

УДК 532.516.5

© 1999 г. А.М. ШИХВАТОВ

ОДИН МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РОТОРА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПОДШИПНИКАХ С КАНАВКАМИ

Рассматриваются некоторые свойства спектра системы уравнений, полученной при линеаризации в стационарной точке асимптотического уравнения Рейнольдса и уравнений движения ротора. Излагается схема вычисления спектра и приводятся примеры определения устойчивости ротора в центральном положении.

1. Жесткий симметричный ротор вращается с постоянной угловой скоростью ω в двух одинаковых, соосных, симметричных, цилиндрических газодинамических подшипниках, расположенных симметрично относительно центра O' ротора, при совпадении оси ротора с осями подшипников. Введем обозначения: R – радиус подшипника, L – длина подшипника, L_1 – расстояние между центрами подшипников O_1 и O_2 . Подшипники профилированы спиральными шевронными канавками, расположенными у торцов подшипника. Для канавок известны следующие параметры: Δ_1 – глубина канавок, K – число канавок, β – угол наклона канавок к направлению вращения, κ – отношение ширины канавки к ширине элемента "канавка – выступ", L_g – длина гладкой части подшипника.

Поместим начало O неподвижной декартовой системы координат $x_1x_2x_3$ в середину отрезка O_1O_2 , ось x_3 направим из точки O_1 в точку O_2 . Свяжем с этой системой координат цилиндрическую систему координат r, φ, x_3 и положим $x = x_3/R, a = L_1/2R, l = L/2R, l_g = L_g/2R$. Будем считать, что вектор смещения OO' имеет вид $OO' = (e_1, e_2, 0)$, т.е. ротор вдоль оси x_3 не смещается.

Рассмотрим также декартову систему координат $x'_1x'_2x'_3$, оси которой параллельны соответствующим осям системы координат $x_1x_2x_3$. Обозначим через α_1 и α_2 углы, образованные осью ротора с плоскостями $x'_1x'_3$ и $x'_2x'_3$ (см. фигуру). Положим $\epsilon_k = e_k/\delta_g, \epsilon_{2+k} = R\alpha_k/\delta_g, k = 1, 2$, где δ_g – минимальный зазор между ротором и подшипниками в центральном положении ротора; $\tau = \omega t$, где t – время. Если число канавок велико, то для вычисления давления в смазочном слое подшипников имеет смысл использовать асимптотическое уравнение Рейнольдса [1], соответствующее $K = \infty$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} = 2\Lambda \frac{\partial (HP)}{\partial \tau}$$

$$Q_x = P \left(A \frac{\partial P}{\partial x} + E \frac{\partial P}{\partial \varphi} - \Lambda B \right), \quad Q_\varphi = P \left(A_1 \frac{\partial P}{\partial \varphi} + E \frac{\partial P}{\partial x} - \Lambda B_1 \right)$$

$$A = H_3 \sin^2 \beta + \frac{1}{H_{-3}} \cos^2 \beta, \quad A_1 = \frac{1}{H_{-3}} \sin^2 \beta + H_3 \cos^2 \beta$$

$$B = \left(H - \frac{H_{-2}}{H_{-3}} \right) \sin \beta \cos \beta, \quad B_1 = H \cos^2 \beta + \frac{H_{-2}}{H_{-3}} \sin^2 \beta \quad (1.1)$$

$$E = \left(H_3 - \frac{1}{H_{-3}} \right) \sin \beta \cos \beta, \quad H_m = \kappa(H_g + \Delta_0)^m + (1 - \kappa)H_g^m$$

$$H = \kappa\Delta_0 + H_g, \quad H_g = 1 - \eta e^{i\varphi} - \bar{\eta} e^{-i\varphi}, \quad \eta = \frac{1}{2}(\eta_1 + x\eta_2)$$

$$\eta_1 = \varepsilon_1 - i\varepsilon_2, \quad \eta_2 = \varepsilon_3 - i\varepsilon_4, \quad i = \sqrt{-1}, \quad \Lambda = \frac{6\mu R^2 \omega}{\delta_g^2 p_a}$$

где H – осредненная толщина смазочного слоя подшипников, отнесенная к δ_g ; $\Delta_0 = \Delta_0(x)$ – функция, равная нулю при $|x \pm a| \leq l_g$ и Δ_1/δ_g при остальных x ; черта означает комплексно-сопряженную величину; P – осредненное давление в смазочном слое, отнесенное к атмосферному давлению p_a ; m – целое число, Λ – параметр сжимаемости; μ – динамический коэффициент вязкости газа.

Неизвестные функции $P(\tau, x, \varphi)$, $\Delta\varepsilon_k(\tau)$, $k = 1, \dots, 4$, должны удовлетворять еще уравнениям движения ротора [2]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \eta_1}{d\tau^2} &= K_1 \left(F - \iint_G P e^{-i\varphi} dx d\varphi \right) \\ \frac{d^2 \eta_2}{d\tau^2} + \frac{iI_0}{I} \frac{d\eta_2}{d\tau} &= K_2 \left(iM - \iint_G x P e^{-i\varphi} dx d\varphi \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$F = \frac{F_1 - iF_2}{p_a R^2}, \quad M = \frac{M_1 - iM_2}{p_a R^3}, \quad K_1 = \frac{p_a R^2}{M_r \omega^2 \delta_g}, \quad K_2 = \frac{p_a R^4}{I \omega^2 \delta_g}$$

Здесь F_k, M_k , $k = 1, 2$ – проекции на оси x_1 и x_2 главного вектора и главного момента внешних сил, действующих на ротор; I_0, I – осевой и экваториальный моменты инерции ротора; M_r – масса ротора; $G = (|x \pm a| \leq l, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$. Наконец, функции P, ε_k должны удовлетворять граничным условиям $P(\tau, \pm a \pm l, \varphi) = 1$, $P(\tau, x, \varphi + 2\pi) = P(\tau, x, \varphi)$, $Q_x[\tau, (\pm a \pm l_g) +, \varphi] = Q_x[\tau, (\pm a \pm l_g) -, \varphi]$. Решением системы уравнений (1.1), (1.2), таким образом, является система пяти функций $P, \varepsilon_k, k = 1, \dots, 4$, удовлетворяющих этим уравнениям и граничным условиям. Решение называется стационарным, если все функции, его составляющие, не зависят от τ .

2. Пусть $P, \varepsilon_k, k = 1, \dots, 4$, стационарное решение системы (1.1), (1.2). Линеаризуем эту систему в точке (P, ε_k) , взяв возмущения в виде

$$\delta P = u(x, \varphi) e^{\lambda \tau}, \quad \delta \varepsilon_k = \Delta \varepsilon_k e^{\lambda \tau}$$

где $u(x, \varphi)$ – комплекснозначная функция, $\Delta \varepsilon_k, \lambda$ – комплексные числа. Линеаризуя уравнение (1.1), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} &= 2\lambda \Lambda (Hu + P\Delta H) \\ q_x &= A \frac{\partial(Pu)}{\partial x} + E \frac{\partial(Pu)}{\partial \varphi} - \Lambda B u + C \Delta H \\ q_\varphi &= A_1 \frac{\partial(Pu)}{\partial \varphi} + E \frac{\partial(Pu)}{\partial x} - \Lambda B_1 u + C_1 \Delta H \end{aligned} \quad (2.1)$$

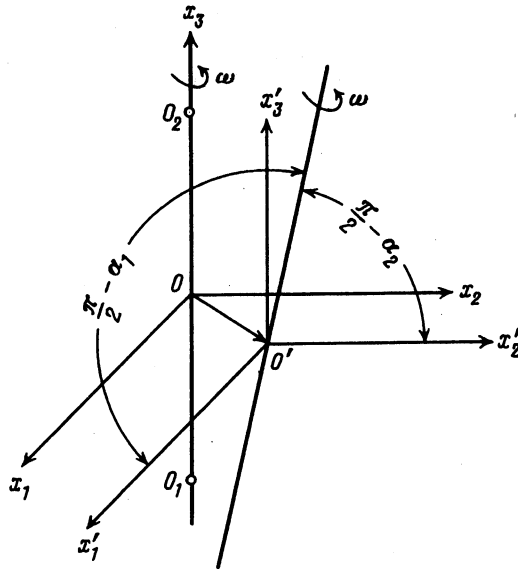


Схема поступательных и угловых перемещений ротора

$$C = P \left(A' \frac{\partial P}{\partial x} + E' \frac{\partial P}{\partial \varphi} - \Lambda B' \right), \quad C_1 = P \left(A'_1 \frac{\partial P}{\partial \varphi} + E' \frac{\partial P}{\partial x} - \Lambda B'_1 \right)$$

$$\Delta H = -\Delta \eta e^{i\varphi} - \overline{\Delta \eta} e^{-i\varphi}, \quad \Delta \eta = \frac{1}{2} (\Delta \eta_1 + x \Delta \eta_2)$$

$$\Delta \eta_1 = \Delta \varepsilon_1 - i \Delta \varepsilon_2, \quad \Delta \eta_2 = \Delta \varepsilon_3 - i \Delta \varepsilon_4$$

где штрихом обозначены производные по переменной H_g .

Линеаризуя уравнения (1.2), будем иметь

$$K_1 \iint_G u e^{-i\varphi} dx d\varphi = -\lambda^2 \Delta \eta_1, \quad K_2 \iint_G x u e^{-i\varphi} dx d\varphi + \frac{i I_0}{I} \lambda \Delta \eta_2 = -\lambda^2 \Delta \eta_2 \quad (2.2)$$

Наконец, линеаризация граничных условий дает

$$u(\pm a \pm l, \varphi) = 0, \quad q_x[(\pm a \pm l_g)^+, \varphi] = q_x[(\pm a \pm l_g)^-, \varphi] \quad (2.3)$$

Решением системы (2.1), (2.2) являются собственные числа λ и соответствующие им собственные формы $(u, \Delta \eta_1, \Delta \eta_2)$, удовлетворяющие уравнениям (2.1), (2.2) и граничным условиям (2.3). Число $\lambda' = -\max \operatorname{Re} \lambda$ назовем запасом устойчивости решения (P, ε_k) .

3. Предположим, что ротор ненагружен, т.е. $F = M = 0$. Тогда стационарное решение имеет вид $(P(x), 0, 0, 0, 0)$, причем функция $P(x)$ – четная. Эта функция имеет простой вид и легко может быть выписана. Функции $\Delta_0(x)$ и $\beta(x)$ кусочно-постоянны, причем первая из них – четная, а вторая – нечетная. Из этого следует, что функции H_m, A, A_1, B, B_1, E и их производные (по переменной H_g) будут постоянны на каждом промежутке, где постоянны одновременно функции $\Delta_0(x)$ и $\beta(x)$. При этом функции $H_m, A, A_1, B_1, A', A'_1, B'_1$ будут четными, а функции B, E, B', E' – нечетными.

Пусть $(u(x, \varphi), \Delta \eta_1, \Delta \eta_2)$ – некоторое решение задачи (2.1), (2.2), удовлетворяющее граничным условиям (2.3). Представим функцию $u(x, \varphi)$ в виде $u = u_1 + u_2$, где u_1 – четная (по переменной x) часть функции u , а u_2 – нечетная. Легко показать, что

системы $(u_1, \Delta\eta_1, 0)$ и $(u_2, 0, \Delta\eta_2)$ также являются решениями уравнений (2.1), (2.2), соответствующими тому же значению параметра λ и удовлетворяющими граничным условиям (2.3). Таким образом, спектр задачи (2.1), (2.2) в случае центрального положения ротора распадается (по переменной x) на две группы: к первой группе относятся собственные числа λ , которым соответствуют собственные формы вида $(u_1, \Delta\eta_1, 0)$, будем называть их цилиндрическими; ко второй группе относятся собственные числа λ , которым соответствуют собственные формы вида $(u_2, 0, \Delta\eta_2)$, будем называть их коническими. Соответствующие запасы устойчивости обозначим λ' и λ'' .

Разложим функцию $u(x, \varphi)$ в ряд Фурье $u(x, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_m(x)e^{im\varphi}$ и подставим в уравнение (2.1). Приравнявая коэффициенты при $e^{im\varphi}$, получим при $m \geq 0$

$$\frac{dS_{1m}}{dx} + imS_{2m} = 2\lambda\Lambda[Hw_m - \delta(m-1)P\Delta\eta] \quad (3.1)$$

$$S_{1m} = A \frac{d(Pw_m)}{dx} + (imEP - \Lambda B)w_m - \delta(m-1)C\Delta\eta$$

$$S_{2m} = E \frac{d(Pw_m)}{dx} + (imA_1P - \Lambda B_1)w_m - \delta(m-1)C_1\Delta\eta$$

Здесь $\delta(m) = 0$, если $m \neq 0$, $\delta(0) = 1$.

Для $m < 0$ получаются уравнения, сопряженные уравнениям (3.1). Подставляя теперь функцию u в уравнения (2.2), будем иметь

$$2\pi K_1 \int_{G_1} w_1 dx = -\lambda^2 \Delta\eta_1, \quad 2\pi K_2 \int_{G_1} x w_1 dx + \frac{iI_0}{I} \lambda \Delta\eta_2 = -\lambda^2 \Delta\eta_2 \quad (3.2)$$

где $G_1 = (lx \pm a \leq l)$. Наконец, подставляя функцию $u(x, \varphi)$ в граничные условия для нее, получим граничные условия для функций $w_m(x)$: $w_m(\pm a \pm l) = 0$, $S_{1m}[(\pm a \pm l)_g +] = S_{1m}[(\pm a \pm l)_g -]$.

Таким образом, спектр задачи (3.1), (3.2) распадается (по переменной φ) на бесконечное число групп. Наибольший интерес представляет спектр задачи (3.1), (3.2) при $m = 1$, поскольку собственным числам остальных групп соответствуют чисто газодинамические возмущения без учета перемещений ротора. Из предыдущих рассуждений следует, что неизвестную функцию $w_1(x)$ достаточно определить при $a - l \leq x \leq a + l$.

Произведем замену переменных; $x = a + y$, тогда система уравнений (3.1), (3.2) при $m = 1$ примет вид

$$\frac{dS_1}{dy} + iS_2 = 2\lambda\Lambda(Hw - P\Delta\eta) \quad (3.3)$$

$$2\pi K_1 \int_{-l}^l w dy = -\lambda^2 \Delta\eta_1 \quad (3.4)$$

$$2\pi K_2 \int_{-l}^l (a+y)w dy + \frac{iI_0}{I} \lambda \Delta\eta_2 = -\lambda^2 \Delta\eta_2 \quad (3.5)$$

$$S_1 = A \frac{d(Pw)}{dy} + (iEP - \Lambda B)w - C\Delta\eta$$

$$S_2 = E \frac{d(Pw)}{dy} + (iA_1P - \Lambda B_1)w - C_1\Delta\eta$$

$$w = 2w_1, \quad \Delta\eta = \Delta\eta_1 + (a+y)\Delta\eta_2, \quad S_1 = S_{11}, \quad S_2 = S_{21}$$

Граничные условия для функции $w(y)$ переписуются так: $w(\pm l) = 0$, $S_1(\pm l_g +) = S_1(\pm l_g -)$. Собственные числа, соответствующие цилиндрическим возмущениям, находятся из системы уравнений (3.3), (3.4) при $\Delta\eta_2 = 0$; а собственные числа, которым соответствуют конические возмущения, – из системы (3.3), (3.5) при $\Delta\eta_1 = 0$.

Выпишем в заключение функцию $P(y)$: $P(y) = 1 + K_p(l + y)$ при $-l \leq y \leq -l_g$, $P(y) = 1 + K_p(l - l_g)$ при $-l_g \leq y \leq l_g$, $P(y) = 1 + K_p(l - y)$ при $l_g \leq y \leq l$, где постоянная $K_p = \Delta B/A$ определяется всегда при $-l \leq y \leq -l_g$. Обозначим $D = \Lambda(A'B - AB')/A$, $D_1 = \Lambda(E'B - AB')/A$. Тогда легко видеть, что $C = PD$, $C_1 = PD_1$.

4. Изложим схему метода Бубнова – Галеркина решения задач (3.3), (3.4) и (3.3), (3.5). Разобьем каждый из отрезков $[l, -l_g]$, $[l_g, l]$ на N_p частей, а каждый из отрезков $[-l_g, 0]$, $[0, l_g]$ – на N_g частей. Узлы полученного разбиения отрезка $[-l, l]$ обозначим через y_n , $n = 1, \dots, N + 1$, где $N = 2N_p + 2N_g$. Положим $h_n = y_{n+1} - y_n$, $n = 1, \dots, N$. Обозначим через ψ_n , $n = 1, \dots, N + 1$, базис сплайнов [3] первой степени, соответствующий разбиению отрезка $[-l, l]$. Умножим уравнение (3.3) на каждую из функций ψ_n , $n = 2, \dots, N$, и проинтегрируем обе части полученного равенства по отрезку $[-l, l]$. Интегрируя по частям и используя граничные условия для функции $w(y)$, получим

$$\int_{-l}^l \left[-S_1 \frac{d\psi_n}{dy} + (iS_2 + 2\Lambda P \Delta \dot{\eta}) \psi_n \right] dy = 2\Lambda \lambda \int_{-l}^l H w \psi_n dy \quad (4.1)$$

$$n = 2, \dots, N, \quad \Delta \dot{\eta} = \Delta \dot{\eta}_1 + (a + y) \Delta \dot{\eta}_2, \quad \Delta \dot{\eta}_1 = \lambda \Delta \eta_1, \quad \Delta \dot{\eta}_2 = \lambda \Delta \eta_2$$

Неизвестную функцию $w(y)$ будем искать в виде $w(y) = \sum_{n=2}^N w_n \psi_n(y)$, где w_n – неизвестные коэффициенты. Подставляя функцию $w(y)$ в равенство (4.1), получим

$$\sum_{s=1}^2 \sum_{j=1}^2 c_{1nsj} w_m + c_{2n} \Delta \eta_1 + c_{3n} \Delta \eta_2 + c_{4n} \Delta \dot{\eta}_1 + c_{5n} \Delta \dot{\eta}_2 = \lambda \sum_{s=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{nsj} w_m, \quad (4.2)$$

$$n = 2, \dots, N, m = n + s + j - 3,$$

где коэффициенты c_{1nsj} , c_{2n} , c_{3n} , c_{4n} , c_{5n} , g_{nsj} легко вычисляются. Подставляя функцию $w(y)$ в равенства (3.4) и (3.5), находим

$$\pi K_1 \sum_{n=2}^N (h_{n-1} + h_n) w_n = -\lambda \Delta \dot{\eta}_1 \quad (4.3)$$

$$\pi K_2 \sum_{n=2}^N (h_{n-1} + h_n) (a + y_n) w_n + \frac{iI_0}{I} \Delta \dot{\eta}_2 = -\lambda \Delta \dot{\eta}_2 \quad (4.4)$$

Собственные числа системы (4.2), (4.3) при $\Delta\eta_2 = 0$ являются приближенными значениями "цилиндрических" собственных чисел, а собственные числа системы (4.2), (4.4) при $(\Delta\eta_1 = 0)$ – "конических" собственных чисел.

В качестве примера рассмотрим пять роторов А-1 – А-5 из [4]. Их общие параметры таковы: $L = 0,038$ м, $L_g = 0,0152$ м, $L_1 = 0,169$ м, $R = 0,019$ м, $\kappa = 0,5$, $M_r = 2,7$ кг, $\mu = 1,82 \cdot 10^{-5}$ кг · с/м², $p_a = 10^5$ Па.

Обозначим через ω'_a и ω''_a критические значения угловых скоростей ротора, при которых происходит потеря устойчивости по цилиндрической и конической формам соответственно, вычисленные по асимптотической теории. Через ω' и ω'' обозначим критические значения угловых скоростей ротора, имеющие тот же смысл и вычисленные по полной теории (с учетом конечности числа канавок). Через ω_k обозначим критическое (пороговое) экспериментальное значение угловой скорости, приведенное в [4]. Значения ω'_a , ω''_a , ω' , ω'' , ω_k (в тыс. об/мин) для роторов А-1 – А-5 приведены в

Ротор	β , град	K	δ_g , мкм	Δl , мкм	ω'	ω'_a	ω''	ω''_a	ω_k
A-1	30	20	14,0	14,7	36,5	43,5	44,5	54,5	27,90
A-2	35	20	15,7	16,2	26,5	32,5	33,0	43,0	15,70
A-3	35	23	15,2	13,7	28,5	35,0	35,5	46,0	22,30
A-4	40	23	14,7	15,5	30,0	36,0	37,0	46,5	20,90
A-5	40	28	18,0	18,0	17,5	21,5	22,5	29,5	14,75
A-1	30	20	9,4	14,7	45,0	48,0	46,0	52,5	—
A-2	35	20	11,9	16,2	47,0	43,5	54,5	53,5	—
A-3	35	23	8,9	13,7	46,0	42,5	50,0	45,0	—
A-4	40	23	9,9	15,5	49,0	48,5	52,0	55,0	—
A-5	40	28	12,7	18,0	39,0	43,5	50,5	46,0	—

таблице. Прочерки для ω_k означают, что пороговая скорость не наблюдалась при проведении эксперимента вплоть до максимально возможной скорости турбины (60000 об/мин).

Заключение. Результаты вычислений, приведенные в таблице, показывают, что критические значения угловых скоростей ротора ω' и ω'_a , при которых происходит потеря устойчивости ротора по цилиндрической форме, вычисленные для сравнения с использованием обычного уравнения Рейнольдса (ω') и асимптотического уравнения Рейнольдса (ω'_a), мало отличаются друг от друга для малых зазоров (таблица) и более отличны при больших зазорах (таблица). Аналогичное утверждение справедливо и для конических критических значений угловых скоростей ω'' , ω''_a .

Из результатов вычислений следует также, что потеря устойчивости ротора в данном случае происходит по цилиндрической форме. При этом значения цилиндрических критических угловых скоростей ω' и ω'_a довольно значительно отличаются от критических (пороговых) значений угловых скоростей ω_k , полученных в результате эксперимента. Одна из возможных причин этого состоит в том, что роторная система, рассматриваемая в эксперименте, возможно, более сложна, чем в теории. Например, наличие в этой системе упорных подшипников может оказать существенное влияние на устойчивость ротора.

Так как вычисления по асимптотической теории приводят к нахождению собственных чисел матриц, размеры которых на порядок меньше, чем при вычислении с использованием обычного уравнения Рейнольдса, то использование асимптотической теории для исследования устойчивости представляется вполне приемлемым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болдырев Ю.Я. К проблеме построения асимптотического уравнения Рейнольдса газовой смазки // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 6. С. 8–14.
2. Дроздович В.Н. Газодинамические подшипники. Л.: Машиностроение, 1976. 207 с.
3. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М.: Мир, 1974. 126 с.
4. Каннингэм, Флеминг, Андерсон. Экспериментальное исследование устойчивости радиальных газовых подшипников с шевронными канавками // Пробл. трения и смазки. 1969. № 1. С. 58–66.

Николаев

Поступила в редакцию
14.VII.1998