

УДК 532.59

© 2000 г. О.Ю. ЦВЕЛОДУБ

## РЕЗОНАНСНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ВОЛН В МОДЕЛИ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается поведение длинноволновых возмущений на границе раздела двух слоев различных жидкостей с учетом межфазного поверхностного взаимодействия, описываемое квазипериодическими решениями псевдодифференциального уравнения.

1. Рассмотрим систему, состоящую из двух идеальных, несмешивающихся между собой жидкостей, находящихся в поле тяжести. Тяжелая жидкость плотности  $\rho_2$  занимает нижнюю часть полупространства ( $z < 0$ ). Над ней расположен тонкий слой более легкой жидкости плотности  $\rho_1$ , ограниченный сверху твердой горизонтальной плоскостью. Толщина слоя в отсутствие возмущений –  $h_0$ . Коэффициент межфазного поверхностного взаимодействия –  $\sigma$ .

Без учета поверхностного натяжения длинноволновые возмущения границы раздела для такой системы описываются классическим уравнением Бенжамина – Оно [1]. Это уравнение, в частности, является хорошей моделью для качественного изучения внутренних волн в стратифицированной жидкости, например в океане.

В случае очень тонких слоев при рассмотрении возмущений границы необходим учет сил межфазного поверхностного взаимодействия. Для длинноволновых возмущений задача также сводится к анализу одного уравнения.

При выполнении неравенства  $\sigma \gg g(\rho_2 - \rho_1)h_0^2$  (где  $g$  – ускорение свободного падения) для вертикальных смещений границы раздела имеем [2]

$$u_t + (u + u^2 - \alpha Lu - \beta u_{xx})_x = 0 \quad (1.1)$$

$$\alpha = \frac{\rho_2}{2\rho_1}, \quad \beta = \frac{\sigma}{g(\rho_2 - \rho_1)h_0^2}$$

Здесь  $u$  – смещение границы раздела, индекс при  $u$  означает дифференцирование по соответствующей переменной,  $\alpha$  и  $\beta$  – положительные постоянные коэффициенты, причем  $\beta \gg \alpha$ ,  $L$  – линейный симметричный псевдодифференциальный оператор. В  $k$ -пространстве *фурье-гармоник* он определяется символом  $|k|$  ( $\|\$  – знак модуля).

Уравнение (1.1) – длинноволновое уравнение, учитывающее влияние малой нелинейности и дисперсии для волны, распространяющейся в одну сторону. При  $\alpha = 0$  оно переходит в широко известное уравнение Кортевега – де Вриза, в случае  $\beta = 0$  имеем уравнение Бенжамина – Оно. Четвертый член в уравнении (1.1) отражает нелокальный характер связи между возмущениями границы раздела и давления, а пятый ответствен за капиллярную дисперсию фазовых скоростей линейных возмущений. Уравнение, подобное уравнению (1.1), было получено в [3] и использовалось там для изучения возмущений в пограничном слое.

Для стационарного бегущих волн  $u = u(\xi)$ ,  $\xi = x - ct$  уравнение (1.1) принимает вид

$$-cu_\xi + (u + u^2 - \alpha Lu - \beta u_{\xi\xi})_\xi = 0 \quad (1.2)$$

С помощью замены

$$u = rH, \quad x - t = bx_1, \quad t = b_1 t_1, \quad \xi = b\xi_1, \quad (1.3)$$

$$r = \frac{\alpha^2}{\beta}, \quad b_1 = \frac{\beta^2}{\alpha^3}, \quad b = \frac{\beta}{\alpha}, \quad C = \frac{(c-1)}{r}$$

уравнения (1.1) и (1.2) переписутся соответственно в виде (индексы у новых переменных опускаем)

$$H_t + (H^2 - LH - H_{xx})_x = 0 \quad (1.4)$$

$$-CH_\xi + (H^2 - LH - H_{\xi\xi})_\xi = 0 \quad (1.5)$$

Здесь и ниже индекс означает дифференцирование по соответствующей переменной.

В [4] были построены периодические и солитонные решения уравнения (1.5). Решения конечной амплитуды находились численно.

Если пренебречь в (1.4), (1.5) нелинейным членом, то легко находится, что фазовая скорость периодических бесконечно малых (линейных) возмущений есть следующая функция волнового числа  $k = 2\pi/\lambda$  ( $\lambda$  — длина волны):

$$C = k^2 - |k| \quad (1.6)$$

Из (1.3), (1.6) следует, что уравнения (1.4), (1.5) записаны в системе отсчета, движущейся с фазовой скоростью бесконечно длинных ( $k \rightarrow 0$ ) линейных волн.

Решения малой, но конечной амплитуды для данного волнового числа представлялись в виде рядов по малому параметру

$$H = \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots, \quad C = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots$$

В [4] было показано, что

$$H_1 = A \exp(ik\xi) + \bar{A} \exp(-ik\xi) \quad (1.7)$$

$$c_0 = k^2 - |k|, \quad c_1 = 0$$

$$\dot{H}_2 = A_2 \exp(2ik\xi) + \bar{A}_2 \exp(-2ik\xi)$$

$$A_2 = -\frac{A^2}{3k^2 - |k|}, \quad c_2 = -\frac{2A^2}{3k^2 - |k|}$$

Черта означает операцию комплексного сопряжения.

Из (1.7) ясно, что в качестве малого параметра  $\varepsilon$  можно использовать само значение модуля амплитуды первой гармоники  $|A|$ . Это решение является регулярным для всех значений волновых чисел  $k$ , за исключением окрестности особой точки  $k_* = 1/3$ .

При  $k \rightarrow k_*$  решение (1.7) неограниченно растет и используемое разложение становится несправедливым. Это связано с тем, что фазовые скорости линейных возмущений для первой и второй гармоник совпадают и выполняются условия для их резонанса. Поэтому в окрестности этой точки требуется проводить специальное исследование (в [4] данный случай не обсуждался). Рассмотрение этого интересного случая и является целью настоящей работы.

2. Будем искать пространственно-периодические решения уравнения (1.4) с волновыми числами, лежащими в окрестности  $k_*$  в виде ряда

$$H = \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots \quad (2.1)$$

Введем набор быстрых и медленных времен  $t_n = t\varepsilon^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Подставляя (2.1) в (1.4), получаем бесконечную систему линейных уравнений. Первому порядку по  $\varepsilon$  в этой системе отвечает уравнение

$$\frac{\partial H_1}{\partial t_0} - \frac{\partial}{\partial x} \left( LH_1 + \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (2.2)$$

Так как для волновых чисел, близких к  $k_*$ , фазовые скорости линейных возмущений для первой и второй гармоник близки и выполняются условия для их резонанса, периодические решения уравнения (2.2) ищем в виде

$$H_1 = A \exp[ik(x - c_0 t_0)] + \bar{A} \exp[-ik(x - c_0 t_0)] + \\ + B \exp[2ik(x - c_0 t_0)] + \bar{B} \exp[-2ik(x - c_0 t_0)] \quad (2.3)$$

$$c_0 = k_*^2 - |k_*|, \quad k = k_* + \Delta$$

Здесь  $\Delta \ll k_*$ .

Задача – построить решения, у которых амплитуды  $A$  и  $B$  являются функциями только более медленных времен, чем  $t_0$ . Подставляя решения (2.3) в (2.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых экспонентах с учетом (1.6), оставляя члены только первого порядка по  $\Delta$ , получим

$$\left( \frac{\partial A}{\partial t_0} - \frac{i\Delta}{9} A \right) \exp[ik(x - c_0 t_0)] = 0; \quad \left( \frac{\partial B}{\partial t_0} + \frac{4i\Delta}{9} B \right) \exp[2ik(x - c_0 t_0)] = 0 \quad (2.4)$$

Чтобы можно было считать  $A$  и  $B$  не зависящими от  $t_0$ , необходимо, чтобы  $\Delta$  имело порядок малости не меньший, чем  $\varepsilon$ . Будем полагать, что они одного порядка, т.е. малым параметром в (2.1) служит само отклонение волнового числа от  $k_*$ . Тогда вторые члены в (2.4) должны быть перенесены в уравнение второго порядка.

В этом случае второму порядку по  $\varepsilon$  соответствует уравнение

$$\frac{\partial H_1}{\partial t_1} + \frac{\partial H_2}{\partial t_0} + \frac{\partial H_1^2}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( LH_2 + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} \right) + \underline{K} H_1 = 0 \quad (2.5)$$

Здесь последнее слагаемое, записанное в операторном виде, представляет собой члены, перенесенные из первого приближения. При действии оператора  $\underline{K}$  на первое слагаемое в (2.3) перед амплитудой  $A$  появляется множитель  $-i/9$ , а в третьем слагаемом перед  $B$  – множитель  $4i/9$ .

В уравнении (2.5) подчеркнуты секулярные члены (для  $H_1^2$  таковыми будет только часть слагаемых). Требование равенства их нулю для существования ограниченного решения  $H_2$  приводит к системе уравнений на амплитуды гармоник  $A$  и  $B$

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + \frac{2}{3} i \bar{A} B - \frac{i}{9} A = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial t_1} + \frac{2}{3} i A^2 + \frac{4}{9} i B = 0 \quad (2.6)$$

Если  $B = 0$ , то система имеет только тривиальные решения. Если же  $A = 0$ , то имеем случай ветвления решения в окрестности обычного волнового числа  $2k_*$ . Стационарно бегущие решения для этого случая были построены в [4].

Найдем частные решения системы (2.6), для которых решения исходного уравнения (1.4) с точностью до медленного времени  $t_1$  включительно представляют собой стационарно бегущие волны. Легко убедиться, что

$$A = A_0 \exp(ik_* \delta t_1), \quad B = B_0 \exp(2ik_* \delta t_1) \quad (2.7)$$

будут удовлетворять системе (2.6), если вещественные константы  $A_0$  (для опре-

деленности будем считать  $A_0 \geq 0$ , это можно всегда сделать подходящим выбором начала отсчета координаты  $x$ ) и  $B_0$  связаны с произвольным вещественным параметром  $\delta$  соотношениями

$$B_0 = \pm(1 - 3\delta)/6, \quad A_0 = ((3\delta - 1)(2 + 3\delta)/18)^{1/2} \quad (2.8)$$

Таким образом, соотношения (2.1), (2.3), (2.7) позволяют судить о характере ветвления от тривиального решения  $H = 0$  периодических бегущих решений уравнения (1.4), волновые числа которых лежат в окрестности особой точки  $k_*$ . Формула (2.8) показывает связь между поправкой к фазовой скорости (как видно из (2.3), (2.7), фазовая скорость волны в этом случае  $C = C_0 - \Delta\delta$ ) и значениями амплитуд первых двух гармоник  $A_0$  и  $B_0$ . Для каждого значения  $\delta$ , при котором может быть выполнено (2.8), существует два решения. Они отличаются друг от друга сдвигом гармоники  $B_0$  по фазе по отношению к первой гармонике  $A_0$  на  $\pi$ .

Из (2.8) следует, что такие решения существуют, если  $\delta \geq 1/3$  или  $\delta \leq -2/3$ .

Если  $\delta$  приблизится к нижней границе первого неравенства, то, как видно из (2.8), обе амплитуды  $-A_0$  и  $B_0$  одновременно стремятся к нулю. Это значит, что в окрестности особой точки с волновым числом  $k_*$  от тривиального решения  $H = 0$  происходит ветвление волнового семейства решений, у которого две первые гармоники имеют соизмеримые амплитуды. Это семейство параметризуется значениями  $\delta$  из области, задаваемой первым из приведенных выше неравенств. Причем в окрестности границы этой области, как следует из (2.8), преобладает и с ростом  $\delta$  быстрее растет амплитуда первой гармоники  $A$ . Для достаточно больших значений  $\delta$  обе гармоники этих семейств становятся соизмеримыми по амплитуде.

В случае, когда  $\delta \rightarrow -0 - 2/3$ ,  $A_0 \rightarrow 0$ , а  $B_0 \rightarrow \pm 1/2$ , т.е. остается конечной. Этим значениям  $\delta$  соответствуют решения вида (2.3), ответвляющиеся от периодического решения (1.7) с волновым числом  $2(k_* + \Delta)$  и имеющим амплитуду  $\pm \Delta/2$ . Другими словами, исходное решение (1.7), начиная с этих значений амплитуд и выше, становится неустойчивым к возмущениям с удвоенными пространственным периодом, т.е. к первой субгармонике с волновым числом  $(k_* + \Delta)$ .

Таким образом, в области  $\delta \leq -2/3$  два стационарно бегущих семейства периодических волн образуются не в результате непосредственного ветвления от тривиального решения, а формируются из исходного периодического семейства (1.7) после потери им устойчивости.

Для анализа общей структуры решений системы (2.6) представим каждую из комплексных функций  $A$  и  $B$  в виде  $A = A_1 \exp(i\varphi)$ ,  $B = B_1 \exp(i\psi)$ . Выделяя вещественные и мнимые части из (2.6) приходим к системе четырех уравнений на эти вещественные функции (индекс у  $A_1$  и  $B_1$  опускаем)

$$A' = \frac{2}{3} AB \sin \chi, \quad B' = -\frac{2}{3} A^2 \sin \chi \quad (2.9)$$

$$\varphi' = -\frac{2}{3} B \cos \chi + \frac{1}{6}, \quad \psi' = -\frac{2}{3} \frac{A^2}{B} \cos \chi - \frac{1}{6}$$

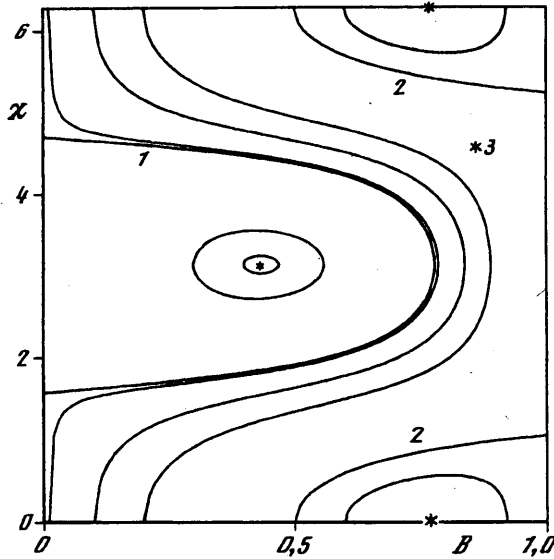
$$\chi = \psi - 2\varphi$$

Из первых двух уравнений следует интеграл движения

$$A^2 + B^2 = \text{const} = C_{00} \quad (2.10)$$

С учетом (2.10) из (2.9) получим "усеченную" систему

$$B' = -\frac{2}{3}(C_{00} - B^2) \sin \chi, \quad \chi' = -\frac{2}{3} \left( \frac{C_{00}}{B} - 3B \right) \cos \chi - \frac{2}{3} \quad (2.11)$$



Фиг. 1. Фазовый портрет решений системы (2.11).  
Кривые 1,2 – первая и вторая сепаратрисы из (2.14),  
3 – стационарные точки

Сравнение систем (2.6) и (2.11) позволяет понять, что полученным решениям (2.8) отвечают стационарные точки системы (2.11). Таких точек в общем случае четыре

$$B_{\pm} = \frac{1}{6}(1 \pm (1 + 12C_{00})^{1/2}), \quad \chi = 0; \quad B_{\pm} = \frac{1}{6}(-1 \pm (1 + 12C_{00})^{1/2}), \quad \chi = \pi$$

Из (2.8) и (2.11) следует соотношение  $C_{00} = (27\delta^2 - 3)/36$ , из которого видно, что все четыре неподвижные точки будут реализовываться, если  $C_{00} > 1/4$ . Это соответствует случаям, когда начальные значения амплитуд, задаваемые для решения систем (2.9) или (2.11), берутся достаточно большими. Если  $C_{00} \leq 1/4$ , то стационарных точек две:  $(B_-, 0)$  и  $(B_+, \pi)$ . Так как для этих значений  $C_{00}$  структура фазовых траекторий более простая, результаты, соответствующие этому случаю, здесь не приводятся.

Для анализа решений системы (2.11) рассмотрим структуру фазовых траекторий на плоскости  $(B, \chi)$ . Как ясно из (2.11), фазовые кривые описываются уравнением

$$\frac{d\chi}{dB} = \frac{(C_{00}/B - 3B)\cos\chi + 1}{(C_{00} - B^2)\sin\chi} \quad (2.12)$$

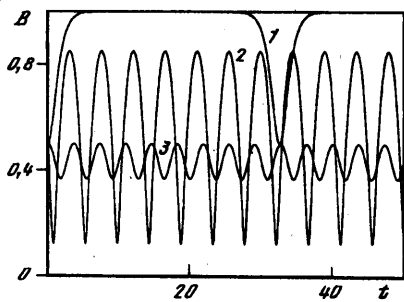
Уравнение (2.12) легко разрешается в квадратурах

$$\cos\chi = \frac{B^2 - C}{2(B^2 - C_{00})B}, \quad C = B_{00}^2 - 2B_{00}(B_{00}^2 - C_{00})\cos\chi_0 \quad (2.13)$$

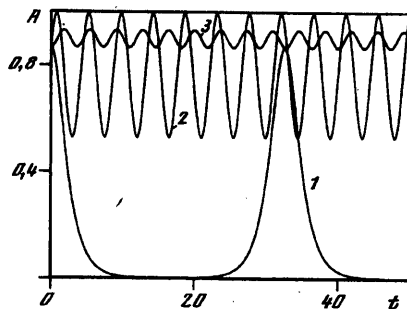
Здесь  $B_{00}$  и  $\chi_0$  – координаты начальной точки, определяющей соответствующую траекторию.

Так как фазовое пространство системы (2.11) имеет по  $\chi$  период  $2\pi$  и, кроме того, для преобразования  $B \rightarrow -B, \chi \rightarrow \pi - \chi$  кривые (2.13) инвариантны, то достаточно на фазовой плоскости  $(B, \chi)$  ограничиться рассмотрением области  $0 < B < (C_{00})^{1/2}, 0 < \chi < 2\pi$ .

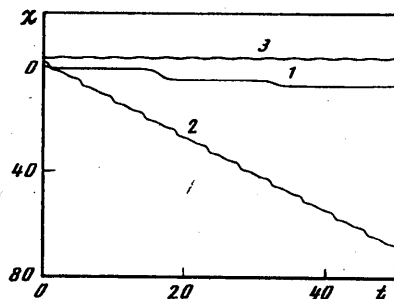
На фиг. 1 представлен фазовый портрет решений системы (2.11), когда  $C_{00} = 1$ . Для представленной области стационарные точки  $(0, 0,7676)$  и  $(\pi, 0,4343)$  являются особыми точками типа "центр". Можно выделить два типа траекторий. Первые – это



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 2. Зависимость амплитуды  $B$  от времени. Кривые 1–3 соответствуют  $\chi = 0, \pi/2, \pi$

Фиг. 3. Зависимость амплитуды  $A$  от времени. Кривые 1–3 соответствуют  $\chi = 0, \pi/2, \pi$

Фиг. 4. Зависимость разности фаз от времени. Кривые 1–3 соответствуют  $\chi = 0, \pi/2, \pi$

траектории, замыкающиеся вокруг соответствующего центра. На них величины  $\chi$  и  $B$  совершают некие периодические колебания. Для малых отклонений от соответствующей стационарной точки легко получить, что колебания этих функций являются практически чисто гармоническими с частотой пропорциональной квадрату амплитуды отклонений от данной точки. По мере удаления траекторий от стационарной точки колебания становятся все более сложными. Соответствующие им решения полной системы (2.9) представляют собой промодулированные по амплитудам и частоте стационарно бегущие решения (2.7), (2.8). При этом разность фаз остается все время ограниченной. В пределе эти решения переходят в солитон огибающей, который на фазовой плоскости ( $B, \chi$ ) представлен соответствующей сепаратрисной траекторией, отделяющей замкнутые траектории от разомкнутых. Как следует из (2.13), эти сепаратрисные кривые на фазовой плоскости описываются соотношениями

$$\cos \chi = \frac{B}{2(B^2 - C_{00})}, \quad \cos \chi = \frac{1}{2B} \quad (2.14)$$

Из (2.14) очевидно, что в случае  $C_{00} \leq 1/4$ , так как  $B < C_{00}^{1/2}$ , вторая сепаратриса отсутствует. Между сепаратрисами проходят незамкнутые траектории, у которых  $\chi$  пробегает все значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Хотя поведение фазовых траекторий дает достаточно много информации о характере соответствующего решения (2.3), для их полного описания надо решать систему (2.9). Она решалась численно методом Рунге–Кутты пятого порядка с автоматическим выбором шага и контролем погрешности.

На фиг. 2–4 показаны расчеты для трех решений. На всех этих рисунках начальное значение  $B_0 = 0,5$ . Для этих решений на фазовой плоскости фиг. 1 фазовая кривая, соответствующая кривым 1, это вторая асимптотика. Начальная точка  $(0,5, \pi/2)$ , задающая кривые 2, принадлежит области, в которой траектории являются неограниченными по  $\chi$ . Точка  $(0,5, \pi)$ , отвечающая кривым 3, лежит на замкнутой фазовой траектории в области, ограниченной первой асимптотикой.

Для асимптотик (2.14) зависимость  $B$  от времени из системы (2.9) определяется аналитически, но в силу громоздкости и ненаглядного представления она здесь не приводится. Эта зависимость представляет собой некое локализованное "солитоноподобное" образование, спадающее экспоненциально при  $t_1 \rightarrow \pm\infty$ . Расчетная же кривая  $I$  на фиг. 2, связанная со второй асимптотикой, представляет собой как бы последовательность солитонов. Это связано с тем, что из-за машинного числового "шума" не удастся сколько угодно долго оставаться на этой асимптотике. Реальный расчет фактически представляет фазовую траекторию, лежащую очень близко от нее. Исходное решение (2.3), соответствующее этому случаю, в течение длительных промежутков времени представляет собой фактически чистую синусоиду с амплитудой  $A = 1$ . Потом появляется достаточно узкая по времени область "перемежаемости", в которой наряду с первой существует и вторая гармоника с амплитудой  $B$ , соизмеримой с амплитудой первой гармоники  $A$ . Этот процесс периодически повторяется. В принципе период "перемежаемости" несоизмерим с собственным основным периодом волны. Чем ближе к асимптотике, тем шире интервал времени, на котором волна практически монохроматична. Так, при проведении расчетов с двойной точностью при тех же самых начальных данных расстояние между экстремумами для кривых  $I$  выросло примерно в 2,6 раза.

Кривые 2 и 3 представляют решения (2.3), у которых амплитуды первой и второй гармоник остаются соизмеримыми между собой все время. В случае 3 фазы достаточно сильно скоррелированы между собой и это решение представляет пример сравнительно слабо возмущенного стационарно бегущего решения (2.7), (2.8). Кривые 2 демонстрируют более сложное решение, которое "гуляет" между решениями (2.7), (2.8) (представленными на фиг. 1 двумя соответствующими стационарными точками), причем не подходит близко ни к одному из них.

**Заключение.** Для рассматриваемого в рамках модели (1.4) поведения длинноволновых возмущений на границе раздела двух жидкостей понятия структура картины волновых режимов с волновыми числами "близкими" к резонансному волновому числу  $k_* = 1/3$ . В этой области в случае определенного баланса между значением амплитуд и фаз первых двух гармоник формируются четыре семейства стационарно бегущих волн. В случае небольших отклонений начальных амплитуд и фаз от этих сбалансированных значений реализуются волны, которые в процессе эволюции периодически осциллируют около стационарно бегущего режима, незначительно искажая его. Волны, соответствующие большим отклонениям, попеременно приближаются по виду к каждому из двух стационарно бегущих решений. Но и в момент наибольшего сближения они заметно отличаются от последних.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01766) и Сибирского отделения РАН (код проекта ИГ-43-97).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Benjamin T.B. Internal waves of permanent form in fluids of great depth // J. Fluid Mech. 1967. V. 29. Pt. 3. P. 559–592.
2. Benjamin T.B. A new kind of solitary wave // J. Fluid Mech. 1992. V. 245. P. 401–411.
3. Ryzhov O.S. The development of nonlinear oscillations in a boundary layer and the onset of random disturbances // Nonlinear Instability of Nonparallel Flows: IUTAM Symp. Potsdam, NY, USA, 1993 / Ed. S.P. Lin et al. Berlin: Springer, 1994. P. 52–68.
4. Цвелодуб О.Ю. Длинные волны для одной модели двухслойной системы // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 5. P. 166–170.