МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 2000

УДК 532.582.81:532.546.2

© 2000 г. И.В. ЧЕРНЫШЕВ

ЗАДАЧА СТОКСА ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ С РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПОРИСТОСТИ

Исследуется стационарное обтекание неоднородной пористой сферической частицы поступательным потоком вязкой жидкости в приближении Стокса. Для пористой частицы с коэффициентом проницаемости, меняющимся по степенному закону от радиуса, получено аналитическое решение, определяющее поля скорости и давления жидкости снаружи и внутри частицы.

Классическая задача о медленном обтекании непроницаемого твердого шара поступательным потоком (задача Стокса) и ее обобщение на случай обтекания сферической жидкой капли (Адамар и Рыбчинский) приводятся во многих монографиях, например [1]. Обтекание пористой сферической частицы однородным потоком рассмотрено в [2, 3], а в [4] получено решение для пористой частицы, помещенной в произвольный поступательно-сдвиговый поток.

Во многих гидродинамических процессах химической технологии приходится иметь дело с частицами неоднородной пористости. Например, зерна катализатора, полученные прокаливанием, состоят из слоев с различной пористостью, в частности пористая частица может иметь непроницаемое ядро или, напротив, плохо проницаемую внешнюю поверхность. Чисто сдвиговое течение около радиально неоднородной частицы рассматривалось в [5]. В настоящей работе приводится решение задачи об обтекании радиально неоднородной пористой частицы поступательным потоком.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о стационарном обтекании неоднородной пористой сферической частицы радиуса a поступательным потоком вязкой жидкости в приближении Стокса. Начало сферической системы координат r, θ, φ поместим в центре частицы. В силу осесимметричности в задаче (компонента скорости $v_\varphi \equiv 0$) отсутствует зависимость от φ.

В предположении, что число Рейнольдса $\mathrm{Re} = Ua\rho/\mu < 1$, вне частицы скорость и давление определяются системой уравнений Стокса [1]

$$\Delta \mathbf{v} = \operatorname{grad} p, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

Течение жидкости внутри частицы будем описывать законом Дарси с коэффициентом проницаемости k, зависящим от безразмерного радиуса r

$$\mathbf{V} = -k(r)\operatorname{grad} P, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь все величины безразмерные, в качестве характерных масштабов длины, скорости и давления выбраны соответственно радиус частицы a, скорость набегающего потока U и $p_0 = \mu U/a$, где μ – динамическая вязкость жидкости; коэффициент проницаемости частицы обезразмерен на a^2.

Вдали от частицы поле скорости должно быть однородным, т.е.

$$r \to \infty, \quad v_r = \cos\theta, \quad v_\theta = -\sin\theta \tag{1.3}$$

На поверхности частицы внешнее нормальное напряжение равно внутреннему давлению, нормальная компонента скорости непрерывна, а касательная компонента скорости терпит разрыв, пропорциональный величине ее производной по внешней нормали [6, 7]

$$p-2\frac{\partial v_r}{\partial r}=P,\quad v_r=V_r,\quad \lambda\sqrt{k}\,\frac{\partial v_\theta}{\partial v_r}=v_\theta-V_\theta\quad (r=1) \tag{1.4}$$

Значение безразмерной постоянной λ зависит как от физической природы пористости материала, так и от геометрии его поверхности. По данным работ [6, 7], $0{,}25 \leqslant \lambda \leqslant 10$. Эта зависимость справедлива только для очень малых значений коэффициента проницаемости на границе.

2. Внешнее и внутреннее гидродинамические поля. Решение для внешнего поля ищем в виде

$$v_r(r,\theta)=f_1(r)\cos\theta,\quad v_\theta(r,\theta)=f_2(r)\sin\theta,\quad p(r,\theta)=f_3(r)\cos\theta \tag{2.1}$$

Подставив эти формулы в систему (1.1), получим

$$r^2f_1''+2rf_1'-4f_1=r^2f_3'+4f_2 \tag{2.2}$$

$$r^2f_2''+2rf_2'-2f_2=-rf_3+2f_1$$

Применяя оператор div к первому уравнению в (1.1), получим уравнение Лапласа $\Delta p=0$. Отсюда, учитывая подстановку (2.1), имеем

$$r^2f_3''+2rf_3'-2f_3=0$$

Общее решение этого уравнения $f_3=Ar+Cr^{-2}$. Поскольку давление ограничено на бесконечности, то $p=Cr^{-2}\cos\theta$.

Решив уравнения (2.2) с учетом условия (1.3), получаем для компонент скорости жидкости вне частицы

$$v_r=(1+Cr^{-1}+{}^2\!/_3Br^{-3})\cos\theta,\quad v_\theta=(-1-{}^1\!/_2Cr^{-1}+{}^1\!/_3Br^{-3})\sin\theta$$

Определим гидродинамическое поле внутри пористой частицы. Взяв дивергенцию от обеих частей первого уравнения (1.2), получим $\operatorname{grad}k\cdot\operatorname{grad}P+k(r)\Delta P=0$. Или в сферических координатах

$$\frac{\partial k}{\partial r}\frac{\partial P}{\partial r}+k\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial P}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)\right)=0$$

Если $P(r,\theta)=g(r)\cos\theta$, то для $g(r)$ получаем уравнение

$$kr^2g''+(2kr+k'r^2)g'-2kg=0$$

Это уравнение перепишем в виде, содержащем самосопряженный дифференциальный оператор Штурма – Лиувилля [8]

$$-(kr^2g')'+2kg=0,\quad |g(0)|<\infty,\quad k(r)\geqslant 0 \tag{2.3}$$

Из физического смысла коэффициента проницаемости $k(r)\geqslant 0$. Следовательно, $kr^2\geqslant 0$ при $r\in[0,1]$, причем в точке $r=0$ коэффициент при старшей производной в уравнении (2.3) имеет ноль не ниже 2-го порядка. Используя свойства оператора Штурма – Лиувилля, выберем из фундаментальной системы решений уравнения функцию, ограниченную в нуле: $g(r)=C_1h(r)$. Для давления и скорости жидкости внутри частицы из (1.2) получим

$$P=C_1h(r)\cos\theta,\quad V_r=-C_1k(r)h'(r)\cos\theta,\quad V_\theta=-C_1\frac{k(r)h(r)}{r}\sin\theta$$

Коэффициенты C_1, C, B в выражениях для скорости и давления жидкости найдем из граничных условий (1.4) при $r = 1$. Второе из условий (1.4) дает $C_1 = (3C + 4B)/h(1)$. Используя это выражение, для C_1 из оставшихся условий (1.4) получим линейную систему уравнений для нахождения коэффициентов C и B

$$3(1+3k_1m)C+2(1+6k_1m)B=-3$$

$$3(1+\lambda\sqrt{k_1}+6k_1)C-2(1+3\lambda\sqrt{k_1}-12k_1)B=-6$$

где $k_1 = k(1)$, $m = h'(1)/h(1)$.

Решением этой системы и соответственно C_1 будут $C=-3K_1$, $B=\frac{3}{2}K_2$, $C_1 = -3K_3/h(1)$

$$K_1(k_1,m)=\frac{1+\lambda k_1^{1/2}+4(m-1)k_1}{2+4\lambda k_1^{1/2}+3(3m-2)k_1+15\lambda m k_1^{3/2}} \tag{2.4}$$

$$K_2(k_1,m)=\frac{1-\lambda k_1^{1/2}+6(m-1)k_1}{2+4\lambda k_1^{1/2}+3(3m-2)k_1+15\lambda m k_1^{3/2}}$$

$$K_3(k_1,m)=2K_2-3K_1=\frac{1+5\lambda k_1^{1/2}}{2+4\lambda k_1^{1/2}+3(3m-2)k_1+15\lambda m k_1^{3/2}} \tag{2.5}$$

Таким образом, общее решение для внутреннего и внешнего гидродинамических полей имеет вид

$$p=-3K_1r^{-2}\cos\theta,\quad P=-3K_3\frac{h(r)}{h(1)}\cos\theta$$

$$\upsilon_r=(1-K_1r^{-1}+K_2r^{-3})\cos\theta,\quad V_r=3k(r)K_3\frac{h'(r)}{h(1)}\cos\theta \tag{2.6}$$

$$\upsilon_\theta=-(1-\frac{3}{2}K_1r^{-1}-\frac{1}{2}K_2r^{-3})\sin\theta,\quad V_\theta=-3K_3\frac{k(r)h(r)}{rh(1)}\sin\theta$$

где коэффициенты K_1, K_2, K_3 определяются формулами (2.4) и (2.5).

Поведение P, V_r, V_θ как в окрестности центра частицы ($r \to 0$), так и около ее границы ($r \to 1$) будет зависеть от конкретного вида функции проницаемости $k(r)$. Поскольку функция $h(r)$ ограничена, то компоненты скорости V_r, V_θ обращаются в ноль при $r \to 0$, если частица имеет непроницаемый центр ($k(0) = 0$).

Вследствие осевой симметрии задача позволяет ввести функцию тока. Легко показать, что безразмерная функция тока вне и внутри частицы имеет вид

$$\psi(r,\theta)=-\frac{1}{2}(r^2-3K_1r+K_2r^{-1})\sin^2\theta,\quad \Psi(r,\theta)=-\frac{3}{2}K_3k(r)r^2\frac{h'(r)}{h(1)}\sin^2\theta$$

Определим касательное напряжение $\tau_{r\theta}$ на поверхности сферы и силу сопротивления F, оказываемую пористым шаром набегающему потоку

$$\tau_{r\theta}=\left(\frac{\partial\upsilon_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\upsilon_r}{\partial\theta}-\frac{\upsilon_\theta}{r}\right)\Big|_{r=1}=-3K_2\sin\theta$$

$$F=\int_0^\pi(-\tau_{r\theta}\sin\theta-p\cos\theta)2\pi\sin\theta d\theta=4\pi(2K_2+K_1)=6\pi K_4$$

$$K_4=\frac{2}{3}(2K_2+K_1)=\frac{2}{3}\frac{3-\lambda k_1^{1/2}+16(m-1)k_1}{2+4\lambda k_1^{1/2}+3(3m-2)k_1+15\lambda m k_1^{3/2}}$$

При $k_1 = 0$ коэффициент $K_4 = 1$ и имеет место известная формула Стокса для силы сопротивления непроницаемого шара.

Вычислим расход жидкости, просачивающейся в единицу времени внутрь частицы через ее поверхность

$$Q = -\int_S (\mathbf{v}, \mathbf{n})dS = -\int_S v_r|_{r=1}\, dS = -2\pi(1 - 3K_1 + K_2)\int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta = \pi k_1 m K_3$$

Здесь интегрирование ведется по S-той части поверхности сферы, где нормальная компонента скорости отрицательна. Расход пропорционален величине граничной проницаемости k_1 и производной от давления в радиальном направлении на границе $m = h'(1)/h(1)$, которая сама, согласно (2.3), зависит от характера изменения $k(r)$.

3. Степенное распределение пористости. Типичным распределением пористости, которое, с одной стороны, часто возникает на практике, а с другой стороны, допускает аналитическое решение поставленной выше задачи, является степенное

$$k(r) = (k_1 - k_0)r^b + k_0 \quad (k_0 \geqslant 0, k_1 > 0, b > 0) \tag{3.1}$$

Здесь k_0 – значение коэффициента проницаемости в центре частицы ($r = 0$), а k_1 – на ее границе ($r = 1$). Если $k_0 = k_1$, то частица имеет постоянную пористость $k(r) = k_1$, если $k_0 > k_1$, то пористость убывает от центра к периферии, если $k_0 < k_1$, то пористость растет при удалении от центра частицы. В случае, когда $k_0 = 0$, $k(r) = k_1 r^b$, частица имеет непроницаемый центр.

Уравнение (2.3) при степенной зависимости $k(r)$ (3.1) примет вид

$$r^2((k_1 - k_0)r^b + k_0)g'' + ((b+2)(k_1 - k_0)r^{b+1} + 2k_0 r)g' - 2((k_1 - k_0)r^b + k_0)g = 0 \tag{3.2}$$

В случае $k_0 \neq 0$ проведем замену переменных $g(r) = r^c\eta(\xi)$, $\xi = dr^b$, где $d = (k_0 - k_1)/k_0$, c – один из корней уравнения $c^2 + c - 2 = 0$, т.е. $c_{1,2} = \{-2, 1\}$ (см. [9]). Тогда последнее уравнение сводится к известному гипергеометрическому уравнению для функции $\eta(\xi)$

$$\xi(\xi - 1)\eta'' + ((\alpha + \beta + 1)\xi - \gamma)\eta' + \alpha\beta\eta = 0$$

$$\gamma = 1 + \frac{c_2 - c_1}{b} = 1 + 3/b, \quad \alpha = \frac{c_2 + B_1}{b} = \frac{1 + B_1}{b}, \quad \beta = \frac{c_2 + B_2}{b} = \frac{1 + B_2}{b}$$

$$B_{1,2} = \tfrac{1}{2}(b + 1 \mp \sqrt{(b+1)^2 + 8}).$$

Ограниченное при $r = 0$ решение уравнения (3.2) выражается через гипергеометрическую функцию $F(\alpha, \beta, \gamma; \xi)$ [10] следующим образом

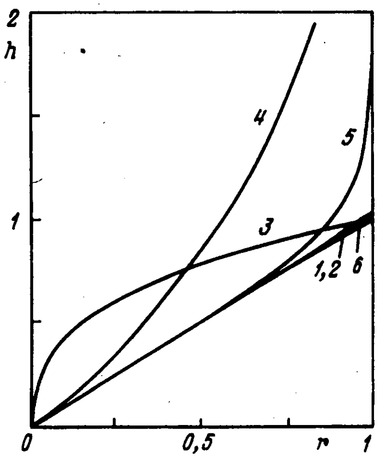
$$g(r) = C_1 h(r) = C_1 r F\left(\frac{1 + B_1}{b}, \frac{1 + B_2}{b}, 1 + 3/b; dr^b\right)$$

Используя найденное $h(r)$, получим

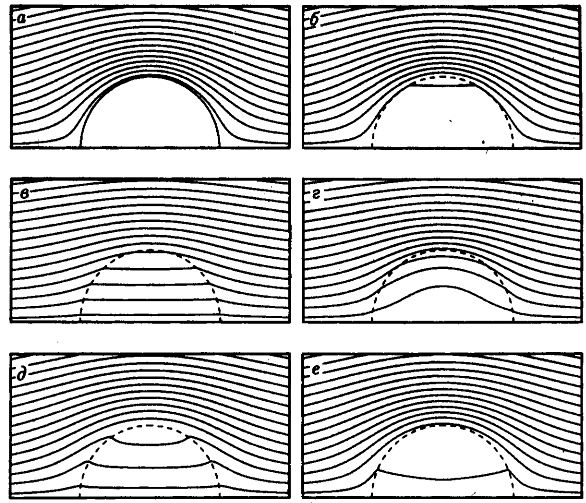
$$h'(r) = F\left(\frac{1 + B_1}{b}, \frac{1 + B_2}{b}, 1 + 3/b; dr^b\right) + \frac{db}{b+3} r^b F\left(\frac{1 + B_1}{b} + 1, \frac{1 + B_2}{b} + 1, 2 + 3/b; dr^b\right) \tag{3.3}$$

$$m = 1 + \frac{db}{b+3} F\left(\frac{1 + B_1}{b} + 1, \frac{1 + B_2}{b} + 1, 2 + 3/b; d\right) / F\left(\frac{1 + B_1}{b}, \frac{1 + B_2}{b}, 1 + 3/b; d\right)$$

Эти выражения для $h(r)$, $h'(r)$, m совместно с (2.6) определяют замкнутое решение для полей скорости и давления при обтекании поступательным потоком пористой частицы со степенной зависимостью коэффициента проницаемости (3.1).



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Радиальная зависимость давления внутри пористой частицы для $(k_0, k_1) = (0{,}00125; 0{,}001); (0{,}125; 0{,}1); (0; 0{,}1); (0{,}1; 0{,}001); (k_0 = k_1 = \text{const})$ – кривые *1–6*, ($в = 4$ – кривые *1–4*, $в = 0{,}25$ – кривая *5*)

Фиг. 2. Картины линий тока для степенного распределения проницаемости внутри частицы. *а* – непроницаемый шар; *б–е* соответствуют случаям *1–5* на фиг. 1

В случае $k_0 = 0$ имеем $k(r) = k_1 r^b$ и уравнение (2.3) имеет вид

$$r^2 g'' + (2 + b) r g' - 2g = 0$$

Его решение представляется в виде обычных степенных функций

$$g(r) = C_1 r^\delta + C_2 r^\chi, \quad \{\delta, \chi\} = -B_{1,2} = \tfrac{1}{2}(-(b+1) \pm \sqrt{(b+1)^2 + 8})$$

Учтем ограниченность $g(r)$ при $r = 0$

$$h(r) = r^\delta, \quad h'(r) = \delta r^{\delta - 1}, \quad m = \frac{h'(1)}{h(1)} = \delta$$

На основе полученных формул были проведены расчеты для некоторых вариантов пористых частиц со степенным распределением пористости. На фиг. 1 представлены графики функции $h(r)$, а соответствующие им картины линий тока построены на фиг. 2. Поскольку решение осесимметрично, то на фиг. 2 изображена только верхняя часть области течения ($z > 0$).

На фиг. 2, *а* построены линии тока при обтекании непроницаемой жесткой частицы ($k_1 = 0$). В случае близких значений k_0 и k_1 ($|d| < 0{,}2$) картина течения мало отличается от обтекания пористой частицы с постоянной пористостью независимо от величины степени b. При этом если $k_1 < 0{,}001$, то картина течения близка к случаю обтекания твердой частицы (фиг. 2, *б*). Здесь незначительное просачивание жидкости через частицу все же происходит. Если $k_1 > 0{,}1$, то течение больше напоминает невозмущенный поток (фиг. 2, *в*). Фигура 2, *г* соответствует степенному распределению пористости с $k_0 = 0$, $k_1 = 0, 1$, $b = 4$. Поскольку проницаемость частицы уменьшается при приближении к центру, то происходит некоторое вытеснение линий тока, качественно картина течения напоминает обтекание частицы с эффективным радиусом ме́ньшим, чем a. На фиг. 2, *д* представлен почти предельный случай ($d \to 1$): $k_0 = 0{,}1$, $k_1 = 0{,}001$ ($d = 0{,}99$), $b = 4$. В этом случае частица имеет плохо проницаемую поверхностную "корку" и гораздо более пористая внутри. Жидкость, просочившаяся через плотную границу, подтекает в более проницаемую центральную часть шара, что и объясняет искривление линий тока внутри частицы. Давление в окрестности $r = 1$ меняется очень резко (кривая 4 на фиг. 1, $m \approx 39{,}3$).

Когда величины k_0 и k_1 различаются существенно, то параметр b также заметно влияет на характер внутреннего течения. Степень b влияет на величину средней проницаемости среды

$$\langle k \rangle = \int_0^1 k(r)dr = k_0 \frac{b+1-d}{b+1}$$

Если $b \gg 1$, то $\langle k \rangle$ ближе к значению k_0, если $b \ll 1$, то средняя проницаемость ближе к k_1. Так, на фиг. 2, *е* линии тока построены при тех же значениях k_0 и k_1, что и фиг. 2, *д*, но $b = 0{,}25$. В этом случае частица имеет более толстый поверхностный плохо проницаемый слой, что приводит к более медленному росту давления при $r \to 1$ (кривая 5 на фиг. 1, $m \approx 6{,}0$) и картина течения более напоминает обтекание непроницаемой сферы.

Параметр λ оказывает слабое влияние на картину течения. Так, уменьшение λ от 10 до 0,25 приводит лишь к некоторому изменению характера преломления линий тока на границе частицы. Во всех приведенных выше примерах λ бралось равным 1,0.

Если $b = 0$ или $k_1 = k_0$, то оба рассмотренных выше случая степенного распределения пористости приводят к известному решению для частицы с постоянной проницаемостью $k(r) = k_1$, полученному в [2]. Это решение описывается формулами (2.6), (2.4), (2.5), если в них подставить $h(r) = r$, $h'(r) = 1$, $m = 1$ (кривая 6 на фиг. 1).

Заключение. Внутреннее и внешнее гидродинамические поля при произвольном осесимметричном сдвигово-поступательном обтекании сферической частицы с радиально-неоднородным распределением пористости в приближении Стокса являются суперпозицией решений, полученных в данной работе и в [5] соответственно для обтекания неоднородной пористой частицы вязким поступательным потоком и для частицы в чисто деформационном потоке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
2. *Потапов Е.Д., Серебрякова Н.Г.* Обтекание пористого шара при малых числах Рейнольдса // Применение аналитических и численных методов в динамике жидких и сыпучих сред. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1974. Вып. 3. С. 19–24.
3. *Потапов Е.Д., Серебрякова Н.Г., Трошин В.Г.* Взаимодействие пористых сферических тел, обтекаемых медленным потоком вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 3. С. 181–183.
4. *Журов А.И., Полянин А.Д., Потапов Е.Д.* Обтекание пористой частицы сдвиговым потоком // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 3. С. 113–120.
5. *Чернышев И.В.* Сферическая частица с радиально неоднородным распределением пористости в сдвиговом потоке // Вестн. ВолГУ. Математика. Физика. 1998. № 3. С. 87–93.
6. *Beavers G.S., Joseph D.D.* Boundary conditions at a naturally permeable wall // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. Pt 1. P. 197–207.
7. *Saffman P.G.* On the boundary condition at the surface of a porous medium // Stud. Appl. Math. 1971. V. 50. № 2. P. 93–101.
8. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
10. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978. 319 с.

Волгоград

Поступила в редакцию
12.III.1999