

УДК 532.522.2.013.4:532.594

© 1999 г. Н.А. РАЗУМОВСКИЙ, Ю.Г. ЧЕСНOKОВ

КАПИЛЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ РАСТЯГИВАЮЩЕЙСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СТРУИ ЖИДКОСТИ

Рассмотрено развитие капиллярных волн в струе несжимаемой жидкости, подверженной одноосному растяжению. Показано, что эволюция капиллярных волн зависит от начального значения волнового числа. Амплитуда длинноволновых возмущений монотонно увеличивается с течением времени, а коротковолновые возмущения в начальный промежуток времени представляют собой осцилляции со слабо изменяющейся амплитудой и возрастающим периодом колебаний.

Изучается механизм вторичного распада свободно летящих капель вытянутой формы с линейным распределением начальной скорости по длине капли, приводящим к ее растяжению. Это явление существенно для многих каплеструйных печатающих устройств типа "капля по требованию". В этих устройствах капля жидкости выбрасывается из резервуара через тонкое сопло. Головная часть капли приобретает относительно большую скорость, в то время как скорость хвостовой части капли в момент ее образования может быть существенно меньше. В ряде случаев капиллярные силы оказываются недостаточными чтобы удержать каплю от значительного удлинения во время полета. Если при образовании капли ее поверхность имела коротковолновые возмущения, их эволюция под действием сил поверхностного натяжения может привести к дроблению капли на более мелкие.

Расчет эволюции формы капель представляет собой сложную задачу, так или иначе связанную с применением численных методов. В ряде работ [1–3] предложены приближенные модели описания формы капель. Для того чтобы изучить основные закономерности рассматриваемого явления, ограничимся описанием капиллярных волн в цилиндрической части капли. Если два сечения, ограничивающие цилиндрическую часть капли, перемещаются с постоянными но различными скоростями, то длина цилиндрической части увеличивается по линейному закону. При этом в силу сохранения объема капли радиус ее цилиндрической части уменьшается. Присутствовавшие с момента образования капли малые возмущения под действием сил поверхностного натяжения развиваются, что приводит к распаду капли на более мелкие.

Имеется ряд обзоров, посвященных изучению капиллярных волн на поверхности струй жидкости (например, [4]). Теоретические работы по капиллярной неустойчивости струй жидкости можно подразделить на две группы. В первой рассматривается развитие во времени возмущений на бесконечно длинном цилиндре в рамках теории возмущений либо путем прямого численного интегрирования нелинейных уравнений гидродинамики [5–11], либо путем прямых спектральных методов [12, 13]. Во второй группе рассматривается пространственное развитие возмущений в полубесконечной струе жидкости при заданных условиях на выходе жидкости из сопла [14–17].

Данная статья относится к числу работ первого типа. В ней устойчивость изучается в системе координат, перемещающейся вместе с цилиндрической частью капли, которая при этом предполагается бесконечно длинной. Предполагается, что существенны силы инерции и поверхностного натяжения, а вязкость жидкости и взаимодействие

струи с окружающей средой (газом) не учитываются. Начальный этап развития возмущений рассматривается в рамках линейной теории. Нелинейное развитие возмущений описывается в рамках теории возмущений. Линейная задача об устойчивости под действием капиллярных сил струи вязкой жидкости, подверженной одноосному растяжению с постоянной скоростью и находящейся в другой вязкой жидкости, рассматривалась в [18], при этом силами инерции полностью пренебрегалось. Более общий случай внешнего по отношению к струе течения изучался в [19].

1. Формулировка задачи. Рассматриваем задачу о капиллярных волнах на цилиндрической струе жидкости, радиус которой изменяется с течением времени. Будем считать, что вязкость не влияет на развитие капиллярных волн, а среда, в которой находится струя жидкости, представляет собой газ и динамическим взаимодействием жидкой струи с окружающей средой можно пренебречь. Запишем уравнение неразрывности и уравнение Эйлера в безразмерной форме. Обозначим через $h^{(0)}$ начальное значение радиуса струи, а через $h_t^{(0)}$ – производную по времени от радиуса струи в начальный момент времени. В качестве характерных масштабов длины, скорости, времени и давления будем использовать величины $h^{(0)}$, $v^{(0)} = -2h_t^{(0)}$, $h^{(0)}/v^{(0)}$ и $h^{(0)}/\sigma$ соответственно, где σ – коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела между жидкостью и окружающей средой. Ниже будут рассматриваться только осесимметричные возмущения, так как они могут оказаться неустойчивыми [4]. В этом случае удобно использовать цилиндрическую систему координат (r, ϑ, z) , ось z которой совпадает с осью симметрии. Уравнения, описывающие течение жидкости в струе, в безразмерной форме будут иметь следующий вид:

$$v_r + \frac{1}{r}v + u_z = 0, \quad \text{We}(u_t + vv_r + uu_z) = -p_z$$

$$\text{We}(v_t + vv_r + uv_z) = -p_r$$

$$\text{We} = \rho h^{(0)}(v^{(0)})^2/\sigma$$

Здесь v и u – радиальная и осевая составляющие скорости, p – давление жидкости, t – время, нижние индексы у переменных обозначают дифференцирование по соответствующей переменной, We – число Вебера, ρ – плотность жидкости. Свободная поверхность струи задается уравнением $r = h(z, t)$. На этой поверхности выставляются кинематическое и динамическое граничные условия

$$h_t + uh_z = v, \quad p - p_a = \frac{1}{h(1+h_z^2)^{1/2}} - \frac{h_{zz}}{(1+h_z^2)^{3/2}}$$

Здесь p_a – давление окружающей среды, которое предполагается постоянным.

Сформулированная задача имеет решение, в котором струя сохраняет цилиндрическую форму ($h_z = 0$)

$$u = u_0 = \frac{z}{\tau}, \quad v = v_0 = -\frac{r}{2\tau}, \quad h = h_0 = \tau^{-1/2}, \quad \tau = 1 + t$$

$$p = p_0 = p_a + \frac{3\text{We}}{8\tau^3}(1 - \tau r^2) \quad (1.1)$$

Рассматриваемое решение описывает одноосное растяжение струи, происходящее под действием сил инерции.

В начальный момент времени будем учитывать синусоидальное возмущение границы струи в виде

$$t = 0: \quad h = \varepsilon \cos(k_0 z) + (1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2)^{1/2}, \quad h_t = -zh_z - \frac{1}{2}h, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (1.2)$$

Здесь k_0 – начальное значение волнового числа, ε – малая амплитуда возмущения. Появление слагаемого $-\varepsilon^2/2$ в правой части (1.2) вытекает из условия сохранения объема жидкой струи. Значение радиальной компоненты скорости в начальный момент времени не подвержено возмущению и частная производная h_r определяется из условия непротекания. Имеет смысл рассматривать k_0 , малые по сравнению с отношением длины капли к минимальному диаметру шейки. Это ограничение не препятствует применимости настоящего рассмотрения к течению в цилиндрической части шейки растягивающейся капли. Такое приближение применимо, когда длина капли превышает минимальный диаметр шейки капли по крайней мере в несколько раз. Это не ограничивает общности, поскольку в интересующих нас случаях предел растяжения капли кладет ее капиллярный распад в результате развития возмущений вида (1.2).

2. Уравнения для малых возмущений основного течения. В соответствии с теоремой Лагранжа имеем потенциал скорости φ , который удовлетворяет уравнению Лапласа. Давление в жидкости будем находить из интеграла Лагранжа–Коши. Ищем решение в виде разложения по степеням амплитуды ε

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \dots, \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots, \quad h = h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots \quad (2.1)$$

Здесь φ_0 – потенциал скорости течения, описываемого при помощи формул (1.2). Ряды (2.1) являются формальными асимптотическими разложениями искомых функций по степеням малого параметра ε , характеризующего малость начального возмущения течения (1.1). Это значит, что конечные отрезки рядов (2.1) являются в некотором смысле наилучшими аппроксимациями искомых функций при $\varepsilon \rightarrow 0$. Настоящая работа не затрагивает достаточно сложные вопросы обоснования, ограничивая свою задачу процедурой нахождения коэффициентов разложения (2.1). Подставляя разложения (2.1) в уравнения, описывающие течение жидкости, начальные и граничные условия, и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε получим уравнения для их определения. В линейном по ε приближении имеем

$$\Delta\varphi_1 \equiv \varphi_{1rr} + \frac{1}{r}\varphi_{1r} + \varphi_{1zz} = 0 \quad (2.2)$$

$$p_1 = \text{We} \left(\varphi_{1r} - \frac{r}{2\tau}\varphi_{1r} + \frac{z}{\tau}\varphi_{1z} \right) \equiv \text{We}P(\varphi_1)$$

$$r = \tau^{-1/2}: \quad L(h_1) \equiv h_{1r} + \frac{z}{\tau}h_{1z} + \frac{1}{2\tau}h_1 = -\varphi_{1r}$$

$$p_1 - \frac{3}{4}\text{We}\tau^{-5/2}h_1 = -\tau h_1 - h_{1zz} \quad (2.3)$$

Кроме того, в начальный момент времени должны быть заданы величины h_1 и h_{1r} . Если в начальный момент времени имеется возмущение формы струи, то

$$t = 0: \quad h_1 = \cos(k_0 z); \quad L(h_1) = 0 \quad (2.4)$$

Аналогичным образом во втором приближении:

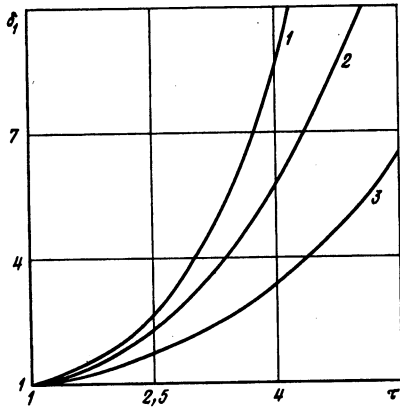
$$\Delta\varphi_2 = 0$$

$$p_2 = \text{We}P(\varphi_2) + \frac{\text{We}}{2}(\varphi_{1r}^2 + \varphi_{1z}^2)$$

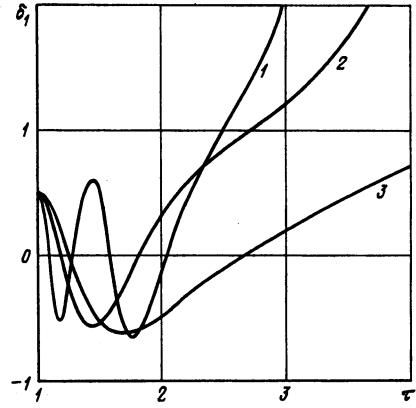
$$r = \tau^{-1/2}: \quad L(h_2) = \varphi_{1z}h_{1z} - \varphi_{1r}h_1 - \varphi_{2r}$$

$$p_2 + p_{1r} - \frac{3\text{We}}{4\tau^{5/2}}(h_2 + \tau^{1/2}h_1^2) = \tau^{1/2}\left(\tau h_1^2 - \tau^{1/2}h_2 - \frac{1}{2}h_{1z}^2\right) - h_{2zz}$$

$$t = 0: \quad h_2 = -1/4, \quad L(h_2) = 0$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Зависимость амплитуды возмущения радиуса струи δ_1 от безразмерного времени τ для длинноволновых возмущений. Число Вебера $We = 0,08$. Начальные значения волнового числа $k_0 = 0,6; 0,8; 1$ (кривые 1–3)

Фиг. 2. Зависимость амплитуды возмущения радиуса струи δ_1 от времени τ при $k_0 = 4$. $We = 0,12; 0,52; 0,92$ (кривые 1–3)

В результате растяжения струи имеющиеся в начальный момент времени возмущения также будут деформироваться. Будем искать величины φ_1 , p_1 и h_1 в виде

$$\varphi_1 = f_1(r, t) \cos(kz), \quad p_1 = s_1(r, t) \cos(kz)$$

$$h_1 = \tau^{-1/2} \delta_1(t) \cos(kz), \quad k = k_0 / \tau \quad (2.5)$$

Множитель $\tau^{-1/2}$ в правой части последнего из равенств (2.5) введен для удобства. Подставляя φ_1 из соотношений (2.5) в (2.2), получаем уравнение для нахождения $f_1(r, t)$, решение которого, ограниченное при $r = 0$, будет $f_1 = c_1(t) I_1(kr)$, где $I_1(kr)$ – модифицированная функция Бесселя первого порядка. Из граничных условий (2.3) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для амплитуды возмущения радиуса струи

$$\delta_{1tt} + \left[\frac{3}{2} x(\Phi(x) - F(x)) - 1 \right] \frac{\delta_{1t}}{\tau} = \tau^{3/2} x F(x) \left[\frac{(1-x^2)}{We} - \frac{3}{4\tau^{1/2}} \right] \delta_1 \quad (2.6)$$

$$x = k_0 \tau^{-3/2}, \quad \Phi(x) = I_0(x) / I_1(x), \quad F(x) = I_1(x) / I_0(x)$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

В отличие от классической задачи Рэлея коэффициенты в полученном дифференциальном уравнении зависят от времени. Поэтому зависимость амплитуды возмущения радиуса струи от времени не имеет простого экспоненциального характера и должна определяться путем численного интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения (2.6). В начальный момент времени должны быть заданы возмущение радиуса струи δ_1 и производная от него по времени δ_{1t} . В силу линейности задачи достаточно изучить два линейно независимых решения. Например, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 0$ ($t = 0$) или $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 1$ ($t = 0$). Первые из них соответствуют (2.4). Численное решение уравнения (4.2) с различными начальными условиями показывает, что характер решения в зависимости от вида начальных условий не изменяется. Вид решения существенно зависит от волнового числа. На фиг. 1 построены графики зави-

симости амплитуды возмущения радиуса струи δ_1 от безразмерного времени τ для длинноволновых возмущений ($We = 0,08$). При относительно малых значениях k_0 увеличение амплитуды возмущения начинается сразу, но скорость роста сравнительно невелика. Градиент давления вдоль оси струи, который возникает при деформации струи под действием капиллярных сил, в результате растяжения струи оказывается сравнительно небольшим, что и обуславливает относительно малую скорость роста возмущений.

Иной характер имеет решение в том случае, когда в начальный момент времени возмущение является коротковолновым (k_0 велико по сравнению с единицей). На фиг. 2 построены графики зависимости δ_1 от τ при $k_0 = 4$ и различных значениях числа Вебера. В начальный период времени решение имеет колебательный характер. С течением времени длина волны возмущения увеличивается пропорционально τ , а радиус струи уменьшается пропорционально $\tau^{-1/2}$. Поэтому через определенный промежуток времени течение становится неустойчивым и амплитуда возмущения поверхности струи начинает быстро нарастать.

В том случае, когда начальное значение длины волны возмущения очень мало, т.е. волновое число велико ($k_0 \rightarrow \infty$), можно получить явные асимптотические формулы, описывающие начальный период развития возмущений. Такая коротковолновая асимптотика строится при условии, что значение t фиксировано, а волновое число k_0 велико. При помощи стандартных методов нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае имеет место формула

$$\delta_1 = \tau^{1/2} \{ A(\cos \omega + \Theta k_0^{-1/2} \sin \omega) + B(\sin \omega - \Theta k_0^{-1/2} \cos \omega) + O(k_0^{-1}) \} \quad (2.7)$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{We}} \left(\frac{2k_0^{3/2}}{\sqrt{\tau}} + \frac{\tau\sqrt{k_0}}{4} \right), \quad \Theta = \frac{3\sqrt{We}}{8\tau} + \frac{19\tau^{5/2}}{80\sqrt{We}}$$

где A и B – постоянные интегрирования. Соотношение (2.7) применимо только для значений t , при которых длина волны мала по сравнению с радиусом струи, т.е. при условии $k_0\tau^{-3/2} \gg 1$. Формула (2.7) показывает, что в начальный период времени поверхность струи совершает колебания, амплитуда которых слабо изменяется, а период колебаний с течением времени увеличивается.

Влияние числа Вебера на решение иллюстрирует фиг. 2. Чем меньше We , тем большую роль играют капиллярные силы и тем быстрее происходит увеличение амплитуды возмущения радиуса струи. Число колебаний, которое успевает совершить поверхность струи до момента начала монотонного изменения амплитуды, при увеличении We уменьшается. Число Вебера можно рассматривать как квадрат отношения $We = (t^{(1)}/t^{(0)})^2$, где $t^{(1)} = (\rho(h^{(0)})^3 / \sigma)^{1/2}$ – характерное время развития возмущений под действием капиллярных сил, а $t^{(0)}$ – характерное время удлинения струи. При условии $We \ll 1$ удлинение струи может рассматриваться как относительно медленный процесс по сравнению с развитием возмущений под действием капиллярных сил. В этом случае начальный этап развития возмущений должен определяться теми же закономерностями, что и в случае струи постоянного радиуса. Действительно, нетрудно убедиться, что при $We \rightarrow 0$ и $t = O(We^{1/2})$ из уравнения (4.2) получается известное дисперсионное соотношение Рэлея.

Каково бы ни было начальное значение длины волны возмущения, по истечении определенного промежутка времени радиус струи окажется малым по сравнению с длиной волны. Такого рода возмущения становятся неустойчивыми. При фиксированном значении k_0 и больших значениях t аргумент x модифицированных функций Бесселя, входящих в уравнение (2.7), становится малым и это уравнение можно упростить. Асимптотику при больших значениях t полученного таким образом урав-

нения можно найти при помощи стандартных методов

$$\delta_1 \sim \frac{k_0^{5/2}}{\tau^{5/8}} \exp\left[\left(\frac{8}{We}\right)^{1/2} k_0 \tau^{1/4}\right] \left[1 - \frac{15}{8(8/We)^{1/2} k_0 \tau^{1/4}} + O(\tau^{-1/2})\right], \quad \tau \gg 1$$

Полученная формула показывает, что при больших значениях времени t скорость роста возмущений оказывается тем больше, чем больше начальное значение волнового числа k_0 . Таким образом, чем больше k_0 , тем больше оказывается промежуток времени, по истечении которого длина волны возмущения оказывается сравнимой с радиусом струи, и тем позднее начинается рост амплитуды возмущения. С другой стороны, чем больше k_0 , тем быстрее будет развиваться неустойчивость при больших t .

3. Второе приближение. Во втором приближении граничные условия на поверхности струи, а также выражение для давления жидкости p_2 будут содержать слагаемые, не зависящие от z . Поэтому величины Φ_2 , p_2 и h_2 следует искать в виде

$$\Phi_2 = f_2(r, t) \cos(2kz) + f_0(t), \quad p_2 = s_2(r, t) \cos(2kz) + s_0(t),$$

$$h_2 = \tau^{-1/2} (\delta_2(t) \cos(2kz) + \delta_0(t)).$$

Решение уравнения для потенциала скорости жидкости строится так же, как и в первом приближении, а затем при помощи граничных условий нетрудно получить уравнение для величин δ_0 и δ_2 . Уравнение для δ_0 таково

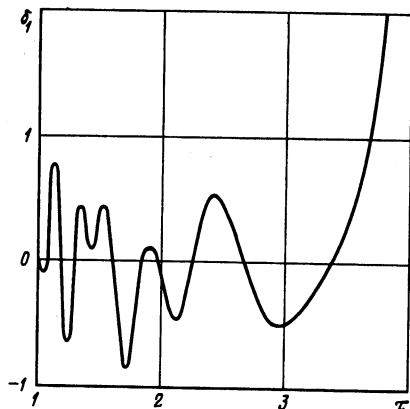
$$\delta_{0t} = -\frac{1}{2} \delta_1 \delta_{1t} \quad (3.1)$$

Если в начальный момент времени имеется возмущение формы струи и начальные условия, которым должно удовлетворять решение во втором приближении, представляют собой условия (2.7), решение уравнения (3.1) можно записать так: $\delta_0 = -\frac{1}{4} \delta_1^2$. Уравнение и начальное условие для амплитуды второй гармоники δ_2 представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} \delta_{2tt} + \frac{1}{\tau} [3x(\Phi(2x) - F(2x)) - 1] \delta_{2t} + xF(2x) \tau^{3/2} \left[\frac{3}{8} \tau^{-7/2} - \frac{2(1-4x^2)}{We} \right] \delta_2 + \\ + \left[\frac{x}{2} F(2x)(1 - \Phi^2(x)) - \left(x\Phi(x) - \frac{1}{2} \right) \right] \delta_{1t}^2 + \\ + \frac{3x}{2\tau} \left[(2x\Phi(x) - 1)(F(2x) - \Phi(2x)) - xF(2x)(F(x) - \Phi(x)) + \frac{1}{2} (F(x) + 3\Phi(x)) \right] \delta_1 \delta_{1t} + \\ + x\tau^{3/2} \left[\left(x - \frac{1}{2} F(x) - xF(x)F(2x) \right) \left(\frac{3}{4} \tau^{-7/2} - \frac{(1-x^2)}{We} \right) + \right. \\ \left. + F(2x) \left(\frac{3}{8} \tau^{-7/2} + \frac{2+x^2}{2We} \right) \right] \delta_1^2 = 0 \quad (3.2) \end{aligned}$$

$$\delta_2 = 0, \quad \delta_{2t} = 0 \quad (t = 0)$$

Уравнение (3.2) необходимо рассматривать совместно с уравнением (2.6). Вид решения зависит от начального значения k_0 и значения We . На фиг. 3 в качестве примера построена зависимость амплитуды второй гармоники δ_2 от времени τ при следующих значениях параметров: $k_0 = 3$, $We = 0,08$. По истечении некоторого промежутка времени даже при относительно больших значениях волнового числа начинается быстрый рост амплитуды. Расчеты показывают, что при определенных значениях параметров



Фиг. 3. Зависимость амплитуды второй гармоники δ_2 от времени τ при $k_0 = 3$, $We = 0,08$

амплитуда второй гармоники по истечении достаточно большого промежутка времени может значительно превосходить амплитуду основной гармоники, т.е. распад струи на капли может произойти не благодаря основной гармонике, а в результате быстрого увеличения амплитуды второй гармоники.

Заключение. Эволюция капиллярных волн на поверхности цилиндрической струи, радиус которой уменьшается с течением времени, независимо от начального значения длины волны возмущения приводит к увеличению его амплитуды. Это означает неизбежность капиллярного распада растягивающейся капли и позволяет связать время распада капли с уровнем начальных флуктуаций свободной поверхности. При больших безразмерных временах τ амплитуда возмущения увеличивается пропорционально $\exp(\Omega\tau^{1/4})$, где величина Ω обратно пропорциональна длине волны возмущения и $We^{1/2}$. Нелинейное взаимодействие возмущений приводит к возбуждению второй гармоники, амплитуда которой по истечении некоторого промежутка времени начинает быстро увеличиваться.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fromm J.F.* Numerical calculation of the fluid dynamics of drop-on-demand jets // *IBM J. Res. Develop.* 1984. V. 28. № 3. P. 322–333.
2. *Adams R.L., Roy J.* A one-dimensional numerical model of a drop-on-demand ink jet // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1986. V. 53. № 1. P. 193–197.
3. *Shield T.W., Bogy D.B., Talke F.E.* A numerical comparison of one-dimensional fluid jet models applied to drop-on-demand printing // *J. Comput. Phys.* 1986. V. 67. № 2. P. 327–347.
4. *Bogy D.B.* Drop formation in circular liquid jet // *Annu. Rev. Fluid. Mech.* 1979. V. 11. P. 207–228.
5. *Yuen M.-C.* Non-linear capillary instability of a liquid jet // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 33. Pt 1. P. 151–163.
6. *Wang D.P.* Finite amplitude effect on the stability of a jet of circular cross-section // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 34. Pt 2. P. 299–313.
7. *Nayfeh A.H.* Nonlinear stability of a liquid jet // *Phys. Fluids.* 1970. V. 13. № 4. P. 841–847.
8. *Kakutani T., Inoue Y., Kan T.* Nonlinear capillary waves on the surface of liquid column // *J. Phys. Soc. Japan.* 1974. V. 37. № 2. P. 529–538.
9. *Lafrance P.* Nonlinear breakup of a laminar liquid jet // *Phys. Fluids.* 1975. V. 18. № 4. P. 428–432.
10. *Chaudhary K.C., Redekopp L.G.* The nonlinear capillary instability of a liquid jet. Pt 1 // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 96. Pt 2. P. 257–274.
11. *Ashgriz N., Mashayek F.* Temporal analysis of capillary jet breakup // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 291. P. 163–190.

12. *Маркова М.П., Шкадов В.Я.* О нелинейном развитии капиллярных волн в струе жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 3. С. 30–37.
13. *Епихин В.Е., Шкадов В.Я.* Численное моделирование неоднородного распада капиллярных струй // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 2. С. 12–17.
14. *Keller J.B., Rubinow S.I., Tu Y.O.* Spatial instability of a jet // Phys. Fluids. 1973. V. 16. № 12. P. 2052–2055.
15. *Блаженков В.В., Гиневский А.Ф., Гунбин В.Ф., Дмитриев А.С.* О вынужденном капиллярном распаде струй жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 53–61.
16. *Блаженков В.В., Гиневский А.Ф., Гунбин В.Ф., Дмитриев А.С., Щеглов С.И.* Нелинейная эволюция волн при вынужденном капиллярном распаде струй // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 3. С. 54–60.
17. *Разумовский Н.А.* О форме капель и сателлитов, образующихся при вынужденном капиллярном распаде струй жидкости // Журн. техн. физики. 1993. Т. 63. № 9. С. 26–45.
18. *Tomotika S.* Breaking up of a drop of viscous liquid immersed in another viscous fluid which is extending at a uniform rate // Proc. Roy. Soc. London., Ser. A. 1936. V. 153. № 879. P. 302–318.
19. *Khakhar D.V., Ottino J.M.* Breakup of liquid threads in linear flows // Intern. J. Multiphase Flow. 1987. V. 13. № 1. P. 71–86.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
24.VIII.1998