

УДК 533.72

© 2000 г. А.Б. ПОДДОСКИН, А.А. ЮШКАНОВ, Ю.И. ЯЛАМОВ

**О КОЭФФИЦИЕНТАХ СКОЛЬЖЕНИЯ
И СКАЧКАХ МАКРОПАРАМЕТРОВ
ДВУХАТОМНОГО ГАЗА С ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ СТЕПЕНЯМИ
СВОБОДЫ НА СЛАБОИСКРИВЛЕННОЙ
СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

В рамках предложенного ранее кинетического модельного уравнения, в котором учтены вращательные степени свободы молекул двухатомного газа, методом полупространственных моментов решена задача о скольжении газа вдоль твердой сферической поверхности малой кривизны. Получены коэффициенты скольжения второго порядка (линейные по числу Кнудсена K_n поправки к изотермическому и тепловому скольжению C'_m и β'_R, β_R). Вычислены коэффициенты скачка макропараметров газа C_v и C_q второго порядка по числу K_n , характеризующие разрыв нормальных потоков массы и тепла на границе раздела газ – твердая фаза. Указанные коэффициенты представлены в виде функций, зависящих от коэффициентов аккомодации тангенциального импульса, коэффициентов аккомодации трансляционной и ротационной составляющих энергии и числа Прандтля. Для ряда двухатомных газов проведены вычисления этих кинетических коэффициентов.

При решении задач динамики неоднородных газов в так называемом режиме со скольжением необходимо знать граничные условия для макропараметров газа: скорости, температуры и др. К эффектам первого порядка в граничных условиях относятся изотермическое, тепловое скольжения и скачок температуры, которые характеризуются кинетическими коэффициентами C_m, K_{TS} и C_r . Эти эффекты связаны с членовскими членами в объемной функции распределения. Вычислению этих коэффициентов для одноатомного (простого) газа посвящено значительное количество работ [1–6]. Для двухатомного газа, молекулы которого кроме поступательных степеней свободы имеют еще и вращательные, указанные коэффициенты получены в [7, 8]. К эффектам второго порядка естественно относить эффекты, связанные с членами второго порядка в разложении Чепмена – Энскога (барнеттовский эффект), и линейные по числу K_n поправки к членам первого порядка, связанные с кривизной поверхности, а также эффекты, связанные с неоднородностью макропараметров в слое Кнудсена.

Эффекты второго порядка в граничных условиях проявляются в виде поправок к тепловому (β'_R) и изотермическому (C'_m) скольжениям. Кроме этого, возникает дополнительное скольжение, связанное с неоднородностью градиента температуры около искривленной поверхности (β_R) и барнеттовское скольжение (β_B). На границе раздела возникает разрыв нормальных гидродинамических потоков массы и тепла, которые характеризуются кинетическими коэффициентами C_v и C_q . Указанные коэффициенты второго порядка для простого газа вычислены в [9–14]. В некоторых задачах газодинамики, в частности в теории термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц (см., например, [9, 10]), эффекты второго порядка по числу K_n в граничных условиях дают в термофоретическую силу такой же вклад как, например, изотермическое скольжение.

В настоящей работе коэффициенты $\beta'_R, \beta_R, C'_m, C_v, C_q$ получены для двухатомного газа с вращательными степенями свободы. Для этого используется модельное кинетическое уравнение [7].

1. Постановка задачи. Пусть сферическая частица радиуса R находится в двухатомном газе в поле постоянного градиента температуры $(\nabla T)_\infty = \text{const}$. Поместим начало сферической системы координат в центре частицы, а полярную ось направим вдоль градиента температуры. Будем считать, что условие линеаризации задачи $R|(\nabla T)_\infty| \ll 1$ выполнено. В этом случае скорость движения газа вдоль поверхности малой кривизны ($\lambda \ll R$) также будет мала по сравнению со скоростью теплового движения молекул. Будем считать, что из внутренних степеней свободы молекул этого газа "включены" только вращательные. Предполагается, что средняя объемная температура газа T_0 такова, что можно рассматривать вращательные степени свободы на основе классической механики, а колебательные степени свободы – "заморожены". Как показывают расчеты, для таких газов, как N_2, O_2 и др., этим условиям соответствует диапазон температур 10–1000 К. В этом случае коэффициент Пуассона $\gamma = c_p/c_v = 7/5$ (c_p, c_v – удельные теплоемкости газа при постоянных давлении и объеме).

Экспериментальные данные по вязкости μ и теплопроводности χ воздуха, азота, закиси азота, кислорода, водорода [15] дают число Прандтля $Pr = c_p\mu/\chi \approx 0,7$. Это значение использовано в дальнейших расчетах.

Вне слоя Кнудсена течение газа описывается функцией распределения Чепмена – Энскога, которая в линеаризованном виде может быть представлена [16] как

$$f_{ch} = f_0(1 + \Phi_0 + \Psi_{Ch}) \quad (1.1)$$

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT_0} \right)^{3/2} \left(\frac{I}{kT_0} \right) \exp(-c^2 - c_\omega^2) \quad c = \sqrt{\frac{m}{2kT_0}} \mathbf{v}$$

$$\Phi_0 = \mathbf{v} + (c^2 + c_\omega^2 - 5/2)\boldsymbol{\tau} + 2(\mathbf{c}\mathbf{G}), \quad \mathbf{G} = \sqrt{m/2kT_0} \mathbf{u}, \quad c_\omega^2 = I\omega^2/2kT_0$$

$$\Psi_{Ch} = -a_1(\mathbf{c}\mathbf{g})(c^2 + c_\omega^2 - 7/2) - b_1 c_r c_\theta \Pi_{r\theta}, \quad \mathbf{g} = (\nabla T)_\infty / T_0$$

$$\Pi_{r\theta} = \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{G_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial G_r}{\partial \theta} \right], \quad a_1 = \frac{2\mu}{Pr \rho_0} \sqrt{\frac{m}{2kT_0}}, \quad b_1 = \frac{4\mu}{\rho_0} \sqrt{\frac{m}{2kT_0}}$$

$$\mathbf{v} = \frac{n - n_0}{n_0}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{T - T_0}{T_0}$$

Здесь m, I и ω – масса, момент инерции и угловая скорость молекулы, \mathbf{v} – скорость поступательного движения молекул, n_0 и T_0 – равновесные значения концентрации и температуры, $\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}$ – отклонения от равновесных значений безразмерной концентрации и температуры.

Около частицы газ описывается функцией распределения

$$f = f_{Ch} + f_0 \Phi \quad (1.2)$$

Функция Φ находится из решения модельного уравнения [7], которое в линеаризованном виде может быть представлено как

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \nabla \Phi = \varepsilon (\mathbf{v} + (c^2 + c_\omega^2 - 5/2)\boldsymbol{\tau} + 2(\mathbf{c}\mathbf{G}) + \\ + \xi(\mathbf{c}\mathbf{Q})(c^2 + c_\omega^2 - 7/2) - \Phi) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где \mathbf{Q} – безразмерный поток тепла.

Частота столкновения молекул ε и ξ – свободные параметры модели, которые выражаются через коэффициенты переноса и число Pr [7]: $\varepsilon = 2/b_1, \xi = 4(1 - Pr)/7$.

Учитывая, что средняя длина свободного пробега [18] $\lambda = (\mu/\rho)\sqrt{\pi m/2kT_0}$, находим $\varepsilon = \sqrt{\pi}/(2\lambda)$.

Используя обозначение [7]

$$(\Phi, \Psi) = \int e^{-c^2 - c_\omega^2} \Phi \Psi \frac{d^3 c}{\pi^{3/2}} dc_\omega^2$$

моменты \mathbf{v} , τ , \mathbf{G} , \mathbf{Q} можно записать в виде

$$\mathbf{v} = (1, \Phi), \quad \tau = \frac{2}{5} \left(\left(c^2 + c_\omega^2 - \frac{5}{2} \right), \Phi \right)$$

$$\mathbf{G} = (c, \Phi), \quad \mathbf{Q} = \left(c \left(c^2 + c_\omega^2 - \frac{7}{2} \right), \Phi \right)$$

Задачу удобно решать в сферической системе координат r, θ, ϕ . Ввиду осевой симметрии функция Φ не зависит от координаты ϕ . Кроме того, оценивая порядок величин входящих в уравнение (1.3), отметим, что $\partial\Phi/\partial r \sim \Phi/\lambda$, $\partial\Phi/\partial\theta \sim \Phi$ и переменная r меняется в пределах от R до $R + \lambda = R(1 + \text{Kn})$, поэтому с точностью до линейных по Kn членов уравнение (1.3) в сферической системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} c_r \frac{\partial\Phi}{\partial r_0} + \varepsilon_0 \left[c_\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + (c_\theta^2 + c_\phi^2) \frac{\partial\Phi}{\partial c_r} + (c_\phi^2 \text{ctg}\theta - c_r c_\theta) \frac{\partial\Phi}{\partial c_\theta} - \right. \\ \left. - (c_\phi c_\theta \text{ctg}\theta + c_r c_\phi) \frac{\partial\Phi}{\partial c_\phi} \right] = \mathbf{v} + \left(c^2 + c_\omega^2 - \frac{5}{2} \right) \tau + 2(\mathbf{cG}) + \\ + \xi(\mathbf{cQ}) \left(c^2 + c_\omega^2 - \frac{7}{2} \right) - \Phi \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$r_0 = \varepsilon(r - R), \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{R\varepsilon} \sim \text{Kn}$$

Решение уравнения (1.4) будем искать в виде

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \quad (1.5)$$

$$\Phi_1 = c_\theta \Psi_1 = c_\theta (\Psi_1^{(0)} + \varepsilon_0 \Psi_1^{(1)} + \dots), \quad \Phi_2 = \Phi_2^{(0)} + \varepsilon_0 \Phi_2^{(1)} + \dots$$

Здесь Φ_1 ответственно за скольжение газа, а Φ_2 – за скачок температуры. В частности, в теории термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц [12] скачок температуры достаточно вычислить в первом приближении по Kn , а скольжение газа – с точностью до линейных по Kn членов, т.е. во втором приближении. Учитывая это соображение, после подстановки (1.5) в (1.4) получим

$$\begin{aligned} c_r \frac{d\Phi_2^{(0)}}{dr_0} = \mathbf{v}^{(0)} + \left(c^2 + c_\omega^2 - \frac{5}{2} \right) \tau^{(0)} + 2c_r G_r^{(0)} + \\ + \xi c_r Q_r^{(0)} \left(c^2 + c_\omega^2 - \frac{7}{2} \right) - \Phi_2^{(0)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$c_\theta c_r \frac{d\Psi_1^{(0)}}{dr_0} = 2c_\theta G_\theta^{(0)} + \xi c_\theta Q_\theta^{(0)} \left(c^2 + c_\omega^2 - \frac{7}{2} \right) - c_\theta \Psi_1^{(0)} \quad (1.7)$$

$$c_\theta c_r \frac{d\Psi_1^{(1)}}{dr_0} + \left[c_\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + (c_\theta^2 + c_\phi^2) \frac{\partial}{\partial c_r} + (c_\phi^2 \text{ctg}\theta - c_r c_\theta) \frac{\partial}{\partial c_\theta} - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -(c_\varphi c_\theta \operatorname{ctg} \theta + c_r c_\varphi) \frac{\partial}{\partial c_\varphi} \left[(c_\theta \Psi_1^{(0)} + \Phi_2^{(0)}) = \right. \\
 & = 2c_\theta G_\theta^{(1)} + \xi c_\theta Q_\theta^{(1)} \left(c^2 + c_\omega^2 - \frac{7}{2} \right) - c_\theta \Psi_1^{(1)} \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

2. Моментные уравнения и их решение. Задачу будем решать методом полу-пространственных моментов (см., например, [2, .12]). Функцию Φ ищем в виде

$$\Phi = \eta^+(\Phi_1^+ + \Phi_2^+) + \eta^-(\Phi_1^- + \Phi_2^-) \quad (2.1)$$

$$\eta^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \operatorname{sign} c_r), \quad \operatorname{sign} c_r = \begin{cases} 1, & c_r > 0 \\ -1, & c_r < 0 \end{cases}$$

$$\Phi_1^{(k)\pm} = c_\theta a_0^{(k)\pm} + c_r c_\theta a_1^{(k)\pm} + c_\theta (c^2 + c_\omega^2 - 7/2) a_2^{(k)\pm} \quad k = 0, 1$$

$$\Phi_2^{(k)\pm} = b_0^{(k)\pm} + (c^2 - 3/2) b_1^{(k)\pm} + (c_\omega^2 - 1) b_2^{(k)\pm} + c_r (c^2 + c_\omega^2 - 7/2) b_3^{(k)\pm}$$

Здесь моменты $a_i^{(k)\pm}$, $b_i^{(k)\pm}$ являются функциями от переменных r и θ .

Умножая уравнение (1.6) последовательно на $\eta^\pm \exp(-c^2 - c_\omega^2)$, $\eta^\pm (c^2 - 3/2) \exp(-c^2 - c_\omega^2)$, $\eta^\pm (c_\omega^2 - 1) \exp(-c^2 - c_\omega^2)$, $\eta^\pm c_r (c^2 + c_\omega^2 - 7/2) \exp(-c^2 - c_\omega^2)$, а уравнения (1.7) и (1.8) последовательно на $\eta^\pm c_\theta \exp(-c^2 - c_\omega^2)$, $\eta^\pm c_\theta c_r \exp(-c^2 - c_\omega^2)$, $\eta^\pm c_\theta (c^2 + c_\omega^2 - 7/2) \exp(-c^2 - c_\omega^2)$ и интегрируя по всему пространству скоростей (\mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$), получим систему моментных уравнений для коэффициентов $a_i^{(k)\pm}$ и $b_i^{(k)\pm}$. Эту систему удобно представить в матричном виде. Введем матрицы $\mathbf{M}^{[k]} = \parallel m_{ij}^{[k]} \parallel$, аналогично $\mathbf{L}^{[k]}$, $\mathbf{N}^{[k]}$, и векторы, т.е. матрицы-столбцы

$$\mathbf{a}^{(k)}(r, \theta) = \begin{pmatrix} a_0^{(k)+}(r, \theta) \\ a_0^{(k)-}(r, \theta) \\ a_1^{(k)+}(r, \theta) \\ a_1^{(k)-}(r, \theta) \\ a_2^{(k)+}(r, \theta) \\ a_2^{(k)-}(r, \theta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^{(k)}(r, \theta) = \begin{pmatrix} b_0^{(k)+}(r, \theta) \\ b_0^{(k)-}(r, \theta) \\ b_1^{(k)+}(r, \theta) \\ b_1^{(k)-}(r, \theta) \\ b_2^{(k)+}(r, \theta) \\ b_2^{(k)-}(r, \theta) \\ b_3^{(k)+}(r, \theta) \\ b_3^{(k)-}(r, \theta) \end{pmatrix}$$

В результате системы моментных уравнений приобретают вид

$$\frac{d}{dr_0} \mathbf{M}^{[1]} \mathbf{b}^{(0)}(r, \theta) = \mathbf{L}^{[1]} \mathbf{b}^{(0)}(r, \theta) \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{dr_0} \mathbf{M}^{[2]} \mathbf{a}^{(0)}(r, \theta) = \mathbf{L}^{[2]} \mathbf{a}^{(0)}(r, \theta) \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dr_0} \mathbf{M}^{[2]} \mathbf{a}^{(1)}(r, \theta) + \mathbf{N}^{[2]} \mathbf{a}^{(0)}(r, \theta) + \mathbf{N}^{[1]} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{b}^{(0)}(r, \theta) \right) = \mathbf{L}^{[2]} \mathbf{a}^{(1)}(r, \theta) \quad (2.4)$$

$$m_{11}^{[2]} = -m_{22}^{[2]} = m_{33}^{[2]} = -m_{44}^{[2]} = 1/(4\sqrt{\pi})$$

$$m_{13}^{[2]} = m_{24}^{[2]} = m_{31}^{[2]} = m_{35}^{[2]} = m_{42}^{[2]} = m_{46}^{[2]} = m_{53}^{[2]} = m_{64}^{[2]} = 1/8$$

$$\begin{aligned}
m_{15}^{[2]} &= -m_{26}^{[2]} = m_{51}^{[2]} = -m_{62}^{[2]} = 1/(8\sqrt{\pi}), \quad m_{55}^{[2]} = -m_{66}^{[2]} = 17/(16\sqrt{\pi}); \\
n_{11}^{[1]} &= n_{13}^{[1]} = n_{22}^{[1]} = n_{24}^{[1]} = n_{55}^{[1]} = n_{66}^{[1]} = 1/4, \quad n_{17}^{[1]} = -n_{28}^{[1]} = -1/(8\sqrt{\pi}), \\
n_{31}^{[1]} &= -n_{42}^{[1]} = 1/(4\sqrt{\pi}), \quad n_{33}^{[1]} = -n_{44}^{[1]} = 3/(8\sqrt{\pi}), \quad n_{53}^{[1]} = n_{64}^{[1]} = 5/8, \quad n_{57}^{[1]} = -n_{68}^{[1]} = 17/(16\sqrt{\pi}); \\
n_{11}^{[2]} &= -n_{22}^{[2]} = n_{33}^{[2]} = -n_{44}^{[2]} = -n_{16}^{[2]} = n_{25}^{[2]} = -n_{52}^{[2]} = n_{61}^{[2]} = 1/(4\sqrt{\pi}), \quad n_{13}^{[2]} = n_{24}^{[2]} = \\
&= n_{53}^{[2]} = n_{64}^{[2]} = 3/8, \quad n_{31}^{[2]} = n_{35}^{[2]} = n_{42}^{[2]} = n_{46}^{[2]} = -1/8, \quad n_{15}^{[2]} = -n_{26}^{[2]} = n_{51}^{[2]} = -n_{62}^{[2]} = \\
&= 1/(8\sqrt{\pi}), \quad n_{55}^{[2]} = -n_{66}^{[2]} = 17/(16\sqrt{\pi}), \quad n_{65}^{[2]} = -n_{56}^{[2]} = 17/(8\sqrt{\pi}); \\
l_{11}^{[2]} &= -l_{12}^{[2]} = l_{21}^{[2]} = -l_{22}^{[2]} = 1/8, \quad l_{13}^{[2]} = l_{14}^{[2]} = l_{23}^{[2]} = l_{24}^{[2]} = l_{32}^{[2]} = l_{42}^{[2]} = \\
&= -l_{31}^{[2]} = -l_{41}^{[2]} = 1/(8\sqrt{\pi}), \quad l_{33}^{[2]} = l_{44}^{[2]} = [\xi - 8(\pi - 1)]/(64\pi), \quad l_{34}^{[2]} = \\
&= l_{43}^{[2]} = -(\xi + 8)/(64\pi), \quad l_{55}^{[2]} = l_{66}^{[2]} = (49\xi - 56)/64, \quad l_{35}^{[2]} = l_{53}^{[2]} = \\
&= -l_{46}^{[2]} = -l_{64}^{[2]} = (7\xi - 8)/(64\sqrt{\pi}), \quad l_{36}^{[2]} = l_{63}^{[2]} = -l_{45}^{[2]} = -l_{54}^{[2]} = \\
&= 7\xi/(64\sqrt{\pi}), \quad l_{56}^{[2]} = l_{65}^{[2]} = 49\xi/64
\end{aligned}$$

Остальные элементы этих матриц равны нулю.

Решения уравнений (2.2), (2.3), полученные в [7, 8], имеют вид

$$b_k^{(0)\pm}(r_0, \theta) = B_1(\theta)\gamma_k^\pm \exp(-\rho_1 r_0) + B_2(\theta)\delta_k^\pm \exp(-\rho_2 r_0), \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

$$\gamma_0^+ = 1, \quad \gamma_0^- = 0,4133, \quad \gamma_1^+ = -1,8611, \quad \gamma_1^- = -0,6877, \quad \gamma_2^+ =$$

$$= -3,5255, \quad \gamma_2^- = -0,6951, \quad \gamma_3^+ = 1,9390, \quad \gamma_3^- = -0,2698;$$

$$\delta_0^+ = 1, \quad \delta_0^- = 0,3406, \quad \delta_1^+ = -1,5705, \quad \delta_1^- = -0,2516, \quad \delta_2^+ = -0,1037,$$

$$\delta_2^- = -0,2225, \quad \delta_3^+ = 0,9150, \quad \delta_3^- = -0,1029;$$

$$\rho_1 = 1,4793, \quad \rho_2 = 1,7759$$

$$a_k^{(0)\pm}(r_0, \theta) = A_1(\theta)\alpha_k^{(0)\pm} \exp(-\sigma_1 r_0) +$$

$$+ A_2(\theta)\beta_k^{(0)\pm} \exp(-\sigma_2 r_0), \quad k = 0, 1, 2 \quad (2.6)$$

$$\alpha_0^{(0)+} = 1, \quad \alpha_0^{(0)-} = 0,4635, \quad \alpha_1^{(0)+} = -0,3991, \quad \alpha_1^{(0)-} = 0,1760,$$

$$\alpha_2^{(0)+} = -0,7460, \quad \alpha_2^{(0)-} = -0,0686;$$

$$\beta_0^{(0)+} = 1, \quad \beta_0^{(0)-} = 0,1908, \quad \beta_1^{(0)+} = -1,0878, \quad \beta_1^{(0)-} = 0,0977, \quad \beta_2^{(0)+} = 0,1417,$$

$$\beta_2^{(0)-} = 0,0052,$$

$$\sigma_1 = 1,3313, \quad \sigma_2 = 2,0793$$

Решение уравнения (2.4) проводится с использованием методики решения систем неоднородных дифференциальных уравнений [17]. В результате можно показать, что полное решение настоящей задачи с учетом (2.5) и (2.6) представляется в виде

$$a_k^\pm(r_0, \theta) = a_k^{(0)\pm}(r_0, \theta) + \varepsilon_0 a_k^{(1)\pm}(r_0, \theta) =$$

$$= A_1^*(\theta)[\alpha_k^\pm(\varepsilon_0) - r_0 \alpha_k^{(0)\pm}] \exp(-\sigma_1 r_0) +$$

$$+ A_2^*(\theta)[\beta_k^\pm(\varepsilon_0) - r_0 \beta_k^{(0)\pm}] \exp(-\sigma_2 r_0) +$$

$$+ \varepsilon_0 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} \mu_k^\pm \exp(-\rho_1 r_0) + \varepsilon_0 \frac{\partial B_2}{\partial \theta} \nu_k^\pm \exp(-\rho_2 r_0), \quad k = 0, 1, 2 \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \alpha_k^\pm(\varepsilon_0) &= \alpha_k^{(0)\pm} + \varepsilon_0 \alpha_k^{(1)\pm}, \quad \beta_k^\pm(\varepsilon_0) = \beta_k^{(0)\pm} + \varepsilon_0 \beta_k^{(1)\pm} \\ \alpha_0^{(1)+} &= 0, \quad \alpha_0^{(1)-} = -2,3378, \quad \alpha_1^{(1)+} = -4,6948, \quad \alpha_1^{(1)-} = -0,3745 \\ \alpha_2^{(1)+} &= 5,2738, \quad \alpha_2^{(1)-} = 0,9642; \\ \beta_0^{(1)+} &= 0, \quad \beta_0^{(1)-} = -2,7499, \quad \beta_1^{(1)+} = -0,6120, \quad \beta_1^{(1)-} = -2,5387, \\ \beta_2^{(1)+} &= -0,3131, \quad \beta_2^{(1)-} = -0,3978; \\ \mu_0^+ &= 23,4262, \quad \mu_0^- = 7,9377, \quad \mu_1^+ = -18,0202, \quad \mu_1^- = 3,5307, \quad \mu_2^+ = -6,9021, \quad \mu_2^- = -0,3792, \\ \nu_0^+ &= 8,3525, \quad \nu_0^- = 1,9123, \quad \nu_1^+ = -8,1012, \quad \nu_1^- = 0,9435, \quad \nu_2^+ = -0,5722, \quad \nu_2^- = 0,0093 \end{aligned}$$

Параметры $A_1^*(\theta)$, $A_2^*(\theta)$, $B_1(\theta)$, $B_2(\theta)$ находятся из граничных условий.

В качестве граничных условий для функции распределения воспользуемся зеркально-диффузной моделью [18]

$$f^+(c_r, c_\theta, c_\varphi; \omega, R) = qf_m + (1-q)f^-(-c_r, c_\theta, c_\varphi; \omega, R) \quad (2.8)$$

$$f_m = f_0(1 + \nu_m + (c^2 - 3/2)\tau_{m\tau} + (c_\omega^2 - 1)\tau_{m\tau})$$

$$f^\pm(\pm c_r, c_\theta, c_\varphi; \omega, R) = f_0(1 + 2c_\theta G_\theta(\infty) \mp a_1(\mathbf{gc})(c^2 + c_\omega^2 - 7/2) \mp$$

$$\mp b_1 c_r c_\theta \Pi_{r\theta} + [b_0^{(0)\pm} + b_1^{(0)\pm}(c^2 - 3/2) + b_2^{(0)\pm}(c_\omega^2 - 1) \pm b_3^{(0)\pm} c_r (c^2 +$$

$$+ c_\omega^2 - 7/2)] + c_\theta [a_0^\pm \pm c_r a_1^\pm + a_2^\pm (c^2 + c_\omega^2 - 7/2)])$$

$$\nu_m = (n_0 - n_m)/n_0, \quad \tau_{m\tau} = (T_0 - T_{m\tau})/T_0, \quad \tau_{m\tau} = (T_0 - T_{m\tau})/T_0$$

Здесь f^+ , f^- – функции распределения отраженных и падающих на поверхность молекул, q – коэффициент диффузности, который в условиях данной задачи совпадает с коэффициентом аккомодации тангенциального импульса [19], $G_\theta(\infty)$ – скорость скольжения газа; ν_m , $\tau_{m\tau}$, $\tau_{m\tau}$ – свободные параметры модели граничных условий [20], которые можно определить, воспользовавшись условием непротекания поверхности, т.е. должны быть равны потоки падающих и отраженных молекул, через коэффициенты аккомодации трансляционной α_t и ротационной α_r , составляющих энергии

$$\alpha_t = \frac{E_t^- - E_t^+}{E_t^- - E_{st}^+}, \quad \alpha_r = \frac{E_r^- - E_r^+}{E_r^- - E_{sr}^+} \quad (2.9)$$

Здесь E_t^\pm – трансляционные составляющие потоков энергии падающих и отраженных от стенки молекул, E_r^\pm – ротационные составляющие потоков энергии падающих и отраженных молекул, E_{st}^+ и E_{sr}^+ – трансляционная и ротационная составляющие потока энергии отраженных молекул при условии, если бы газ находился в равновесии со стенкой, т.е. когда $T_{m\tau} = T_{m\tau} = T_s$.

Воспользовавшись функциями распределения f и f_m , получим потоки числа частиц N^\pm , N_m , N_s и потоки энергии E_t^\pm , $E_{m\tau}$, E_{st}^+ , E_r^\pm , $E_{m\tau}$, E_{sr}^+

$$N^\pm = \pm \int (\mathbf{nv}) f^\pm d^3v d\omega^2 = N_0(1 + b_0^{(0)\pm} + \frac{1}{2} b_1^{(0)\pm})$$

$$N_m = \int (\mathbf{nv}) f^\pm d^3v d\omega^2 = N_0 \left(1 + \nu_m + \frac{1}{2} \tau_{m\tau} \right)$$

$$N_s = \int_+ (\mathbf{nv}) f^\pm d^3v d\omega^2 = N_0 \left(1 + v_s + \frac{1}{2} \tau_s \right)$$

$$E_t^\pm = \pm \int_+ (\mathbf{nv}) \frac{mv^2}{2} f^\pm d^3v d\omega^2 = E_0 \left(1 \mp \frac{5\sqrt{\pi}}{8} a_1 g_r + b_0^{(0)\pm} + \frac{3}{2} b_1^{(0)\pm} \pm \frac{5\sqrt{\pi}}{8} b_3^{(0)\pm} \right)$$

$$E_r^\pm = \pm \int_+ (\mathbf{nv}) \frac{I\omega^2}{2} f^\pm d^3v d\omega^2 = \frac{E_0}{2} \left(1 \mp \frac{\sqrt{\pi}}{2} a_1 g_r + b_0^{(0)\pm} + \frac{1}{2} b_1^{(0)\pm} + b_2^{(0)\pm} \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} b_3^{(0)\pm} \right)$$

$$E_{m+} = \int_+ (\mathbf{nv}) \frac{mv^2}{2} f_m d^3v d\omega^2 = E_0 \left(1 + v_m + \frac{3}{2} \tau_{m+} \right)$$

$$E_{m-} = \int_+ (\mathbf{nv}) \frac{I\omega^2}{2} f_m d^3v d\omega^2 = \frac{E_0}{2} \left(1 + v_m + \frac{1}{2} \tau_{m+} + \tau_{m-} \right)$$

$$E_{s+} = \int_+ (\mathbf{nv}) \frac{mv^2}{2} f_{ms} d^3v d\omega^2 = E_0 \left(1 + v_s + \frac{3}{2} \tau_s \right)$$

$$E_{s-} = \int_+ (\mathbf{nv}) \frac{I\omega^2}{2} f_{ms} d^3v d\omega^2 = \frac{E_0}{2} \left(1 + v_s + \frac{3}{2} \tau_s \right)$$

$$N_0 = \frac{n_0}{2} \sqrt{\frac{2kT_0}{\pi m}}, \quad E_0 = P_0 \sqrt{\frac{2kT_0}{\pi m}}$$

$$v_s = \frac{n_0 - n_s}{n_0}, \quad \tau_s = \frac{T_0 - T_s}{T_0} = -\frac{\Delta T}{T_0}$$

Здесь ΔT – скачок температуры.

На граничной поверхности должны быть равны потоки числа падающих и отраженных частиц $N^+ = N^-$. Учитывая граничное условие (2.8) и последнее соотношение, находим, что $N_m = N_s$ или

$$v_m + \frac{1}{2} \tau_{m+} = v_s + \frac{1}{2} \tau_s$$

Граничные условия для моментов функции распределения получаются в результате приравнивания коэффициентов при одинаковых полиномах от переменной s , поэтому получим

$$\begin{aligned} [b_0^{(0)+} - (1-q)b_0^{(0)-}] &= qv_m, \quad [b_1^{(0)+} - (1-q)b_1^{(0)-}] = q\tau_m \\ [b_2^{(0)+} - (1-q)b_2^{(0)-}] &= q\tau_{m-}, \quad [b_3^{(0)+} + (1-q)b_3^{(0)-}] = (2-q)a_1 g_r \\ [a_0^+ - (1-q)a_0^-] &= -2qG_\theta(\infty), \quad [a_1^+ + (1-q)a_1^-] = (2-q)b_1 \Pi_{r\theta} \\ [a_2^+ - (1-q)a_2^-] &= qa_1 g_\theta \end{aligned} \quad (2.10)$$

Решение системы уравнений (2.10) с учетом (2.5) и (2.7) дает следующее выражение для скорости скольжения газа вдоль слабо искривленной поверхности:

$$u_\theta = \sqrt{\frac{2kT_0}{m}} G_\theta(\infty) = K_{TS} \frac{v}{T_0 R} \frac{\partial T}{\partial \theta} + C_m \lambda \sqrt{\frac{2kT_0}{m}} \Pi_{r\theta} + \text{Kn} K_{TS}^{(0)} \beta_R v \frac{\partial^2 T}{r \partial \theta^2}$$

Коэффициенты скольжения можно представить в виде

$$C_m = \frac{(2-q)}{q} \frac{2\Delta_6(\epsilon_0)}{\sqrt{\pi}\Delta_4(\epsilon_0)} = C_m^{(0)} (1 + C'_m \text{Kn})$$

$$C_m' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Delta_6'(0)\Delta_4(0) - \Delta_6(0)\Delta_4'(0)}{\Delta_4(0)\Delta_6(0)} \quad (2.11)$$

$$K_{TS} = \frac{\Delta_5(\varepsilon_0)}{\text{Pr} \Delta_4(\varepsilon_0)} = K_{TS}^{(0)}(1 + \beta_R' \text{Kn})$$

$$\beta_R' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Delta_5'(0)\Delta_4(0) - \Delta_5(0)\Delta_4'(0)}{\Delta_4(0)\Delta_5(0)} \quad (2.12)$$

$$\beta_R = \frac{2}{\sqrt{\pi q \Delta_5(0)}} (B_1^* \{[\mu_1^+ + (1-q)\mu_1^+]\Delta_6(0) -$$

$$-[\mu_2^+ - (1-q)\mu_2^-]\Delta_5(0) - [\mu_0^+ - (1-q)\mu_0^-]\Delta_4(0)\} +$$

$$+ B_2^* \{[v_1^+ + (1-q)v_1^-]\Delta_6(0) - [v_2^+ - (1-q)v_2^-]\Delta_5(0) - [v_0^+ - (1-q)v_0^-]\Delta_4(0)\}) \quad (2.13)$$

$$\Delta_4(\varepsilon_0) = [\alpha_1^+(\varepsilon_0) + (1-q)\alpha_1^-(\varepsilon_0)][\beta_2^+(\varepsilon_0) - (1-q)\beta_2^-(\varepsilon_0)] -$$

$$-[\alpha_2^+(\varepsilon_0) - (1-q)\alpha_2^-(\varepsilon_0)][\beta_1^+(\varepsilon_0) + (1-q)\beta_1^-(\varepsilon_0)]$$

$$\Delta_5(\varepsilon_0) = [\alpha_0^+(\varepsilon_0) - (1-q)\alpha_0^-(\varepsilon_0)][\beta_1^+(\varepsilon_0) + (1-q)\beta_1^-(\varepsilon_0)] -$$

$$-[\alpha_1^+(\varepsilon_0) + (1-q)\alpha_1^-(\varepsilon_0)][\beta_0^+(\varepsilon_0) - (1-q)\beta_0^-(\varepsilon_0)]$$

$$\Delta_6(\varepsilon_0) = [\alpha_0^+(\varepsilon_0) - (1-q)\alpha_0^-(\varepsilon_0)][\beta_2^+(\varepsilon_0) - (1-q)\beta_2^-(\varepsilon_0)] -$$

$$-[\alpha_2^+(\varepsilon_0) - (1-q)\alpha_2^-(\varepsilon_0)][\beta_0^+(\varepsilon_0) - (1-q)\beta_0^-(\varepsilon_0)]$$

$$\Delta_k'(0) = \left. \frac{d\Delta_k(\varepsilon_0)}{d\varepsilon_0} \right|_{\varepsilon_0=0}$$

$$B_1^* = -\frac{B_1(\theta)}{a_1 g_r} = \frac{(2-q)\Lambda - \Theta[\delta_3^+ + (1-q)\delta_3^-]}{\Omega[\delta_3^+ + (1-q)\delta_3^-] - \Lambda[\gamma_3^+ + (1-q)\gamma_3^-]}$$

$$B_2^* = -\frac{B_2(\theta)}{a_1 g_r} = \frac{\Theta[\gamma_3^+ + (1-q)\gamma_3^-] - (2-q)\Omega}{\Omega[\delta_3^+ + (1-q)\delta_3^-] - \Lambda[\gamma_3^+ + (1-q)\gamma_3^-]}$$

$$\Omega = \Omega_1 - \Omega_2 + \sqrt{\pi}\gamma_3^+ / 8, \quad \Lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2 + \sqrt{\pi}\delta_3^+ / 8$$

$$\Theta = \frac{5\sqrt{\pi}(1-q\alpha_r)}{4q\alpha_r} - \frac{\sqrt{\pi}(1-q\alpha_r)}{q\alpha_r} + \frac{\sqrt{\pi}}{8}$$

$$\Omega_1 = \gamma_1^+ + \frac{(1-q\alpha_r)}{q\alpha_r} [\gamma_1^+ - \gamma_1^- + \frac{5\sqrt{\pi}}{8}(\gamma_3^+ + \gamma_3^-)]$$

$$\Omega_2 = \gamma_2^+ + \frac{(1-q\alpha_r)}{q\alpha_r} [\gamma_2^+ - \gamma_2^- + \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\gamma_3^+ + \gamma_3^-)]$$

$$\Lambda_1 = \delta_1^+ + \frac{(1-q\alpha_r)}{q\alpha_r} [\delta_1^+ - \delta_1^- + \frac{5\sqrt{\pi}}{8}(\delta_3^+ + \delta_3^-)]$$

$$\Lambda_2 = \delta_2^+ + \frac{(1-q\alpha_r)}{q\alpha_r} [\delta_2^+ - \delta_2^- + \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\delta_3^+ + \delta_3^-)]$$

Зависимость $K_{TS}^{(0)}$ и $C_m^{(0)}$ от q проанализирована в [7].

3. Граничные условия для нормальных составляющих макропараметров. В ряде задач газодинамики, в частности в задаче о термофорезе, необходимо задать граничные условия для таких макропараметров, как нормальные компоненты скорости и потока тепла. Рассмотрение поведения этих макропараметров в слое Кнудсена проводится аналогично, поэтому обозначим один из этих макропараметров через вектор \mathbf{W} .

Так как функция распределения, описывающая поведение газа около частицы, имеет вид (1.2), то макропараметр \mathbf{W} (момент от функции распределения) можно представить в виде

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^h + \mathbf{W}^k \quad (3.1)$$

$$\mathbf{W}^h = \int \phi(\mathbf{v}) f_{\text{Ch}} d^3v \omega d\omega, \quad \mathbf{W}^k = \int \phi(\mathbf{v}) f_0 \Phi d^3v \omega d\omega$$

где \mathbf{W}^h – гидродинамическая часть макропараметра, \mathbf{W}^k – макропараметр газа в слое Кнудсена. В частности, если $\phi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, то \mathbf{W} представляет среднюю скорость газа, если $\phi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}mv^2/2$, то \mathbf{W} – плотность потока энергии газа.

Если на границе раздела газ – твердая фаза нет источников массы и тепла, то нормальная составляющая макропараметра на поверхности частицы (при $r = R$) равна нулю

$$W_r(R) = W_r^h(R) + W_r^k(R) = 0 \quad (3.2)$$

Макропараметр \mathbf{W}^k должен удовлетворять уравнению неразрывности, которое в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 W_r^k) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta W_\theta^k) = 0 \quad (3.3)$$

Здесь учтено, что \mathbf{W}^k не зависит от φ .

Интегрируя уравнение (3.3) поперек слоя Кнудсена и учитывая, что при $r \rightarrow \infty$ $\mathbf{W}^k \rightarrow 0$, с точностью до линейных по Кн членов получим

$$W_r^h(R) = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \left[\int_R^\infty W_\theta^k dr \right] \right) \quad (3.4)$$

В случае $\phi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ с учетом (1.9), (2.5) из выражения (3.4) получим граничное условие для нормальной компоненты гидродинамической скорости молекулярного газа в виде

$$u_r(R) = C_v \text{Kn} \frac{\mu}{T_0 R \rho_0} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)$$

$$C_v = \frac{q}{\sqrt{\pi} \text{Pr} \Delta_4} \left\{ \frac{1}{\sigma_1} [\beta_1^+ + (1-q)\beta_1^-] \left[\alpha_0^+ + \alpha_0^- + \frac{\alpha_1^+ - \alpha_1^-}{\sqrt{\pi}} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sigma_2} [\alpha_1^+ + (1-q)\alpha_1^-] \left[\beta_0^+ + \beta_0^- + \frac{\beta_1^+ - \beta_1^-}{\sqrt{\pi}} \right] \right\} \quad (3.5)$$

В случае $\phi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}mv^2/2$ с учетом (1.9), (2.5) из выражения (3.4) получим граничное условие для нормальных потоков тепла молекулярного газа в виде

$$\chi \frac{\partial T}{\partial r} - \chi_i \frac{\partial T_i}{\partial r} = C_q \text{Kn} \frac{\chi}{R} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)$$

$$C_q = \text{Pr} C_v - \frac{q}{\sqrt{\pi} \Delta_4} \left(\frac{1}{\sigma_1} [\beta_1^+ + (1-q)\beta_1^-] [\alpha_0^+ + \alpha_0^- + \right.$$

$$\left. + \frac{8(\alpha_1^+ - \alpha_1^-)}{7\sqrt{\pi}} + \alpha_2^+ + \alpha_2^-] - \frac{1}{\sigma_2} [\alpha_1^+ + (1-q)\alpha_1^-] \times \right.$$

$$\times[\beta_0^+ + \beta_0^- + \frac{8(\beta_1^+ - \beta_1^-)}{7\sqrt{\pi}} + \beta_2^+ + \beta_2^-]) \quad (3.6)$$

Здесь χ_i и T_i – теплопроводность и температура частицы.

Как и в случае простого газа [11], на межфазной границе раздела возникает разрыв нормальных гидродинамических потоков массы и тепла, который связан с "растеканием" части соответствующих потоков по слою Кнудсена.

4. Анализ и обсуждение результатов. Как видно из выражений (2.11) – (2.13), (3.5), (3.6), коэффициенты C'_m, β'_R, C_q, C_v являются функциями коэффициента аккомодации тангенциального импульса q , а последний коэффициент еще зависит от Pr . При малых отклонениях от термодинамического равновесия $q \approx 1$ [19]. Поэтому, раскладывая в ряд эти функции по малому параметру $(1 - q)$ и ограничиваясь линейным членом, получим приближенные выражения в виде

$$C'_m = -0,940[1 - 0,481(1 - q)], \quad \beta'_R = -0,528[1 - 0,0046(1 - q)]$$

$$C_v = 0,771[1 - 0,846(1 - q)], \quad C_q = 0,464[1 - 0,894(1 - q)]$$

При $q = 1$ имеем $C'_m = -0,940$, $\beta'_R = -0,528$, $C_v = 0,771$, $C_q = 0,464$, в то же время аналогичные коэффициенты, вычисленные для простого газа [12], соответственно равны $-0,916$, $-0,714$, $0,989$, $0,558$ (следует иметь в виду, что здесь проведен пересчет коэффициентов [12], так как в настоящей работе используется определение средней длины свободного пробега [21]).

Коэффициент β_R является функцией q, α_i, α_r . Воспользовавшись определением коэффициента аккомодации энергии

$$\alpha_e = \frac{E^- - E^+}{E^- - E_s^+}$$

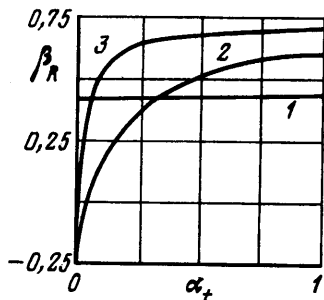
и используя выражение (2.9), находим уравнение связи α_e с α_i и α_r в виде

$$\alpha_e = \frac{\alpha_i + \zeta \alpha_r}{1 + \zeta}, \quad \zeta = \frac{E_r^- - E_{sr}^+}{E_i^- - E_{si}^+}$$

Если $\alpha_i = \alpha_r$, то последние совпадают с коэффициентом аккомодации энергии α_e .

В условиях настоящей задачи $\zeta \approx 1/2$. Согласно [22], $\alpha_i > \alpha_r$. Поэтому на фигуре представлены графики зависимости β_R от $\alpha_i = \alpha_r = \alpha_e$ (при $q = 1$) и от α_i (при $q = 1$) при заданном значении α_r . При полной аккомодации ($q = \alpha_i = \alpha_r = 1$) $\beta_R = 0,438$. Для простого газа [14] $\beta_R = 0,627$. Отметим, что при некоторых значениях α_r зависимость β_R от α_i имеет знакопеременный характер.

Для других газов (в случае полной аккомодации), например для хлора Cl_2 ($Pr = 0,64$), $C'_m = -0,940$, $\beta'_R = -0,527$, $C_v = 0,890$, $C_q = 0,495$, $\beta_R = 0,437$, для окиси углерода CO ($Pr = 0,74$) $C'_m = -0,941$, $\beta'_R = -0,529$, $C_v = 0,706$, $C_q = 0,445$, $\beta_R = 0,438$.



Зависимости коэффициентов β_R молекулярного газа ($Pr = 0,7$) при $q = 1$ от коэффициента аккомодации энергии α_e ($\alpha_i = \alpha_r = \alpha_e$) (1) и от коэффициента аккомодации трансляционной составляющей энергии α_i при $\alpha_r = 0,3$ (2) и $0,05$ (3)

Заключение. На базе кинетического модельного уравнения, в котором учтены вращательные степени свободы молекул двухатомного газа, решена задача о движении газа вдоль сферической поверхности малой кривизны. Получены коэффициенты скольжения и скачка макропараметров газа второго порядка в зависимости от q , α_r , α_r . Вклад вращательных степеней свободы в указанные коэффициенты оказывается существенным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Welander P.* On the temperature jump in a rarefied gas // *Ark. fys.* 1954. В. 7. № 6. P. 507–553.
2. *Gross E.P., Jackson E.A., Ziering S.* Boundary value problems in kinetic theory of gases // *Ann. Phys.* 1957. V. 1. № 2. P. 141–167.
3. *Ивченко И.Н., Яламов Ю.И.* Кинетическая теория течения газа, находящегося над твердой стенкой в поле градиента скорости // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1968. № 6. С. 139–143.
4. *Савков С.А., Юшканов А.А.* О зависимости коэффициентов скольжения от характера взаимодействия молекул газа с твердой поверхностью // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1986. № 5. С. 149–152.
5. *Sone Y.* Asymptotic theory of flow of rarefied gas over a smooth boundary. I // *Rarefied Gas Dynamics: Proc. 6th Intern. Symp.* N.Y.; L.: Acad. Press, 1969. V. 1. P. 243–251.
6. *Ohwada T., Sone Y., Aoki K.* Numerical analysis of the shear and thermal creep flows of a rarefied gas over a plane wall on the basis of the linearised Boltzmann equation for a hard-sphere molecules // *Phys. Fluids. A.* 1989. V. 1. № 9. P. 1588–1599.
7. *Поддоскин А.Б., Юшканов А.А.* Скольжение двухатомного газа вдоль плоской поверхности // *Изв. РАН. МЖГ.* 1998. № 5. С. 182–189.
8. *Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* О скачке температуры двухатомного газа // *Изв. РАН. МЖГ.* 1999. № 4. С. 163–170.
9. *Баканов С.П., Дерягин Б.В., Ролдугин В.И.* Термофорез в газах // *Успехи физ. наук.* 1979. Т. 129. Вып. 2. С. 255–278.
10. *Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* К вопросу о термофорезе умеренно крупных аэрозольных частиц // *Журн. техн. физики.* 1980. Т. 50. № 1. С. 158–161.
11. *Яламов Ю.И., Поддоскин А.Б., Юшканов А.А.* О граничных условиях при обтекании неоднородно нагретым газом сферической поверхности малой кривизны // *Докл. АН СССР.* 1980. Т. 254. № 2. С. 343–346.
12. *Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* Теория термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц // *Журн. техн. физики.* 1982. Т. 52. № 11. С. 2253–2261.
13. *Sone Y., Aoki K.* Forces on a spherical particle in a slightly rarefied gas // *Rarefied Gas Dynamics: Proc. 6th Intern. Symp.* N.Y.: Acad. Press, 1977. P. 417–433.
14. *Маясов Е.Г., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* О термофорезе нелетучей сферической частицы в разреженном газе при малых числах Кнудсена // *Письма в ЖТФ.* 1988. Т. 14. № 6. С. 498–502.
15. *Физические величины. Справочник / Под ред. И.С. Григорьевой.* М.: Энергоатомиздат, 1991. 1231 с.
16. *Жданов В.М., Алиевский М.Я.* Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989. 335 с.
17. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 279 с.
18. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
19. *Баранцев Р.Г.* Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975. 343 с.
20. *Ларина И.Н., Рыков В.А.* О граничных условиях для газов на поверхности тела // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1986. № 5. С. 141–148.
21. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
22. *Marsden D.J.* Measurement of energy transfer in gas–solid surface interactions using electron beam excited emission of light // *Rarefied Gas Dynamics: N.Y.; Acad. Press,* 1966. V. 2. P. 566–583.