

УДК 532.516.5 : 536.33

© 2000 г. О.Л. РУСАКОВА, Е.Л. ТАРУНИН

БИФУРКАЦИОННЫЕ РЕЖИМЫ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И НАКЛОНА ПОЛОСТИ

Бифуркационные режимы естественной конвекции в замкнутых объемах при подогреве снизу изучались численными методами неоднократно [1]. Рассматривались ситуации, в которых нарушение условий равновесного решения было вызвано каким-либо одним фактором – наклоном полости относительно вертикали, движением одной из границ, изменением равновесного распределения температуры и т.д. В данной работе изучено совместное влияние двух факторов, нарушающих условие равновесия жидкости, – эффекта теплового излучения и слабого наклона полости относительно вертикали. Показано, что при одновременном действии двух дестабилизирующих факторов возможно решение, близкое к равновесному.

1. Задача о подогреве снизу прозрачного газа в квадратной полости (фиг. 1) описывается системой уравнений естественной конвекции в приближении Буссинеска [2]. Граничные условия для вектора скорости – условия прилипания, температуры поверхностей S_0 и S_1 постоянны

$$v|_{\Gamma} = 0, \quad T|_{S_0} = T_0, \quad T|_{S_1} = T_1, \quad T_1 > T_0 \quad (1.1)$$

На границах S_2 и S_3 рассматривались три варианта граничных условий для температуры, которые будут обсуждаться ниже.

При учете теплообмена излучением граници использовалась модель "абсолютно черных" поверхностей. Такие поверхности только излучают и поглощают тепло, но не отражают его [3]. Полагая, что степени черноты и поглощательные способности всех поверхностей S_m ($m = 0, 1, 2, 3$) равны между собой, можно записать локальное значение плотности потока результирующего излучения элементарной площадки $s_i^{(m)} \in S_m$ в виде

$$q(s_i^{(m)}) = \epsilon \sigma \left[T^4(s_i^{(m)}) - \sum_{j=0, j \neq m}^3 \int_{S_j} K(r_i^{(m)}, r_i^{(j)}) T^4(S_j) ds^{(j)} \right]$$

где σ – постоянная Стефана, ϵ – степень черноты, функция $K(r_i^{(m)}, r_i^{(j)})$ зависит от положения и ориентации излучающих поверхностей.

Полагая, что поверхность S_2 извне теплоизолирована, получим следующее граничное условие:

$$\lambda \frac{\partial T(S_2)}{\partial x} - \sigma \epsilon \left[T^4(S_2) - T_0^4 \int_{S_0} K(r_0, r_2) ds_0 - T_1^4 \int_{S_1} K(r_1, r_2) ds_1 - \int_{S_3} K(r_3, r_2) T^4(S_3) ds_3 \right] = 0 \quad (1.2)$$

где λ – коэффициент теплопроводности газа, находящегося в полости.

Используя в качестве характерного линейного размера высоту полости H ($L = H$), и безразмерную температуру $\theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$, граничное условие (1.2) представим в виде

$$\eta_1 \frac{\partial \theta(S_2)}{\partial x} - \text{Rd} \left\{ [1 + \theta(S_2)]^4 - \int_{S_0} K(r_0, r_2) ds_0 - \eta_0^4 \int_{S_1} K(r_1, r_2) ds_1 - \int_{S_3} K(r_3, r_2) [1 + \eta_1 \theta(S_3)]^4 ds_3 \right\} = 0 \quad (1.3)$$

$$\eta_0 = T_1 / T_0, \quad \eta_1 = \eta_0 - 1, \quad \text{Rd} = \sigma \epsilon H T_0^3 / \lambda$$

После обезразмеривания и перехода к функции тока ψ и вихрю скорости ϕ система уравнений примет вид

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \phi = (\text{rot } \mathbf{V})_z$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \Delta \phi + G \left[\frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial T}{\partial y} \sin \alpha \right]$$

$$\Delta \psi + \phi = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T$$

$$G = g \beta (T_1 - T_0) H^3 / \nu^2, \quad \text{Pr} = \nu / \chi$$

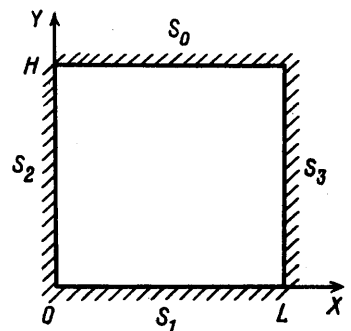
Здесь α – угол наклона полости относительно вертикали, G – число Грасгофа, Pr – Прандтля.

Граничные условия (1.1) для функции тока и температуры на двух поверхностях имеют вид

$$\psi|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0, \quad T|_{S_0} = 0, \quad T|_{S_1} = 1 \quad (1.5)$$

Решение задачи (1.3)–(1.5) зависит от пяти безразмерных параметров: числа Грасгофа G , числа Прандтля Pr , η_0 , Rd и угла наклона полости α . Производным безразмерным параметром является число Рэля $\text{Ra} = G \text{Pr}$.

Задача решалась раздельным вариантом двухполюсового метода [1]. Эволюционные уравнения для вихря скорости и температуры решались методом продольно-поперечной прогонки с использованием аппроксимации, основанной на параболических сплайнах с погрешностью аппроксимации $O(h^2)$. Уравнение Пуассона для функции тока решалось итерационным методом продольно-поперечной прогонки. Функция тока приближалась дискретным кубическим сплайном, что обеспечивало аппроксимацию $O(h^3)$. Значения вихря скорости на границах определялись по формуле Вудса с нижней релаксацией. Подробно эта методика изложена в [4]. Основные расчеты проводились при фиксированном числе Прандтля, равном 0,71 (воздух), и $\eta_0 = 1,1$. В основной серии расчетов использовалась квадратная сетка с шагом 1/20.



Фиг. 1. Геометрия расчетной области

2. Особенностью задачи о подогреве снизу без учета

теплообмена излучением ($Rd = 0$) и без наклона полости относительно вертикали ($\alpha = 0$) является наличие равновесного решения [2]

$$\psi^0(x, y) = 0, \quad T^0(x, y) = 1 - y$$

Это решение теряет устойчивость при превышении числом Рэлея критических значений $Ra_j = Pr G_j$ ($j = 1, 2, \dots$). В области $Ra > Ra_1$ амплитудные кривые описываются корневым законом. В теории бифуркаций это соответствует особенности первого рода – складке Уитни.

Задача была решена для трех вариантов граничных условий, задаваемых на вертикальных границах S_2 и S_3 : 1) вертикальные границы теплоизолированы; 2) левая граница теплоизолирована, а на правой температура распределена по линейному закону; 3) на вертикальных границах температура распределена по линейному закону

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad x = 1 \quad (1.6)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad T|_{x=1} = 1 - y \quad (1.7)$$

$$T = 1 - y, \quad x = 0, \quad x = 1$$

При отсутствии излучения ($Rd = 0$) и угла наклона полости ($\alpha = 0$) во всех трех случаях после потери устойчивости равновесного решения возникало одновихревое течение. Амплитуда течения, в качестве которой использовалось максимальное значение функции тока, описывается законом Ландау

$$\psi_m = a_i (Ra - Ra_i^*)^{0,5}$$

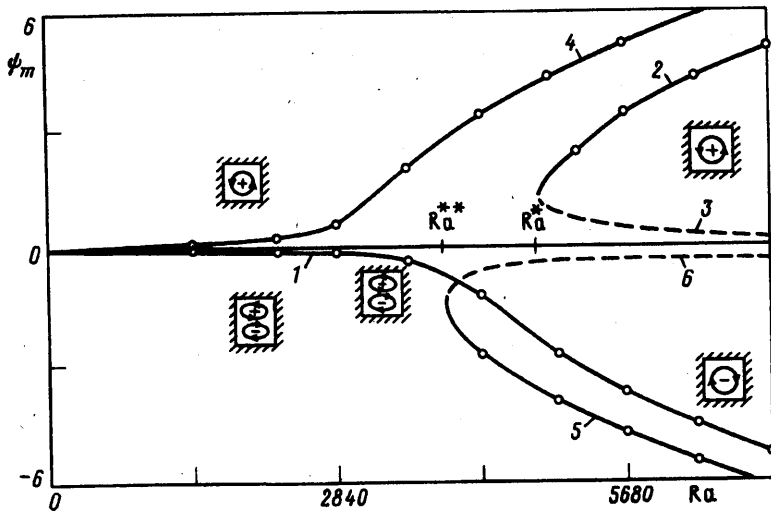
Коэффициенты a_i и критические числа Рэлея Ra_i^* получены после обработки результатов численных экспериментов

i	1	2	3
$Ra_i \cdot 10^{-3}$	2,63	3,37	5,25
a_i	0,112	0,103	0,093

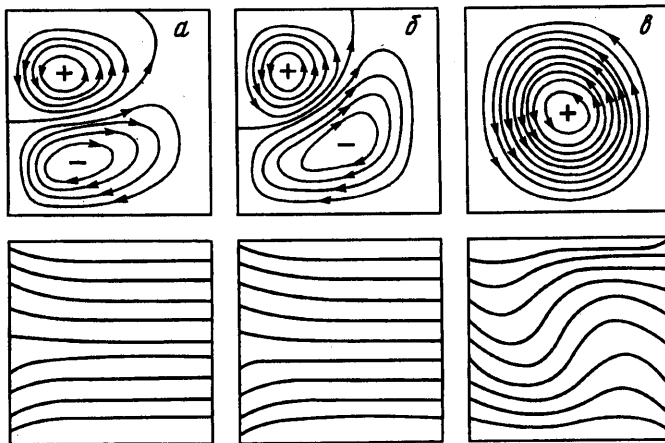
Критическое значение числа Рэлея Ra_3 совпадает с результатами работы [1] с точностью до 3%.

Учет теплообмена с излучением приводит к нарушению условий равновесия и при любых значениях числа Рэлея существует конвективное течение. Амплитудные кривые в этом случае соответствуют так называемой сборке Уитни. В [5] подробно описана бифуркация, возникающая при решении задачи с симметричными граничными условиями (1.6) и $\alpha = 0$.

На фиг. 2 представлены результаты решения задачи с асимметричными граничными условиями (1.7) для температуры на вертикальных границах полости. Линии 1–3 соответствуют бифуркационной картине, возникающей при решении задачи с учетом только теплового излучения границ без наклона полости ($\alpha = 0$). В случае "предпочтительной" ветви (линия 1) при малых значениях числа Рэлея возникает ползущее течение двухвихревой структуры. С увеличением числа Рэлея интенсивность обеих вихрей повышается, но в разной степени. В интервале $2800 < Ra < 3600$ течение двухвихревой структуры плавно переходит в течение одновихревой структуры. Решение, соответствующее "неблагоприятной" ветви (линия 2), реализуется лишь при $Ra > Ra^* \approx 4900$. Выход на эту ветвь требует специальных начальных условий. Течение на этой ветви подобно решению на линии 1, но имеет меньшую амплитуду и другой знак экстремума функции тока (противоположная "закрутка"). Линия 3 соот-



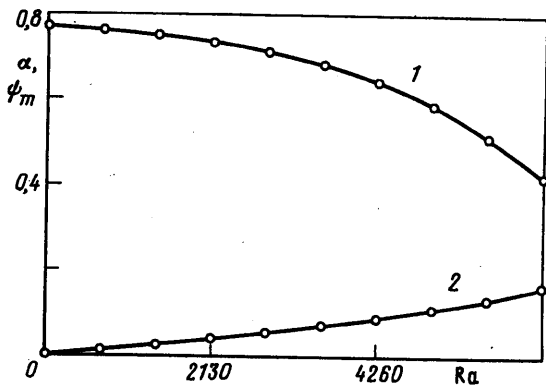
Фиг. 2. Бифуркационная картина в плоскости экстремальные значения функции тока ψ_m – число Рэлея Ra . Линии 1–3 – задача с учетом только излучения ($\alpha = 0, Rd = 1$); 4–6 – только наклон полости ($\alpha = -1^\circ, Rd = 0$); 1, 4 – предпочтительная, 2, 5 – неблагоприятная, 3, 6 – неустойчивая ветви. Точками отмечены значения, полученные в вычислительном эксперименте



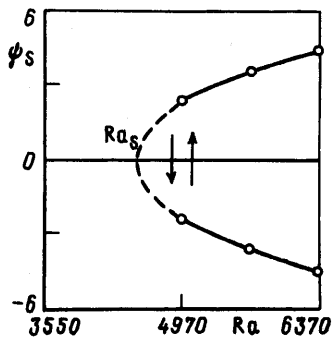
Фиг. 3. Характерные картины изолиний функции тока (вверху) и изотерм (внизу) для $Pr = 0,71, Rd = 1$ (а – "ползущее" течение $Ra = 710, \alpha = -0,76224^\circ, \psi_{\max} = -\psi_{\min} = 1,327 \cdot 10^{-2}$; б – $Ra = 6390, \alpha^* = -0,423501^\circ, \psi_{\max} = \psi_{\min} = 1,663 \cdot 10^{-1}$; в – $Ra = 6390, \alpha = -0,423500^\circ, \psi_{\max} = 4,429$)

ветствует неустойчивой ветви; конечные возмущения с амплитудой больше значений максимальной функции тока на этой линии приводят после стадии переходного режима к стационарным решениям ветви 2, а в противном случае реализуется решение, соответствующее благоприятной ветви (линия 1).

Аналогичная бифуркационная картина возникает, когда в рассматриваемой задаче (без излучения) полость находится под небольшим углом к вертикальной оси [6, 7]. Линии 4–6 на фиг. 2 показывают бифуркационную картину решений задачи о подогреве снизу без учета теплового излучения границ, но с наклоном полости относительно вер-



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 4. Зависимости от числа Рэлея (Ra) модуля угла наклона полости, обеспечивающего "равновесие" двух вихрей (линия 1) и максимальной амплитуды функции тока в этом случае (линия 2) (точками отмечены значения, полученные в вычислительном эксперименте)

Фиг. 5. Зависимость $\psi_s \equiv \psi_{\min} + \psi_{\max}$ от числа Рэлея (Ra) (точками отмечены значения, полученные в вычислительном эксперименте)

тикали на 1° против часовой стрелки ($Rd = 0, \alpha < 0$). В этом случае основным течением является одновихревое. Линия 4 является предпочтительной. Линия 5 ("неблагоприятная" ветвь) существует при $Ra > Ra^{**} \approx 3900$. Выход на «неблагоприятную» ветвь, как и ранее, требует задания начальных условий специального вида.

Вид амплитудных кривых, представленных на фиг. 2, наводит на идею совмещения; двух факторов, нарушающих условия равновесия ($\alpha < 0, Rd \neq 0$). Это может позволить уменьшить амплитуду функции тока и затян timer появление развитого одновихревого течения. Эту идею удалось реализовать с хорошей точностью, подбирая для фиксированных чисел Rd и Ra соответствующий угол наклона $\alpha(Rd, Ra)$, который обеспечивал "равновесие" двухвихревого течения.

На фиг. 3 приведены характерные картины течения и изотермы. Первые две пары картинок соответствуют решениям с двумя вихрями, имеющими равные по модулю значения экстремумов функций тока ($|\psi_{\max}| = |\psi_{\min}|$). Фигура 3, а соответствует области малых значений числа Рэлея ($Ra = 710$), 3, б – большему ($Ra = 6390$). Значения угла α в обоих вариантах подбирались так, чтобы модули экстремальных значений функции тока $|\psi_m| = |-\psi_m|$ совпадали с точностью до 0,01%. Соответствующая зависимость $\psi_m(Ra)$ в этом случае изображена на фиг. 4. Интенсивность обсуждаемого конвективного течения и величина безразмерного теплового потока – число Нуссельта малы.

Ситуация "равновесия" двух вихрей неустойчива по отношению к возмущениям. Если изменить угол, обеспечивающий такое равновесие, на малую величину (в рассматриваемом примере на $0,25 \cdot 10^{-3}\%$), то картина течения резко изменится. Иллюстрацией к сказанному является фиг. 3, в. Здесь приведена картина течения и изотермы при $Ra = 6390$ и $\alpha = -0,42350^\circ$. Это значение угла α отличается от значения угла α^* , обеспечивающего равновесие двух вихрей, лишь в шестом знаке после запятой. В этом случае реализуется одновихревое течение с амплитудой $\psi_m = 4,429$. Максимальное значение функции тока увеличилось при такой перестройке в 26 раз, кинетическая энергия возросла в 260 раз. По картине изотерм видно, что резко изменилось и температурное поле – добавка к числу Нуссельта увеличилась более чем в 3 раза.

На фиг. 4 также приведен график зависимости от числа Рэлея модуля угла наклона полости, обеспечивающего "равновесие" двух вихрей ($\alpha = \alpha^*(Ra)$). С ростом числа Рэлея модуль угла $|\alpha^*|$ уменьшается. Величина $G \sin \alpha \approx G\alpha$, обеспечивающая интенсивность генерируемого конвективного течения, с ростом числа Рэлея монотонно увеличивается.

Выше обсуждалось решение задачи для асимметричных граничных условий (1.7) при $\alpha \neq 0$ и $Rd \neq 0$. При $\alpha = 0$ и $Rd = 0$ (нет наклона и излучения) интенсивность одновихревого течения в надкритической области выше. Так, например, при $Ra = 6390$ $|\psi_m| = 5,7$, а при наличии наклона и излучения $|\psi_m| \approx 4,43$. В то же время при $\alpha = \alpha^*$ может существовать двухвихревое течение с $|\psi_m| \approx 0,16$. Из симметрии задачи очевидно, что если граничные условия (1.7) на боковых границах поменять местами, то погашение интенсивности конвективного течения при тепловом излучении может быть достигнуто поворотом полости по часовой стрелке (меняется знак угла наклона полости α).

На фиг. 5 представлена зависимость суммы $\psi_s \equiv (\psi_{\max} + \psi_{\min})$ от числа Рэлея в случае $\alpha = \alpha^*$. Выбор угла наклона полости $\alpha = \alpha^*$ обеспечивал с требуемой точностью нулевое значение ψ_s в области чисел Рэлея, где удалось добиться равенства расходов для вихрей разного знака. Любопытно, что изображенная зависимость подобна результатам задачи с потерей устойчивости равновесия, хотя, конечно же, в "надкритической" области равновесия нет, а существуют два малоинтенсивных вихря с различными направлениями вращения газа.

Обработка результатов счета дала приближенную формулу

$$\psi_s \approx a(Ra - Ra_s)^{0,5}, \quad a \approx 0,10, \quad Ra_s \approx 4400.$$

Удерживать квазиравновесие двух вихрей удалось до значений $Ra \approx 1,4Ra_s$. Символически переход двухвихревого течения в одновихревое показан на фиг. 5 двумя стрелками. После потери устойчивости конвективного движения с двумя вихрями возможен переход к одновихревому течению с различным направлением вращения. Подчеркнем, что амплитуды соответствующих ветвей (верхней и нижней) различны, на фиг. 5 их различие не заметно, так как в исследуемом интервале оно менее 2%. Без специально подобранного значения угла наклона полости $\alpha = \alpha^*$ соответствующая зависимость была бы аналогична предпочтительной ветви 1 на фиг. 2.

Заключение. Исследовано совместное влияние двух факторов, нарушающих равновесие, — теплообмена границ излучением и слабого наклона полости. Показано, что специальным подбором угла наклона возможно "затягивание" существования слабоинтенсивного "ползущего" течения двухвихревой структуры.

Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01737).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. Спэрроу Э.М., Сесс Р.Д. Теплообмен излучением. Л.: Энергия, 1971. 294 с.
4. Русаков С.В. Параметрическая разностная сплайн-схема для задач динамики вязкой жидкости // Докл. РАН. Математика. 1993. Т. 328. № 3. С. 292–295.
5. Русаков С.В., Русакова О.Л., Тарунин Е.Л. Влияние теплового излучения границ области на конвекцию газа при подогреве снизу // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 5. С. 47–51.
6. Чернатыйский В.И., Шлиомис М.И. Конвекция вблизи критических чисел Рэлея при почти вертикальном градиенте температуры // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 1. С. 64–70.
7. Никитин А.И., Шарифуллин А.Н. О бифуркациях стационарных режимов тепловой конвекции в замкнутой полости, порождаемых особенностью типа сборки Уитни // Процессы тепло- и массопереноса вязкой жидкости. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. С. 32–39.