канала и зависимости матричной функции D_{ij} от координат найти аналитическое решение задачи вряд ли возможно. Как уже отмечалось, в этом случае представляются перспективными вариационные и проекционные методы [29], которые обычно точнее определяют интегральные характеристики решения, чем само решение. Рассмотрим пример, когда расчет D_0 выполняется аналитически и сводится к простым квадратурам.

Пусть распространение примеси происходит в потоке в виде плоского слоя $x \in (0, 1)$, $y \in (-\infty, +\infty)$, $z \in (-\infty, +\infty)$ при отсутствии зависимости компонентов матрицы диффузии $D_{\mu\nu}$ от переменной y, точнее, будем полагать $D_{xy} = D_{yz} = 0$, а остальные компоненты $D_{\mu\nu}$ зависят только от x и z.

Выше показано, что задачу определения коэффициента D_0, точнее, нахождения основной вспомогательной функции N можно разбить на две части: диффузионную (определение функции R) и гидродинамическую (определение функции М).

Диффузионная часть. При отмеченных условиях для матрицы **D** задача определения функции R (2.11) имеет вид

$$\frac{d}{dx} D_{xx}\frac{dR}{dx} + \frac{dD_{xz}}{dx} = 0, \quad D_{xx}\frac{dR}{dx} + D_{xz}\bigg|_{x=0;1} = 0 \tag{6.1}$$

В соотношения (6.1) входят полные производные по x, поскольку зависимость от z – параметрическая. Первый интеграл уравнения (6.1) дает для функции R уравнение $dR/dx = -D_{xz}/D_{xx}$. Подставляя это уравнение в формулу (3.5) (или (3.6)) при $\mathrm{Pe} = 0$, приходим к следующей зависимости для "диффузионной части" коэффициента эффективной диффузии:

$$D_D(z) = \langle D_{zz}\rangle - \langle D_{xz}^2 / D_{xx}\rangle = \int_0^1 \frac{(D_{xx}D_{zz} - D_{xz}^2)dx}{D_{xx}} \tag{6.2}$$

В числителе подынтегрального выражения (6.2) стоит минор матрицы **D**, который, так же как и знаменатель D_{xx}, положителен в силу положительной определенности матрицы **D** (критерий Сильвестра). Поэтому $D_D > 0$.

Гидродинамическая часть. В данном случае необходимо решить задачу (2.10) и на основе полученного решения определить среднее значение $\langle D_{ij}(\partial \mathrm{M}/\partial x_i)(\partial \mathrm{M}/\partial x_j)\rangle$ в формуле (3.6). Форма профиля скорости в плоском канале хорошо известна [30] и в переменных (1.6) имеет вид $W(x) = 4(x - x^2 - 1/6)$, где из скорости течения вычтена средняя по сечению скорость и в качестве масштаба W_* взято максимальное значение скорости в канале.

Функция М при отмеченных условиях определяется задачей

$$\frac{d}{dx} D_{xx}\frac{d\mathrm{M}}{dx} = 4\left(x - x^2 - \frac{1}{6}\right), \quad \frac{d\mathrm{M}}{dx}\bigg|_{x=0;1} = 0 \tag{6.3}$$

Проинтегрировав уравнение (6.3) один раз непосредственно при учете граничных условий и подставив $d\mathrm{M}/dx$ в гидродинамическую часть коэффициента дисперсии, получаем

$$D_H(z) = \frac{4}{9}\mathrm{Pe}^2 \int_0^1 \frac{(3x^2 - 2x^3 - x)^2 dx}{D_{xx}(x,z)} \tag{6.4}$$

При $D_{xx} = \text{const} = 1$ интеграл легко находится и получается известный [31] результат для плоского канала $D_H = 2\text{Pe}^2/945$ (в [31] число Pe меньше в 2 раза). Полный коэффициент эффективной диффузии определяется как сумма выражений (6.2) и (6.4)

$$D_0(z) = D_D(z) + D_H(z)$$

7. Обобщение уравнения эффективной диффузии. При выводе уравнения эффективной диффузии существенно использовались два условия: обращение в нуль нормальной к границе канала компоненты вектора скорости и непроницаемость этой границы для потока вещества. Первое требование (и даже более сильное) $\mathbf{V}|_\gamma = 0$ традиционно применяется при построении уравнения дисперсии вещества. Принятое здесь условие $V_n|_\gamma = 0$ позволяет использовать теорию к течениям со свободной границей, на которой $\mathbf{V} \neq 0$ (но $V_n = 0$), а также в потоках идеальной жидкости. Не сложно распространить также теорию на задачи переноса вещества в канале с проницаемыми стенками (со вдувом), а также на проблемы, связанные с диффузионным обменом веществом через границу канала.

При наличии вдува средняя по сечению скорость потока меняется с координатой z. Однако если интенсивность вдува незначительна, точнее, если в переменных (1.6) условие отсутствия полного потока вещества через границу канала можно записать в виде

$$n_i\left(D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j} + \varepsilon D_{iz}\frac{\partial C}{\partial z} + \varepsilon^2 U_i C\right)\Bigg|_\gamma = 0$$

(т.е. интенсивность вдува порядка ε^2), то можно показать, что уравнение эффективной диффузии (2.14) (или (5.1)) сохраняет свою форму.

Аналогичным образом предложенный вывод уравнения эффективной диффузии (теплопроводности) естественным образом обобщается на наличие источников массы (тепла) в объеме канала и притока массы (тепла) через его боковую поверхность. Если масштабы величин этих источников согласованы с характерным временным масштабом задачи, точнее, в безразмерных переменных (1.6) они имеют порядок ε^2, т.е. в правую часть уравнения (1.5) войдет слагаемое $-\varepsilon^2 Q(C, x, y, z)$, а граничное условие (1.7) примет вид $n_i D_{ij}\partial C/\partial x_j|_\gamma + \varepsilon n_i D_{iz}\partial C/\partial z|_\gamma = -\varepsilon^2 q(C, z)\ s/\gamma$, то уравнение эффективной диффузии (теплопроводности) заменится уравнением

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \text{Pe}\, w\frac{\partial G}{\partial z} + \langle Q(G,z)\rangle + q(G,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(D_0(z)\frac{\partial G}{\partial z}\right) \tag{7.1}$$

с тем же значением коэффициента эффективной диффузии (температуропроводности), что и найдено ранее. Ясно, что осредненный источник массы (тепла) Q будет зависеть только от функции G и координаты z. Эти аргументы и оставлены в функции источника массы (тепла) в приведенном уравнении.

Тот факт, что интенсивность источников должна быть малой, чтобы естественным образом "вписаться" в уравнение дисперсии, имеет принципиальное значение и согласуется с анализом [7, 16] и других работ по этому вопросу. Отметим также, что можно перенести данную теорию на случай медленного изменения площади сечения канала вдоль его осевой координаты [19], что скажется на использовании в выкладках формулы осреднения (1.8).

Заключение. Предложено асимптотически обоснованное при $\varepsilon \to 0$ сведение полного уравнения переноса вещества (1.1) к уравнению для средней по сечению канала (1.8) концентрации примеси (2.14) (или (5.1)). В исходном уравнении основные параметры – вектор скорости $\mathbf{V}$ и анизотропный тензор диффузии $\mathbf{D}^*$ – в общем случае – функции трех пространственных координат, тогда как в эффективном уравнении диффузии (5.1) коэффициент дисперсии D_0 зависит только от продольной для канала координаты. В качестве области конвективного переноса массы (тепла) взят цилиндрический канал произвольного поперечного сечения. Для определения коэффициента эффективной диффузии D_0 предложены зависимости (2.15), (3.2), (3.4)–(3.7), (3.10), включающие вспомогательные функции N (также M и R согласно (2.9)), для расчета которых сформулированы краевые задачи (2.8), (2.10), (2.11) и предложены вариационные подходы, опирающиеся на функционалы (4.1)–(4.3). Начальное условие (4.8) для уравнения дисперсии (5.1) получается осреднением по сечению канала начального условия исходной задачи (1.4). Отмечена возможность обобщения уравнения дисперсии (5.1) на случай наличия источников массы (тепла) как в объеме, так и на стенках канала. В результате в общем случае получается нелинейное уравнение эффективной диффузии (теплопроводности) (7.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Taylor G.* Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1953. V. 219. № 1137. P. 186–203.
2. *Aris R.* On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1956, V. 235. № 1200. P. 67–77.
3. *Gill W.N., Sankarasubramanian R.* Exact analysis of unsteady convective diffusion // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1970. V. 316. № 1526. P. 341–350.
4. *Марон В.И.* Распространение примеси в ламинарном потоке в круглой трубе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 3. С. 97–103.
5. *Фикс В.Б.* О влиянии конвекции на диффузию // Журн. техн. физики. 1957. Т. 27. № 6. С. 1282–1288.
6. *Smith R.* Longitudinal dispersion coefficient for varying channels // J. Fluid Mech. 1983. V. 130. P. 299–314.
7. *Дильман В.В., Кронберг А.Е.* О продольной дисперсии при ламинарном движении жидкости в круглой трубе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 1. С. 81–86.
8. *Smith R.* Shear dispersion along a rotating axle in a closely fitting shaft // J. Fluid Mech. 1990. V. 219. P. 647–658.
9. *Мошинский А.И.* Дисперсия примеси в неодномерных потоках // ПМТФ. 1990. № 4. С. 104–111.
10. *Brenner H., Nadim A., Haber S.* Long-time molecular diffusion, sedimentation and Taylor dispersion of a fluctuating cluster of interacting Brownian particles // J. Fluid Mech. 1987. V. 183. P. 511–542.
11. *Колтунова Л.Н.* О диффузии в неоднородном поле скорости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 5. С. 122–128.
12. *Smith R.* Stratification-induced lateral dispersion of a density anomaly // J. Fluid Mech. 1997. V. 353. P. 197–203.
13. *Уфлянд Я.С.* Точное решение задачи нестационарной конвективной диффузии в цилиндре // Журн. техн. физики. 1987. Т. 57. № 2. С. 398–400.
14. *Ерошенко В.М., Зайчик Л.И.* Продольная диффузия примеси в трубе с проницаемыми стенками // Инж.-физ. журн. 1980. Т. 38. № 2. С. 314–317.
15. *Лурье М.В., Марон В.И.* Распространение примеси твердых частиц в потоке жидкости в трубе // Инж.-физ. журн. 1979. Т. 36. № 5. С. 847–853.
16. *Дильман В.В., Кронберг А.Е.* Релаксационные явления при продольном перемешивании // Теор. основы хим. технологии. 1983. Т. 17. № 5. С. 614–629.
17. *Марон В.И.* Дисперсия радиоактивной примеси в потоке в трубе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 1. С. 174–176.
18. *Дильман В.В., Беннекер А., Кронберг А.Е., Вестертерп К.Р.* Волновая модель продольного перемешивания в химических и теплообменных процессах с граничными условиями второго и третьего рода на поверхности канала // Теор. основы хим. технологии. 1997. Т. 31. № 4. С. 416–427.
19. *Мошинский А.И.* Дисперсия вещества в узких каналах слоя смазки // ПМТФ. 1992. № 3. С. 79–89.
20. *Batchelor G.K.* On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. Pt 2. P. 177–190.

21. *Чернышенко С.И.* Расчет отрывных течений маловязких жидкостей с помощью модели Бэтчелора // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 2. С. 40–45.
22. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 640 с.
23. *Aris R.* On the dispersion of a solute in pulsating flow through a tube // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1960. V. 259. № 1298. P. 370–376.
24. *Пригожин Л.Б.* Дисперсия примеси в пульсирующем потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 5. С. 24–30.
25. *Мошинский А.И.* Эффективная диффузия многокомпонентных смесей в неодномерных потоках // ПМТФ. 1991. № 4. С. 113–120.
26. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир, 1974. 304 с.
27. *Коул Дж.Д.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
28. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 555 с.
29. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
30. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 847 с.
31. *Уфлянд Я.С.* Точное решение задачи нестационарного конвективного теплообмена в плоском канале // Инж.-физ. журн. 1988. Т. 54. № 6. С. 1006–1009.

Поступила в редакцию
10.XII.1998

Санкт-Петербург