

УДК 532.592

© 2000 г. В.А. КАЛИНИЧЕНКО, К. ЛИЗАРРАГА-СЕЛАЙА,
С.Я. СЕКЕРЖ-ЗЕНЬКОВИЧ

О НАБЛЮДЕНИИ СТОЯЧИХ ВОЛН БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В УСЛОВИЯХ ГАРМОНИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА ФАРАДЕЯ

Представлены результаты исследований стоячих двухмерных гравитационных волн на свободной поверхности однородной жидкости при вертикальных колебаниях прямоугольного сосуда, возбуждаемых в условиях гармонического резонанса Фарадея, при котором их частоты совпадали. Для второй моды получены зависимости ее амплитуды от частоты возбуждения и волновые профили. Проведено сопоставление экспериментальных результатов с теоретической моделью.

Гармонический резонанс Фарадея изучен недостаточно полно по сравнению с субгармоническим, при котором частота возбуждаемых волн равна половине частоты колебаний сосуда (см. обзор [1]). Гармоническое возбуждение гравитационных волн на поверхности воды наблюдалось в экспериментах [2]; линейная теория, описывающая возможность зарождения волн на поверхности вязкой жидкости малой глубины, предложена в [3]. Формулы для расчета амплитуды волн, возбуждаемых в условиях гармонического резонанса в идеальной жидкости, даны в [4].

1. Постановка эксперимента. Эксперименты проводились на установке по методике [5]. Прямоугольный сосуд ($L = 50$, $W = 4$, $H = 40$ см), изготовленный из прозрачного оргстекла, заполнялся водой и помещался на низкочастотный вибростенд, сообщающий ему колебания в вертикальном направлении. Амплитуда колебаний устанавливалась любой в интервале 0,03–7,00 см, а частота при фиксированной амплитуде плавно изменялась в диапазоне 0,3–10,0 Гц. Возбуждение волн осуществлялось при потере устойчивости горизонтальной свободной поверхности жидкости, если амплитуда колебаний сосуда превышала некоторое пороговое значение, а частота попадала в один из резонансных диапазонов. Регистрация волновых движений жидкости осуществлялась кинокамерой, жестко связанной с сосудом. Измерения смещения свободной поверхности жидкости от положения равновесия по материалам кино съемки производились с точностью 0,1 см. Изучалась вторая волновая мода, возбуждаемая при гармоническом резонансе Фарадея.

2. Теоретическая модель. Приведем ряд полученных на основе модели [4] формул, по которым рассчитывались величины, характеризующие волны.

Пусть s – амплитуда, а Ω – частота колебаний сосуда. Параметрическое возбуждение двухмерных поверхностных волн с волновым числом $\kappa = \pi n/L$ (n – номер волновой моды, равный числу узлов стоячей волны) и собственной частотой $\omega = (\kappa g \operatorname{th} \kappa h)^{1/2}$ (g – ускорение свободного падения) в случае гармонического резонанса Фарадея ($\omega \approx \Omega$) имеет место, если безразмерная частота $p = \Omega/\omega$ установлена в резонансной зоне

$$1 - \varepsilon \frac{5}{24} < p < 1 + \varepsilon \frac{1}{24} \quad (2.1)$$

где $\varepsilon = (s\Omega^2/g)^2$ – малый параметр. Координаты x и y точек свободной поверхности в системе координат, жестко связанной с сосудом, изменяются с течением времени t согласно формулам

$$x = a - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\kappa} C \operatorname{cth} \kappa h \sin \kappa a \cos \psi + \frac{\varepsilon}{\kappa} \xi_2 + \sqrt{\varepsilon} \left[\frac{C}{2} \cos \theta \sin \kappa a - \right. \\ \left. - \frac{C}{6} \sin \kappa a (\cos \theta \cos 2\psi + \sin \theta \sin 2\psi) \right] \quad (2.2)$$

$$y = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\kappa} C \cos \kappa a \cos \psi + \frac{\varepsilon}{\kappa} \eta_2, \quad \psi = \Omega t + \theta$$

$$\xi_2 = \frac{C}{2 \operatorname{th} \kappa h} \cos \theta \sin \kappa a - \frac{C}{6 \operatorname{th} \kappa h} \cos(2\psi - \theta) \sin \kappa a + \frac{C^2}{8 \operatorname{sh}^2 \kappa h} \sin 2\kappa a (1 + \cos 2\psi) + \\ + \frac{C^2}{16 \operatorname{sh}^2 \kappa h} \sin 2\kappa a \operatorname{ch} 2\kappa h \left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \kappa h} - 3 \frac{\cos 2\psi}{\operatorname{sh}^2 \kappa h} \right)$$

$$\eta_2 = -\frac{C}{2} \cos \theta \cos \kappa a + \frac{C}{6} \cos(2\psi - \theta) \cos \kappa a + \frac{C^2}{8 \operatorname{sh}^2 \kappa h} \sin 2\kappa a (1 + \cos 2\psi) + \\ + \frac{C^2}{16 \operatorname{sh}^2 \kappa h} \sinh 2\kappa h \cos 2\psi \left(2 + 3 \frac{\cos 2\kappa a}{\operatorname{sh}^2 \kappa h} \right) + \frac{C^2}{8 \operatorname{sh}^2 \kappa h} \operatorname{sh} 2\kappa h - \frac{C^2}{4 \operatorname{sh} 2\kappa h} \cos 2\kappa a$$

Здесь $a \in [0, L]$ – параметр, определяющий индивидуальность точек свободной поверхности, причем $a = 0, L$ на левой и правой боковых стенках сосуда.

Безразмерная амплитуда C и "медленная" фаза θ стационарных волн определяются формулами

$$C^+ = \frac{1}{\sqrt{\phi_1}} \sqrt{\frac{1-p}{\varepsilon} + \frac{1}{24}}, \quad \theta^+ = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} \left(\phi_1 > 0, \quad p < 1 + \varepsilon \frac{1}{24} \right) \quad (2.3)$$

$$C^- = \frac{1}{\sqrt{-\phi_1}} \sqrt{\frac{p-1}{\varepsilon} + \frac{5}{24}}, \quad \theta^- = 0, \pi, \quad \left(\phi_1 < 0, \quad p > 1 - \varepsilon \frac{5}{24} \right) \quad (2.4)$$

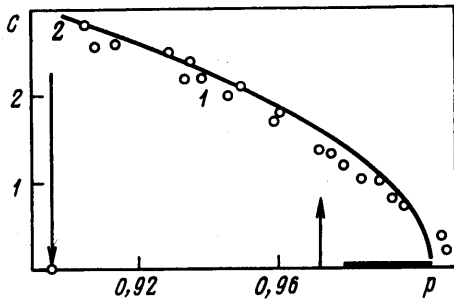
$$\phi_1 = \frac{1}{64} \operatorname{cth}^4 \kappa h (2 \operatorname{th}^6 \kappa h + 3 \operatorname{th}^4 \kappa h + 12 \operatorname{th}^2 \kappa h - 9)$$

Здесь величина $\varepsilon = (s\Omega^2/g)^2 \approx (s\omega^2/g)^2$ принимается постоянной для фиксированных s и ω .

Уравнения (2.3) и (2.4) определяют стационарные амплитуды $C = C(p)$ и фазу θ возбуждаемых волн.

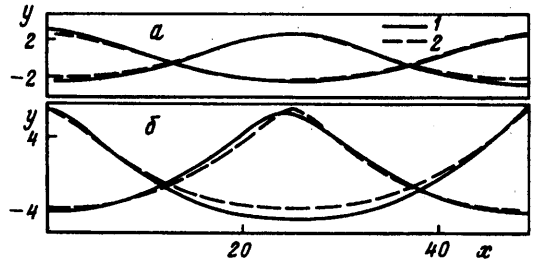
3. Экспериментальные результаты. Обсуждение. В настоящих экспериментах исследовалось гармоническое возбуждение второй моды ($n = 2$) стоячих волн в жидкости глубины $h = 25$ см. Амплитуда колебаний сосуда была фиксированной $s = 2,5$ см. Частота колебаний Ω сосуда изменялась в малой окрестности значения собственной частоты второй моды $\omega = 11,10$ с⁻¹. Отметим, что в случае основного резонанса Фарадея, рассмотренного в [5], $\omega \sim \Omega/2$ и возбуждение второй моды осуществлялось при $s = 0,25$ см.

Амплитуда возбуждаемой волновой моды зависит от частоты Ω . Экспериментально резонансная зависимость снималась по следующей методике. Сначала устанавливалась частота колебаний сосуда $\Omega = 11,10$ с⁻¹ ($p = 1$) и после достижения стационарного режима колебаний жидкости частота Ω плавно увеличивалась до 11,2 с⁻¹ ($p = 1,009$), при которой волновые движения практически затухали. Величина



Фиг. 1

Фиг. 1. Резонансная зависимость для $n = 2$, $h = 25$ см, $s = 2,5$ см: 1 – эксперимент, 2 – расчет по формулам (2.3)



Фиг. 2

Фиг. 2. Волновые профили в моменты наибольшего развития: а – $C = 1,10$ ($p = 0,993$); б – $C = 2,15$ ($p = 0,951$); кривые 1 – эксперимент, 2 – расчет по формулам (2.2)

$p_u = 1,009$ принималась за верхнюю границу резонансной зоны (см. (2.1)). Затем производилось пошаговое уменьшение ($\Delta p \sim 0,001$) частоты Ω и для каждого ее значения определялась безразмерная амплитуда C , рассчитываемая как произведение $\kappa \varepsilon^{-1/2}$ на полусумму максимальной и минимальной ординат свободной поверхности жидкости в момент наибольшего развития волны; отметим, что $\kappa = 0,126 \text{ см}^{-1}$ и $\varepsilon^{-1/2} = 0,31$. При уменьшении частоты Ω амплитуда волны возрастала. Это наблюдалось до значения $\Omega_{\min} = 9,94 \text{ с}^{-1}$ ($p_{\min} = 0,895$), при котором происходил срыв колебаний (направленная вниз стрелка на фиг. 1). При дальнейшем уменьшении Ω волны на свободной поверхности отсутствовали. Если после срыва колебаний медленно увеличивать частоту колебаний сосуда, то волны возбуждаются лишь при $\Omega = 10,80 \text{ с}^{-1}$ ($p = 0,972$). Наблюдался скачкообразный рост амплитуды (жесткое возбуждение, на фиг. 1 направленная вверх стрелка). Указанное значение $p = 0,972$ было принято за нижнюю границу резонансной зоны.

Резонансная зона, рассчитанная по (2.1), показана на фиг. 1 отрезком на оси абсцисс p . Для сравнения с данными эксперимента на фиг. 1 приведена резонансная кривая, рассчитанная по формуле (2.3); в условиях эксперимента $\phi_1 = 0,112 > 0$. Сопоставляя экспериментальные и теоретические данные, можно отметить довольно хорошее их совпадение.

Отметим, что максимальная величина амплитуды C , зафиксированная в эксперименте при $p_{\min} = 0,895$, равна 2,58, что отвечает крутизне волны 0,224. Это меньше прогнозируемого в [4] значения максимально возможной крутизны волн 0,309.

На фиг. 2 кривыми 1 показаны профили волн двух разных амплитуд в моменты наибольшего отклонения свободной поверхности от среднего уровня, полученные в эксперименте. Фигура 2, а отвечает амплитуде $C = 1,1$ ($p = 0,993$). Профиль волны близок к синусоидальному. С увеличением C все сильнее начинают сказываться нелинейные эффекты, приводящие к искажению волнового профиля; наблюдается заострение гребня и уплощение подошвы волны (фиг. 2, б, $p = 0,951$, $C = 2,15$). Нелинейные эффекты проявляются также и в колебаниях узлов стоячей волны – узла как неподвижной точки волновой поверхности на фиг. 2, а и б не существует. Кривые 2 на фиг. 2 – волновые профили, рассчитанные по формулам (2.2). Видно, что теоретическая модель неплохо описывает данные эксперимента.

Заключение. Экспериментально реализована возможность параметрического возбуждения стоячих волн на свободной поверхности жидкости при вертикальных колебаниях прямоугольного сосуда, генерируемых в условиях гармонического резонанса

Фарадея. Для второй моды снята амплитудно-частотная зависимость и проведены оценки резонансной зоны. Теоретическая модель находится в хорошем количественном соотношении с данными эксперимента.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-01080) и CONACYT (Mexico, Catedra Patrimonial, С.Я. Секерж-Зенькович, Ref. 489100-2, Exp. 950060).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miles J., Henderson D.* Parametrically forced surface waves // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1990. V. 22. P. 143–165.
2. *Dodge F.T., Kana D.D., Abramson H.N.* Liquid surface oscillations in longitudinally excited rigid cylindrical containers // *AIAA Journal.* 1965. V. 3. № 4. P. 685–695.
3. *Kumer K.* Linear theory of Faraday instability in viscous liquids // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1996. V. 452. № 1948. P. 1113–1126.
4. *Sekerzh-Zen'kovich S.Ya., Bordakov G.A., Flores-Espinoza R., Lizarraga-Celaya C.* On peaking and breaking of standing waves excited in synchronous Faraday resonance // *Phys. Fluids*, 1998. V. 10. № 7. P. 1772–1774.
5. *Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А.* Экспериментальное исследование поверхностных волн, возбуждаемых при резонансе Фарадея // *Изв. РАН. МЖГ.* 1995. № 1. С. 122–129.

Москва

Поступила в редакцию
5.IV.1999