

УДК 532.529.6

© 2000 г. Ш.Х. ЗАРИПОВ, Л.М. ЗИГАНГАРЕЕВА, О.М. КИСЕЛЕВ

**АСПИРАЦИЯ АЭРОЗОЛЯ В ТРУБКУ ИЗ НЕПОДВИЖНОЙ СРЕДЫ**

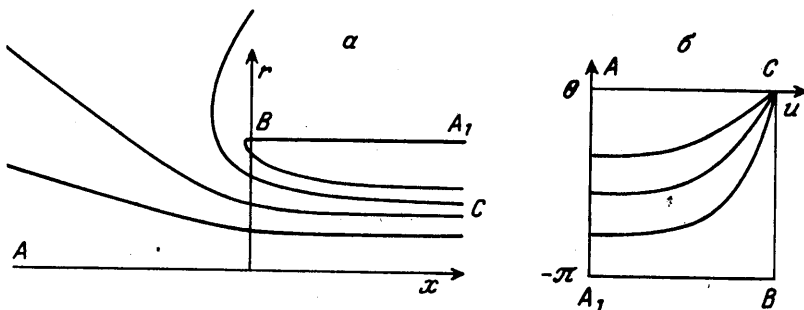
Решена задача аспирации аэрозоля в круглую тонкостенную трубку из неподвижной среды. Исследована зависимость коэффициента аспирации от числа Стокса и стационарной скорости оседания. Дано сравнение полученных результатов с расчетными данными [1, 2] и с экспериментальной формулой [3].

Прямые методы исследования аэрозолей предполагают непосредственный отбор пробы аэрозоля в измерительное устройство. Возникающая при этом неоднородность поля скоростей в окрестности входной пробоотборной трубки приводит к изменениям концентрации частиц. Для анализа этих изменений вводится понятие коэффициента аспирации, представляющего собой отношение средней поточной концентрации в измерительном устройстве к счетной концентрации частиц в невозмущенной среде. Теоретически или экспериментально найденный коэффициент аспирации для заданного способа отбора позволяет восстановить значение концентрации исследуемого аэрозоля. Наиболее полный обзор работ по определению коэффициента аспирации приводится в книге [4]. Математические методы расчета коэффициента аспирации приведены в монографиях [5, 6]. Менее изученной по сравнению с аспирацией из движущихся потоков является аспирация аэрозоля из неподвижной среды. Экспериментально отбор пробы аэрозоля из неподвижной среды изучался в [7, 8], а теоретические исследования проводились в [1, 2]. В работе [3] на основе обработки экспериментальных данных предложена формула для коэффициента аспирации как функции числа Стокса и стационарной скорости оседания.

В настоящей работе рассматривается задача об аспирации аэрозоля в круглую тонкостенную трубку из неподвижного воздуха. Моделирование течения аэрозоля в окрестности входного отверстия сводится к решению двух задач: определению поля скоростей несущей среды и расчету траекторий частиц в найденном поле скоростей. Несущая среда моделируется осесимметричным потенциальным течением несжимаемой жидкости. Поле скоростей газа строится с помощью эффективного численно-аналитического метода с использованием переменных годографа скорости несущей фазы. Уравнения движения частиц также интегрируются в плоскости годографа скорости.

**1. Модель течения несущей среды.** Рассматривается втекание газа в полубесконечную круглую цилиндрическую трубу. Газ заполняет все пространство вне трубы и покоится на бесконечности. На острой кромке трубы происходят отрыв потока и образование струи. Течение газа моделируется осесимметричным потенциальным течением идеальной несжимаемой жидкости. Схема течения в меридиональной полуплоскости цилиндрических координат  $x, r$  показана на фиг. 1,  $a$  (ось  $x$  – ось симметрии потока,  $A_1B$  – стенка трубы,  $BC$  – свободная поверхность,  $A, A_1, C$  – бесконечно удаленные точки).

Пусть  $U$  – скорость газа,  $U_C$  – значение  $U$  на свободной поверхности,  $u = U/U_C$ ,  $\theta$  – угол наклона вектора скорости к оси  $x$ . Область  $\Sigma$  в плоскости  $u, \theta$ , соответствующая области течения в полуплоскости  $x, r$  приведена на фиг. 1, б.



Фиг. 1. Схема течения в полуплоскости  $r \geq 0$  и соответствующая область в плоскости  $(u, \theta)$

Потенциал скорости  $\varphi$  и функция тока  $\psi$  вводятся с помощью соотношений

$$u \cos \theta = \varphi_x = \frac{1}{r} \psi_r, \quad u \sin \theta = \varphi_r = -\frac{1}{r} \psi_x \quad (1.1)$$

(нижними индексами отмечаются частные производные по  $x, r, u, \theta$ ). В области  $\Sigma$  функция тока  $\psi$  удовлетворяет интегродифференциальному уравнению  $R(\psi) = 0$ , приведенному в [9].

Функции  $\varphi_\theta, \varphi_u, x_u, r_u, x_\theta, r_\theta$  могут быть выражены через функцию тока  $\psi$  и ее частные производные в виде

$$\varphi_\theta = \frac{u}{r} \psi_u, \quad \varphi_u = \frac{r_\theta}{r^2} \psi_u - \left( \frac{r_u}{r^2} + \frac{1}{ru} \right) \psi_\theta \quad (1.2)$$

$$\left\{ \begin{matrix} x_u \\ r_u \end{matrix} \right\} = \frac{1}{ru^2} \left( -\psi_\theta \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} + \frac{P}{S} \begin{Bmatrix} \operatorname{ctg} \theta \\ 1 \end{Bmatrix} - u \psi_u \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix} \right) \quad (1.3)$$

$$\left\{ \begin{matrix} x_\theta \\ r_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{1}{ru} \left( u \psi_u \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} - \psi_\theta \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix} \right)$$

Граничные условия для  $\psi$  имеют вид

$$\psi = 0, (u, \theta) \in AC; \quad \psi = 1, (u, \theta) \in A_1BC; \quad \psi = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta), (u, \theta) \in AA_1 \quad (1.4)$$

Последнее из соотношений (1.4) имеет место во всем физическом пространстве при радиальном течении жидкости к стоку.

Точка  $C (u = 1, \theta = 0)$  является особой для функции  $\psi$ : при приближении к  $C$  предельное значение  $\psi$  содержится в интервале  $[0, 1]$  и зависит от направления подхода к этой точке. Для выделения этой особенности используем переменные

$$\sigma = (\theta^2 + \zeta^2)^{1/2}, \quad \omega = \operatorname{arctg} \frac{\theta}{\zeta}, \quad \zeta = u - 1$$

$$\omega = -\pi, (u, \theta) \in AC; \quad \omega = -\pi/2, (u, \theta) \in CB$$

Главный член асимптотического разложения функции  $\psi$  по малому параметру  $\sigma$  в окрестности точки  $C$  ищем в виде  $\psi_1 = f_1(\omega)$ . Определение  $f_1(\omega)$  сводится к решению краевой задачи

$$4f_1^2 f_1'' - 4f_1 f_1'^2 \cos^2 \omega + f_1'^3 \sin \omega \cos \omega = 0, \quad f_1(-\pi) = 0, \quad f_1(-\pi/2) = 1 \quad (1.5)$$

которое находится численным интегрированием (см. [9]).

Введем функцию  $\psi^\circ$ :

$$\psi^\circ = [(f_1(\omega) - 1)\cos(\theta/2) + 1][1 - \cos \pi u] / 2 + (1 + \cos \pi u)(1 - \cos \theta) / 4$$

Функция  $\psi^\circ$  удовлетворяет граничным условиям (1.4) и с той же точностью, что и  $\psi_1 = f_1(\omega)$ , описывает поведение функции тока  $\psi$  в окрестности точки  $C(\psi^\circ = f_1(\omega) + O(\sigma^2)$  при  $\sigma \rightarrow 0$ ).

Решение краевой задачи  $R(\psi) = 0$  (1.4) представим в виде  $\psi = \psi^\circ + \chi$ . Функция  $\chi$  удовлетворяет уравнению  $R(\psi^\circ + \chi) = 0$  и однородным краевым условиям. Она определяется с помощью решения последовательности линейных разностных краевых задач [9].

Для более точного расчета поля течения при малых  $u$  область  $\Sigma$  отображается на квадрат  $\Sigma_1 = \{(\xi, \eta) | 0 < \xi < 1, 0 < \eta < 1\}$  с помощью преобразования

$$\xi = 1 - \frac{\ln[(\beta+1-u)/(\beta-1+u)]}{\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]}, \quad \eta = -\frac{\theta}{\pi}$$

$$\beta = 1 + \epsilon, \quad 0 < \epsilon \ll 1$$

В области  $\Sigma_1$  применяется пятиточечная конечно-разностная схема на равномерной прямоугольной сетке, содержащей 200 шагов по оси  $\xi$  и 100 шагов по оси  $\eta$  (при  $\beta = 1,03$  получается  $\Delta u_1 \approx 0,0006$ ,  $\Delta u_{200} \approx 0,011$ ). Для ее реализации используется метод последовательной верхней релаксации. Величины  $x, r$  определяются во всех узлах сетки интегрированием выражений (1.3) с применением сплайн-аппроксимации сеточных значений  $\psi$  для вычисления  $\psi_u, \psi_\theta$ . Значения  $\Phi_u, \Phi_\theta$  в узлах сетки находятся по формулам (1.2).

На основании теоремы об изменении количества движения можно получить равенство [10]  $r_C^2 / R_0^2 = 0,5$ , где  $R_0$  – радиус трубки,  $r_C$  – радиус струи на бесконечности. В полученном численном решении данное равенство выполняется с погрешностью, не превышающей 0,04%.

**2. Уравнения движения частиц.** Уравнения движения невзаимодействующих частиц представляются в безразмерной форме

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{ds} &= \frac{F(\text{Re}_p)(u \cos \theta - v_x) + v_s}{v \text{St}} \\ \frac{dv_r}{ds} &= \frac{F(\text{Re}_p)(u \sin \theta - v_r)}{v \text{St}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$v_x = \frac{V_x}{U_a}, \quad v_r = \frac{V_r}{U_a}, \quad v_s = \frac{V_s}{U_a}, \quad v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{v_x^2 + v_r^2}$$

$$\text{St} = \frac{V_s U_a}{2R_0 g}, \quad \text{Re}_p = \frac{U_a \delta}{\nu} \sqrt{(u_x - v_x)^2 + (u_r - v_r)^2}$$

где  $V_x, V_r$  – составляющие скорости частицы в плоскости  $(x, r)$ ,  $s$  – безразмерная длина дуги траектории,  $t$  – безразмерное время,  $V_s$  – стационарная скорость оседания,  $U_a = 0,5U_C$  – скорость аспирации,  $\delta$  – диаметр частицы,  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости,  $\text{St}$  – число Стокса,  $\text{Re}_p$  – число Рейнольдса частицы. Величины  $2R_0$  и  $U_a$  принимаются за масштабы длины и скорости. Функция  $F(\text{Re}_p)$  выражается с хорошей точностью в интервале  $\text{Re}_p \in [0, 1000]$  по формуле  $F(\text{Re}_p) = (1 + 0,158 \text{Re}_p^{2/3})$ . Сила тяжести направлена по оси  $x$ . В приближении стоксового закона сопротивления вязкой среды стационарная скорость осаждения представляется в виде  $V_s = \tau g$  ( $\tau = \rho_p \delta^2 / 18\mu$ ,  $\rho_p$  – плотность вещества частицы,  $\mu$  – вязкость газа). В более общем

случае скорость осаждения может быть найдена из уравнения  $V_s = \tau g / [1 + 0,158(V_s \delta / \nu)^{2/3}]$ .

В [11, 12] для случая плоского течения был предложен метод расчета траекторий частиц, основанный на преобразовании уравнений их движения к переменным графика скорости несущей среды. Ниже этот подход обобщается на случай осесимметричного течения.

Учитывая (1.1) и  $dx/ds = v_x / v$ ,  $dr/ds = v_r / v$ , представим производные функций  $\varphi$  и  $\psi$  по переменной  $s$  в виде

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{v_1}{v}, \quad \frac{d\psi}{ds} = \frac{v_2}{v}, \quad v_1 = r(u_x v_r - u_r v_x), \quad v_2 = u_x v_x + u_r v_r \quad (2.2)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \frac{d\theta}{ds}, \quad \frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial\psi}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \frac{d\theta}{ds} \quad (2.3)$$

Сравнивая (2.2) и (2.3), получим

$$\frac{du}{ds} = \frac{D_u}{v}, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{D_\theta}{v} \quad (2.4)$$

$$D_u = \frac{1}{Q} \left( v_1 \frac{\partial\psi}{\partial\theta} - v_2 \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right), \quad D_\theta = \frac{1}{Q} \left( v_2 \frac{\partial\varphi}{\partial u} - v_1 \frac{\partial\psi}{\partial u} \right)$$

$$Q = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \frac{\partial\psi}{\partial u}$$

Введем

$$\frac{d\gamma}{ds} = \sqrt{\left( \frac{du}{ds} \right)^2 + \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2} = \frac{D}{v}, \quad D = \sqrt{D_u^2 + D_\theta^2} \quad (2.5)$$

где  $\gamma$  – длина дуги траектории в плоскости  $(u, \theta)$ . Из (2.1), (2.4) и (2.5) следует

$$\frac{dv_x}{d\gamma} = \frac{F(\text{Re}_p)(u \cos \theta - v_x) + v_s}{\text{St} D}$$

$$\frac{dv_r}{d\gamma} = \frac{F(\text{Re}_p)(u \sin \theta - v_r)}{\text{St} D}, \quad \frac{du}{d\gamma} = \frac{D_u}{D}, \quad \frac{d\theta}{d\gamma} = \frac{D_\theta}{D} \quad (2.6)$$

Начальные условия для уравнений (2.6) представляются в виде

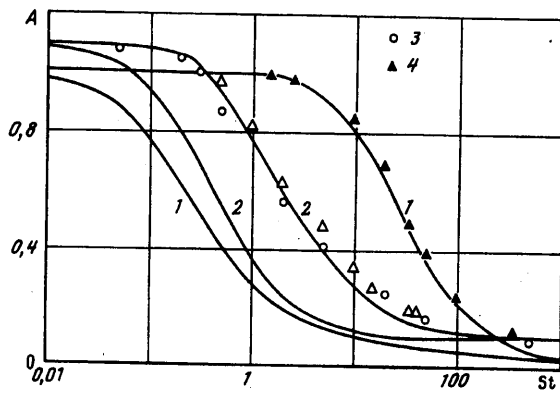
$$\theta = \theta_0, \quad u = u_0, \quad v_x = u_0 + v_s, \quad v_r = 0 \quad (\gamma = 0) \quad (2.7)$$

**3. Результаты расчетов.** Уравнения (2.6) численно интегрируются методом Рунге – Кутты. На каждом шаге интегрирования для определения текущих значений функций  $\psi$ ,  $\partial\psi/\partial u$ ,  $\partial\psi/\partial\theta$  используется интерполяция функций внутри элемента сетки по значениям в узлах. Методом итераций находится предельная траектория, отделяющая поток частиц, попадающих в трубку от частиц, проходящих мимо нее. Начальная ордината предельной траектории  $r_0$  позволяет рассчитать коэффициент аспирации по формуле

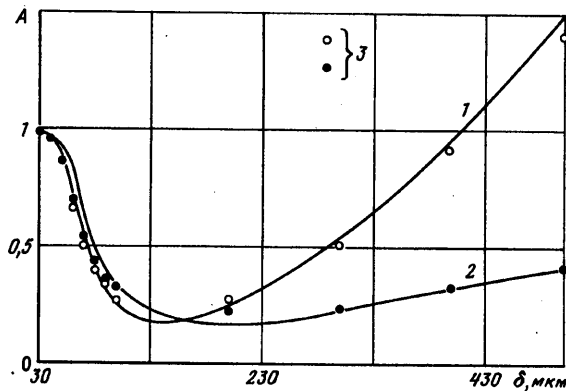
$$A = \frac{c_a}{c_0} = \frac{r_0^2 V_s}{R_0^2 U_a} \quad (3.1)$$

где  $c_a$ ,  $c_0$  – концентрации частиц внутри трубки и на бесконечном расстоянии от входа.

Частицы попадают в трубку вследствие инерционного улавливания и седиментационного осаждения. Можно выделить три предельных случая, в которых коэффициент аспирации выражается в явном виде через скорости седиментации и аспирации [3]. В случае невесомых частиц ( $V_s = 0$ ,  $\text{St} = 0$ ) все частицы из аспирируемого объема



Фиг. 2. Зависимость коэффициента аспирации  $A$  от числа Стокса  $St$  для  $v_s = 0,01$  и  $0,1$  (правые кривые 1 и 2 соответственно). Левые кривые 1, 2 соответствуют расчету по формуле (3.2), 3 – данные из работы [2], 4 – из [1]



Фиг. 3. Зависимость коэффициента аспирации  $A$  от диаметра частицы  $\delta$  (кривая 1 – реальный закон сопротивления, 2 – соответствует стоксовому сопротивлению,  $U_a = 5$  м/с,  $R_0 = 0,5$  см); 3 – данные из [2]

воздуха попадут в трубку:  $A = 1$ . Для случая безынерционных частиц ( $St = 0$ ), но с конечной скоростью гравитационного осаждения ( $V_s \neq 0$ ) отличие коэффициента аспирации от единицы связано с седиментацией частиц:  $A = 1 + V_s/U_a$ . Для предельного случая сильно инерционных частиц ( $St = \infty$ ) попадание частиц в трубку целиком обусловлено только седиментационным механизмом:  $A = V_s/U_a$ . В общем случае коэффициент аспирации является функцией числа Стокса  $St$  и безразмерной скорости седиментации  $v_s$ . В [3] на основе обработки экспериментальных данных построена формула, выражающая зависимость коэффициента аспирации от стационарной скорости осаждения и числа Стокса

$$A = v_s + \exp\left(-\frac{\alpha_1 St^\lambda}{1 + \alpha_2 St}\right) \quad (3.2)$$

$$\alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = 2, \quad \lambda = v_s^{1/2} + 1$$

На фиг. 2 показаны полученные в предположении стоксового сопротивления результаты расчетов коэффициента аспирации при варьировании числа Стокса. В [1]

для определения поля скоростей решаются уравнения Навье – Стокса при числе Рейнольдса потока  $Re = 12\,000$ , поле скоростей несущей среды в [2] определяется в рамках потенциального течения несжимаемой жидкости с заданной скоростью на входе в трубку. Наблюдается очень хорошее согласование всех расчетных кривых, что свидетельствует о незначительном влиянии на аспирацию различий выбранных моделей течения в окрестности входной трубки. В то же время расчеты по формуле (3.2) предсказывают меньшие значения коэффициента аспирации. Расхождение увеличивается с уменьшением скорости осаждения. Влияние отклонения реального сопротивления от стоковского закона демонстрирует фиг. 3, где приведена зависимость коэффициента аспирации от диаметра частицы. Модель с использованием стоковского сопротивления предсказывает заниженные значения коэффициента для частиц больших размеров.

**Заключение.** Развита метод расчета траекторий частиц для осесимметричных течений аэрозоля с использованием переменных годографа скорости несущей фазы. Решена задача об аспирации аэрозоля в круглую трубку из неподвижной среды. Расчетные исследования показали близость коэффициентов аспирации, полученных на основе различных моделей течений несущей среды. Наблюдаемое расхождение между коэффициентами аспирации, теоретически рассчитанным и полученным из экспериментальной формулы, требует дальнейших исследований для объяснения его причин. Одной причиной может быть недостаточное количество экспериментальных данных, использованных в [3] для получения аппроксимационной формулы. Изложенный в статье подход может быть применен и к задаче об аспирации в движущемся потоке.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00169).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agarwal J.K., Liu B.Y. H. A criterion for accurate aerosol sampling in calm air // Amer. Indust. Hyg. Assoc. Journal. 1980. V. 41. № 3. P. 191–197.
2. Dunnett S. A Mathematical Study of the Sampling Characteristics of a Thinwalled Sampler Operating in Calm Air // Aerosol Sci. and Technol. 1992. V. 17. № 2. P. 93–104.
3. Grinshpun S., Willeke K., Kalatoor S. A general equation for aerosol aspiration by thin-walled sampling probes in calm and moving air // Atmospheric Environment. 1993. V. 27A. № 9. P. 1459–1470.
4. Vincent J. Aerosol Sampling-Science and Practice. Chichester, U.K.: Wiley, 1989. 450 p.
5. Волощук В.М. Введение в гидродинамику грубодисперсных аэрозолей. Л.: Гидрометеоздат, 1971. 208 с.
6. Dunnett S.J., Ingham D.B. The Mathematics of Blunt Body Sampling. Lecture Notes in Engineering. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
7. Беляев С.П., Кустов В.Т. Отбор проб аэрозолей из неподвижной среды // Тр. Ин-та эксперим. метеорологии. 1980. Вып. 25(93). С. 102–108.
8. Липатов Г.Н., Гриншпун С.А., Шингарев Г.Л. Отбор аэрозольных проб из неподвижной среды в вертикальный цилиндрический зонд // Метеорология и гидрология. 1985. № 12. С. 99–102.
9. Зигангареева Л.М., Киселев О.М. О безотрывном обтекании тела вращения с одно-временным отбором и выбросом жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 1. С. 14–21.
10. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
11. Зарипов Ш.Х. Расчет траекторий аэрозольных частиц в плоскости годографа скорости // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 129–134.
12. Зарипов Ш.Х., Киселев О.М. Об аспирации аэрозоля в щель между двумя пластинами // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1996. Т. 32. № 4. С. 487–491.