

УДК 532.546

© 2000 г. В.В. КАДЕТ, А.А. МАКСИМЕНКО

ПРИНЦИПЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В РЕШЕТОЧНЫХ МОДЕЛЯХ ПОРИСТЫХ СРЕД

Предлагается способ расчета проводимости капиллярных решеток, объединяющий перколяционные представления о проводимости вблизи порога протекания с результатами, полученными в рамках модели эффективной среды. Проведено сравнение теоретически рассчитанной проводимости с экспериментальными данными. В качестве примера использования полученных зависимостей определяются фазовые проницаемости воды и нефти при их совместном течении в капиллярной решетке.

Одним из эффективных методов исследования свойств проводимости неоднородных сред является построение и расчет решеточных моделей таких сред. При этом хаотическая неоднородная пространственная структура проводящих элементов заменяется соответствующей регулярной решеткой, свойства которой наилучшим образом отражают характер расположения этих элементов в реальной неоднородной среде. Для описания свойств пористых сред поровое пространство естественно представлять в виде решетки капилляров, гидравлическая проводимость которых определяется, например, законом Пуазеля.

Общая идея модельного описания протекающих в решетке процессов состоит в том, чтобы на базе решеточных моделей попытаться осуществить переход от законов течения на микроуровне (в отдельном капилляре) к макроскопическим законам течения (во всей решетке), от известных микрохарактеристик среды к ее общим макроскопическим свойствам.

Одним из подходов к реализации этой идеи стал метод построения перколяционных моделей переноса, развитый авторами [1]. При этом важно подчеркнуть, что большинство результатов теории перколяции [2–4] представляют собой асимптотические равенства, характеризующие поведения параметров бесконечного кластера в непосредственной близости от порога протекания P_c . Данная величина есть предельное (минимальное) значение доли проводящих связей P в решетке, необходимое для возникновения в ней макроскопической проводимости. Поэтому использование перколяционных моделей для расчетов параметров проводимости решетки представляется оправданным, строго говоря, только в некоторой ближайшей окрестности P_c .

В [1] расчет течения в решетке проводился с использованием этих асимптотических зависимостей во всем диапазоне $P_c \leq P \leq 1$. При этом возникала необходимость коррекции получаемых соотношений путем введения дополнительных численных множителей. Первый вводился непосредственно при проведении теоретических выкладок для обеспечения предельного перехода от решетки с разорванными связями к исходной решетке при $P \rightarrow 1$. Второй – собственно поправочный коэффициент $\gamma \sim 1$, возникающий из сопоставления полученных аналитических расчетных соотношений с результатами прямого численного моделирования течения на той же решетке.

Используя модельное представление о структуре скелета бесконечного кластера [1], можно найти концентрацию $n(r_1)$ проводящих цепочек, проходящихся на единицу

площади поперечного сечения решетки и составленных из капилляров с $r > r_1$.

$$n(r_1) \sim \frac{1}{d^2} \left[\int_{r_1}^{r_c} f(r) dr \right]^{2\nu} \quad (1)$$

Здесь $f(r)$ – нормированная функция плотности распределения капилляров (связей решетки) по радиусам, d – период решетки, ν – индекс радиуса корреляции [1], а критический радиус r_c – предельное (максимальное) значение r_1 , при котором образуется бесконечный кластер

$$\int_{r_c}^{\infty} f(r) dr = P_c \quad (2)$$

Зная также соответствующие проводимости цепочек $\sigma(r_1)$

$$\sigma(r_1) = [I(r_1)]^{-1}, \quad I(r_1) = \frac{8\mu}{\pi} \int_{r_1}^{\infty} f(r) \frac{dr}{r^4} \left[\int_{r_1}^{\infty} f(r) dr \right]^{-1} \quad (3)$$

их можно просуммировать и тем самым оценить проводимость решетки в целом. Такая оценка была приведена в [1], где представлено выражение для общей проводимости решетки σ_0

$$\sigma_0 = \int_0^{r_c} \frac{F(r_1)}{(r_1)} dr_1, \quad F(r_1) = \frac{-dn(r_1)}{dr_1} \quad (4)$$

При этом асимптотическое равенство (1), справедливое лишь вблизи P_c , использовалось в расчетах во всем интервале $P(r_c) \leq P(r_1) \leq 1$, в том числе и вдали от порога протекания.

При удалении от порога протекания (при $P(r_1)/P(r_c) > 1$ и особенно при $P(r_1) \rightarrow 1$) структура скелета бесконечного кластера меняется от редкой сети отдельных проводящих цепочек до весьма однородной густой сети проводящих капилляров, для которой проводимость хорошо описывается в рамках модели эффективной среды [5].

В последней предлагается способ перехода от решетки со связями, проводимость которых описывается некоторой функцией плотности распределения $f(\sigma)$ (которая может также учитывать наличие связей с нулевой проводимостью), к решетке с одинаковой проводимостью всех связей σ_m и общей проводимостью, равной проводимости исходной решетки. Уравнения для определения σ_m имеет вид [5]

$$\int_0^{\infty} \frac{\sigma_m - \sigma}{\sigma + (z/2 - 1)\sigma_m} f(\sigma) d\sigma = 0 \quad (5)$$

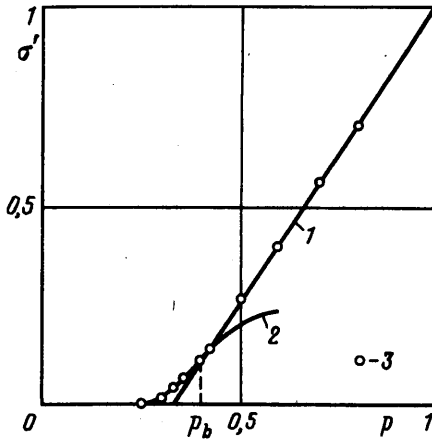
В рассматриваемом случае ньютоновской жидкости гидравлическая проводимость капилляра $\sigma \sim r^4$. Поэтому для решетки, в которой проводят все капилляры с $r > r_1$, уравнение (5) преобразуется к виду

$$\frac{1}{(z/2 - 1)} \int_0^{r_1} f(r) dr + \int_{r_1}^{\infty} \frac{r_m^4 - r^4}{r^4 + (z/2 - 1)r_m^4} f(r) dr = 0 \quad (6)$$

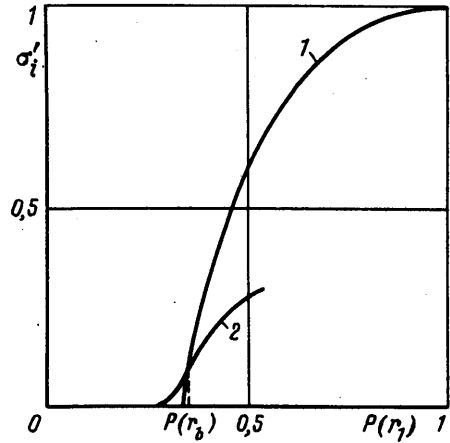
Получив из (6) значение эффективного радиуса r_m , можно найти общую проводимость однородной решетки капилляров

$$\sigma_1 = d^{-2} \frac{\pi r_m^4}{8\mu} \quad (7)$$

которая равна общей проводимости исходной неоднородности решетки.



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Проводимость кубической решетки при бинарном распределении проводимости связей; расчет по модели эффективной среды (1), расчет по перколяционной модели (2), прямой численный эксперимент [6] (3)

Фиг. 2. Проводимость капиллярной решетки при логарифмически нормальной функции плотности распределения капилляров по радиусам; расчет по модели эффективной среды (1) и по перколяционной модели (2)

Для адекватного описания проводимости рассматриваемой решетки капилляров во всем интервале $P(r_c) \leq P(r_1) \leq 1$ необходимо объединить представленные выше результаты перколяционного моделирования, которые хорошо обоснованы при $P(r_1) \rightarrow P(r_c)$, и расчетные соотношения модели эффективной среды, успешно работающие при $P(r_1) \rightarrow 1$. Для этого определим положение границы $P(r_b)$, слева от которой, в интервале $P(r_c) \leq P(r_1) \leq P(r_b)$, наиболее эффективно использование перколяционного подхода, а справа, при $P(r_b) < P(r_1) \leq 1$, — модели эффективной среды.

При использовании перколяционных зависимостей в малой окрестности порога протекания вычисление проводимости решетки можно заметно упростить, поскольку в этом случае проводимость цепочек капилляров $\sigma(r_1)$ меняется незначительно. Будем считать все проводящие цепочки, состоящие из капилляров с минимальными радиусами $r_c \leq r_1 \leq r_b$, эквивалентными. Тогда выражение (4) примет вид

$$\sigma_2 = \frac{n(r_1)}{l(r_1)} \quad (8)$$

Решение уравнения (6) с последующим использованием (7) для данного r_1 позволяет получить проводимость решетки капилляров вдали от порога протекания.

Рассмотрим данные прямого численного эксперимента по определению безразмерной проводимости кубической решетки σ' [5, 6], полученные для предельного случая бинарного распределения проводимости связей, т.е. для решетки с одинаковой проводимостью всех действующих связей, в которой доля проводящих связей равна p , а доля разорванных (непроводящих) — $(1 - p)$ (фиг. 1). Обезразмеривание осуществляется путем отнесения проводимости решетки σ к максимальной проводимости решетки σ_{\max} при $p = 1$.

Найдем проводимость этой решетки по модели эффективной среды. Для этого подставим бинарную функцию распределения в уравнение (6). В результате получим линейную зависимость эффективной проводимости решетки от p (на фиг. 1 линия 1) $\sigma'_m = (3p - 1)/2$.

Расчет по перколяционной модели (формула (8)) дает зависимость σ/σ_{\max} от p , представленную на фиг. 1 линией 2. Приведенные на фиг. 1 графики пересекаются в точке, слева от которой экспериментальные данные хорошо совпадают с проводимостью, найденной по перколяционной модели, а справа – с результатами расчетов по модели эффективной среды. Абсцисса этой точки и есть искомая граница p_b .

Если теперь построить кривые проводимостей $\sigma'_1 = \sigma_1(r_1)/\sigma_{\max}$ и $\sigma'_2 = \sigma_2(r_1)/\sigma_{\max}$ с использованием характерного (логнормального) вида порометрической кривой

$$f(r) = (\sqrt{2\pi\sigma r})^{-1} \exp[-(\ln r - a)^2 / (2\sigma^2)]; \quad a = -12,56, \quad b = 0,21 \quad (9)$$

для всех r_1 , удовлетворяющих условию $P(r_c) \leq P(r_1) \leq 1$, они также пересекутся в некоторой точке (фиг. 2). При этом максимальная проводимость решетки будет определяться значением $\sigma_{\max} = \sigma_1$ из формулы (7), для которой r_m найдено из уравнения (6) при $r_1 = 0$.

Эту точку по аналогии с предельным случаем бинарного распределения естественно выбрать в качестве границы $P(r_b)$ (фиг. 2), слева от которой для определения проводимости будем использовать перколяционную модель (8), а справа – модель эффективной среды (7).

В качестве примера использования данного подхода рассчитаем по предложенной методике кривые относительных фазовых проницаемостей воды и нефти при двухфазной фильтрации.

Рассмотрим процесс вытеснения нефти водой в случае, когда гидравлические силы преобладают над капиллярными ($Ca \ll 1$). При этом вода занимает более крупные капилляры коллектора, а нефть более мелкие.

Функция плотности распределения капилляров по радиусам $f(r)$ находится из порометрических исследований кернов и имеет характер (9).

Для построения кривых относительных фазовых проницаемостей будем использовать модель коллектора в виде кубической решетки капилляров с данной функцией плотности распределения капилляров по радиусам $f(r)$. Распределение воды и нефти в решетке характеризуется текущим значением r_1 , определяющим соответственно минимальный радиус для водосодержащих капилляров и максимальный для нефтесодержащих. Для определения зависимости водонасыщенности S коллектора от r_1 необходимо задаться моделью, учитывающей емкостные свойства порового пространства. Предположим, что среда зернистая. В этом случае основная часть воды и нефти сосредоточена в больших порах, а фильтрация происходит по тонким соединяющим их капиллярам. При этом водонасыщенность можно считать равной значению доли водосодержащих капилляров [1], т.е. текущему значению $P(r_1)$. Тогда коэффициент абсолютной проницаемости решеточной структуры $k = \sigma_{\max}$.

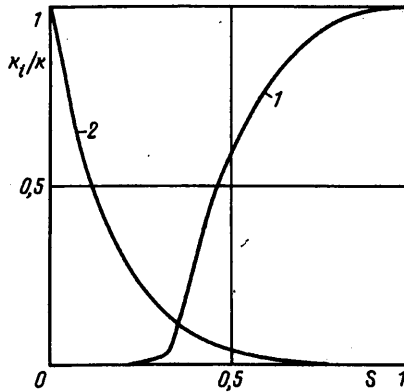
Проницаемость по воде k_w получается по предложенной схеме расчета, объединяющей выражения (7) и (8), варьированием водонасыщенности $S = P(r_1)$ в интервале $P(r_c) \leq S \leq 1$.

Чтобы найти проницаемость по нефти k_o , необходимо в формулах для вычисления проводимости поменять пределы интегрирования. Это объясняется тем, что значение r_1 для цепочек из нефтесодержащих капилляров определяет не минимальное значение радиуса капилляров, а максимальное. Поэтому соотношение (3) для определения проводимости нефтесодержащих цепочек приобретает вид

$$\sigma(r_1) = [I(r_1)]^{-1}, \quad I(r_1) = \frac{8\mu}{\pi} \int_0^{r_1} f(r) \frac{dr}{r^4} \left[\int_0^{r_1} f(r) dr \right]^{-1} \quad (10)$$

Уравнение (2) для определения порога протекания r'_c нефтяной фазы и соотношение (1) для расчета концентрации "r₁-цепочек" примут при этом вид

$$\int_0^{r'_c} f(r) dr = P'_c, \quad n(r_1) = \frac{1}{d^2} \left[\int_{r'_c}^{r_1} f(r) dr \right]^{2\nu} \quad (11)$$



Фиг. 3. Кривые относительных фазовых проницаемостей: 1 – для воды, 2 – для нефти

а уравнение (6) преобразуется к виду

$$\frac{1}{(z/2-1)} \int_{r_1}^{\infty} f(r) dr + \int_0^{r_1} \frac{r_m^4 - r^4}{r^4 + (z/2-1)r_m^4} f(r) dr = 0 \quad (12)$$

Таким образом, проницаемость по нефти k_o находится из выражений (7) и (8) с учетом формул (10)–(12) и варьированием водонасыщенности $S = P(r_1)$ в интервале $0 \leq S \leq 1 - P'_c$. Относительные фазовые проницаемости, представленные на фиг. 3, получаются делением соответственно проницаемостей по воде k_w и нефти k_o на абсолютную проницаемость решетки k . Полученные таким образом кривые $k_i(S)$ достаточно хорошо отражают характер поведения экспериментально определяемых фазовых проницаемостей [7, 8].

Заключение. Представленный в данной работе подход позволяет учитывать характер формирования потоков флюидов в решетке как вблизи порога протекания при $P \approx P_c$, так и вдали от него – в области больших P . Хорошее количественное согласие с известными экспериментальными данными для предельного случая бинарной функции распределения (фиг. 1), а также хорошее качественное совпадение кривых фазовых проницаемостей $k_i(S)$ ($i = w, o$) с экспериментами [7, 8] (фиг. 3) дают основания для использования описанной модели в широком спектре задач протекания, в том числе для построения кривых фазовых проницаемостей при многофазной фильтрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Селяков В.И., Кадет В.В. Перколяционные модели процессов переноса в микро-неоднородных средах. М.: Недра, 1995. 222 с.
2. Шкловский Б.И., Эфрос А.Л. Теория протекания и проводимость сильно неоднородных систем // Успехи физ. наук. 1975. Т. 117. Вып. 3. С. 401–435.
3. Эфрос А.Л. Физика и геометрия беспорядка. М.: Наука, 1982. 175 с.
4. Gennes P.G., de. Scaling Concepts in Polymer Physics. Ithaca; London: Cornell Univ. Press, 1979. 324 p. = Жен П., де Идеи скейлинга в физике полимеров. М.: Мир, 1982. 368 с.
5. Киркпатрик С. Перколяция и проводимость // Теория и свойства неупорядоченных материалов. М.: Мир, 1977. Вып. 7. С. 249–292.
6. Займан Дж. Модели беспорядка. М.: Мир, 1982. 591 с.
7. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
8. Багрянцева К.И. Карбонатные породы – коллекторы нефти и газа. М.: Наука, 1977. 231 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.XI.1998