

УДК 532.516.013.4:536.25

© 1999 г. Н.В. НИКИТИН, В.И. ПОЛЕЖАЕВ

ТРЕХМЕРНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПЕРЕХОДНЫХ И ТУРБУЛЕНТНЫХ РЕЖИМОВ ТЕПЛОВОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В МЕТОДЕ ЧОХРАЛЬСКОГО

На основе численного решения трехмерных уравнений тепловой гравитационной конвекции исследуются пространственная структура и характеристики температурных колебаний в переходном и турбулентном режимах в модели метода Чохральского при малом числе Прандтля. Рассмотрены влияния пространственных эффектов и условия применимости осесимметричного приближения.

При выращивании промышленных монокристаллов большого диаметра методом вытягивания из расплава (метод Чохральского) число Грасгофа, определяющее интенсивность тепловой гравитационной конвекции, достигает значений, при которых течения расплава в тигле имеют переходный или турбулентный характер. Эти процессы весьма мало исследованы несмотря на то, что гидродинамическая модель метода Чохральского численно изучается уже более 30 лет (см. подробную библиографию в обзоре [1], а также в предшествующей работе авторов [2]). В отдельных случаях с помощью осесимметричных моделей были реализованы и нестационарные колебательные конвективные течения [2–5], но их исследование не имело систематического характера. Степень достоверности этих результатов не определена ввиду отсутствия данных о влиянии пространственных эффектов.

Численное моделирование переходной и турбулентной тепловой гравитационной конвекции уже имеет определенные традиции. Первые численные реализации получены на основе двумерных уравнений Навье–Стокса в вертикальном слое более 20 лет тому назад [6, 7], причем по многим характеристикам было достигнуто хорошее согласие с экспериментальными данными [8]. Однако до настоящего времени такой подход не получил распространения в этом классе задач на трехмерные случаи, за исключением случая конвекции при подогреве снизу [9].

Решения трехмерных задач применительно к методу Чохральского (см. библиографию в [1, 2, 10]) до настоящего времени охватывают лишь диапазон чисел Грасгофа, относящийся к стационарным течениям или течениям при малой надкритичности, и не имеют систематического характера, что обусловлено сложностью и многопараметрическим характером конвекции в этом случае.

С методической точки зрения прямое численное моделирование процессов турбулентной конвекции на основе трехмерных нестационарных уравнений Навье – Стокса следовало бы начать с наиболее простой задачи о тепловой гравитационной конвекции в вертикальном параллелепипеде. Предпринимаемое в этой работе прямое численное решение для модели метода Чохральского, относящейся к "специализированным" моделям [3], обусловлено необычайной актуальностью этой задачи в технологических приложениях и ее сложной внутренней структурой, представляющей интерес с общей точки зрения.

В единственной известной авторам работе [10], связанной с численным моделированием трехмерной турбулентной конвекции в методе Чохральского, проведены рас-

четы при наборе параметров, относящемся к турбулентному режиму в расплаве кремния ($Pr = 0,0175$). Они направлены на определение вклада термокапиллярной конвекции в режиме взаимодействия тепловой, термокапиллярной конвекции и противовращения кристалла и тигля при адиабатическом дне и заданном линейном профиле температуры на поверхности расплава. Турбулентные режимы при наличии совместного действия тепловой гравитационной термокапиллярной конвекции и вращения были реализованы также в лабораторных экспериментах на модельных жидкостях ($Pr = 15$) [11, 12]. Совокупность упоминавшихся механизмов конвекции действительно имеет место в реальных условиях, однако их одновременный учет хотя и важен практически и может иметь значение при проведении тестов, но мало дает для понимания механизма процесса.

Данная работа продолжает исследование авторов [2] по трехмерной устойчивости и прямому численному моделированию тепловой гравитационной конвекции в методе Чохральского при малых числах Прандтля. Как и в упомянутой работе, применяется спектрально-разностный метод, использовавшийся для моделирования неустойчивости, перехода и турбулентности в трубах и каналах [13, 14]. Конкретные геометрические параметры и граничные условия соответствуют данным осесимметричного теста [2, 15–18]. Существенное отличие от предшествующих работ состоит в том, что расчеты выполнены как в трехмерной, так и в осесимметричной постановках вплоть до числа $Gr = 6 \cdot 10^7$, когда конвекция имеет заведомо турбулентный характер. В последнем случае результаты не претендуют на высокую точность, что обусловлено ограничениями пространственного разрешения ($64 \times 63 \times 64$). Тем не менее важно уже сейчас иметь хотя бы качественное представление об особенностях пространственных течений в этом случае. Основное внимание уделяется изучению трехмерных эффектов тепловой гравитационной конвекции путем сопоставления с результатами, полученными с помощью осесимметричных моделей, а также изучению особенностей пространственной структуры осредненных полей турбулентных течений, статистических характеристик и механизмов температурных колебаний.

1. Постановка задачи и численный метод. Гидродинамическая модель метода Чохральского (фиг. 1) представляет собой цилиндрический сосуд радиуса R_c (простейшая модель тигля), заполненный расплавом до высоты H , на свободной поверхности которого соосно с цилиндром помещен диск (модель кристалла) радиуса R_x . Температуры диска T_x и боковой поверхности сосуда $T_c \geq T_x$ заданы. В этой работе предполагается, что сосуд и диск покоятся.

Для описания движения расплава в тигле применяются уравнения Навье–Стокса в приближении Буссинеска, которые записываются в следующем безразмерном виде:

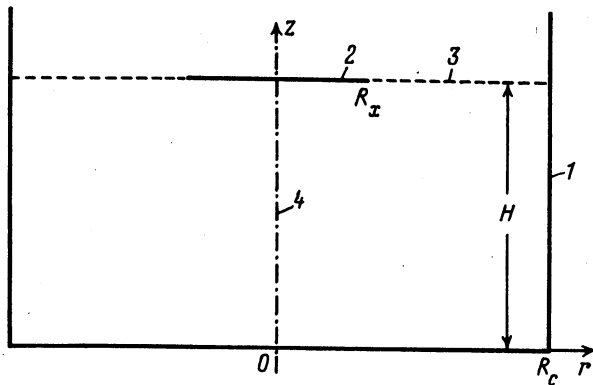
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - \nabla p + \nabla^2 \mathbf{v} + Gr T \mathbf{k}_z, \quad \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla (\mathbf{v} T) = \frac{1}{Pr} \Delta T \quad (1.2)$$

$$Pr = \nu / \kappa, \quad Gr = g \gamma (T_c - T_x) R_c^3 / \nu^2 \quad (1.3)$$

Скорость \mathbf{v} , давление p и температура T являются функциями времени t и цилиндрических координат (r, θ, z) , Pr – число Прандтля, κ – коэффициент температуропроводности жидкости. Gr – число Грасгофа, g – ускорение силы тяжести, γ – коэффициент объемного расширения жидкости, \mathbf{k}_z – единичный вектор вдоль оси z , направленный вверх. В качестве масштаба длины и скорости выбраны радиус сосуда R_c и ν/R_c , где ν – кинематическая вязкость жидкости. Масштаб температуры – разность температур сосуда и диска $T_c - T_x$.

Задача решается при следующих граничных условиях. На твердых поверхностях – на дне и боковой стенке сосуда, а также на поверхности диска выполнены условия прилипания, а на свободной поверхности жидкости между диском и сосудом, которая



Фиг. 1. Схема гидродинамической модели метода выращивания кристаллов путем вытягивания из расплава (метод Чохральского): 1 – сосуд (тигель), 2 – вращающийся диск (кристалл), 3 – поверхность расплава, 4 – ось вращения

считается плоской, отсутствуют касательные напряжения. Дно сосуда теплоизолировано, распределение температуры вдоль свободной поверхности жидкости от диска до стенки сосуда является линейным.

В задаче имеется четыре безразмерных определяющих параметра: два геометрических параметра $\alpha = H/R_c$ и $\beta = R_x/R_c$, один параметр, характеризующий свойство жидкости – число Прандтля Pr , и динамический параметр – число Грасгофа Gr . В данной работе эти параметры имеют значения, соответствующие тесту [15, 16]: $\alpha = 1$, $\beta = 0,4$, $Pr = 0,05$, а число Грасгофа варьируется в диапазоне $6 \cdot 10^6 \leq Gr \leq 6 \cdot 10^7$.

Численное решение задачи проводится смешанным спектрально-конечно-разностным методом, основные особенности которого изложены в [13, 14]. В угловом направлении θ все искомые функции периодичны с периодом 2π , что позволяет аппроксимировать их частичными суммами рядов Фурье

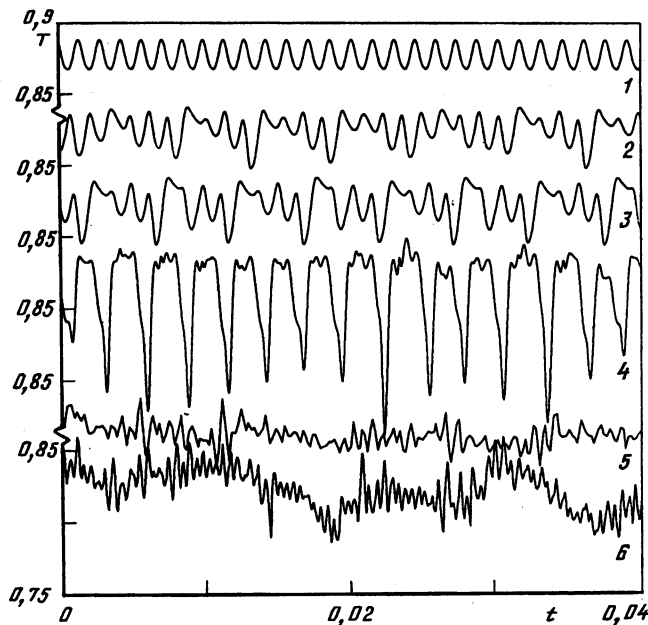
$$f(t, r, \theta, z) = \sum_{|n| \leq N_\theta} f^n(t, r, z) \exp(in\theta) \quad (1.4)$$

$$f^n(t, r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t, r, \theta, z) \exp(-in\theta) d\theta$$

В плоскости (r, z) используется конечно-разностный метод дискретизации на перемежающихся сетках. Аппроксимация нелинейных членов в уравнениях Навье–Стокса и постановка граничных условий на оси симметрии ($r = 0$), где уравнения имеют сингулярность, проводятся по методу [13]. Вычисление сверток рядов Фурье, а также решение эллиптической части уравнений Навье–Стокса проводятся с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье. Интегрирование по времени ведется полуявным методом Рунге – Кутты [14]. Оценка локальной погрешности и алгоритм автоматического выбора шага [14] включены в схему интегрирования.

В расчетах осесимметричных задач при большой надкритичности использовалось пространственное разрешение до 128×128 . В трехмерном случае использовалось пространственное разрешение $64 \times 63 \times 64$.

2. Переходный и турбулентный режимы конвекции в осесимметричном приближении. В рассматриваемом случае тепловая гравитационная конвекция развивается под действием разности температур между стенкой сосуда и поверхностью диска, причем, как показано в [2], характер этих течений в осесимметричном случае становится нестационарным при $Gr > 2,5 \cdot 10^6$.



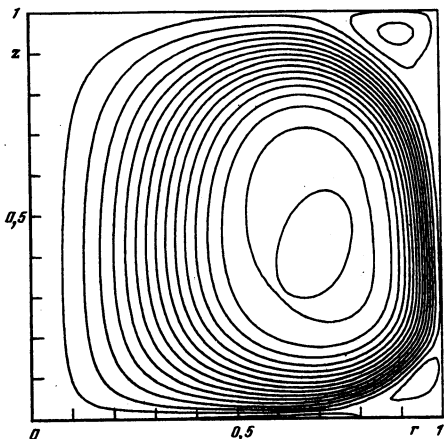
Фиг. 2. Колебания температуры в точке ($r = 0,64, z = 0,5$).
Кривые 1–6 соответствуют $Gr = 6 \cdot 10^6, 7 \cdot 10^6, 7,5 \cdot 10^6, 10^7,$
 $3 \cdot 10^7, 6 \cdot 10^7$. Осесимметричная модель

В расчетах осесимметричной задачи при увеличении надкритичности получено, что в диапазоне $2,5 \cdot 10^6 < Gr \leq 6 \cdot 10^6$ возникающие колебания – периодические. С ростом Gr период колебаний монотонно уменьшается от $2 \cdot 10^{-3}$ до $1,5 \cdot 10^{-3}$. При дальнейшем увеличении Gr характер устанавливающихся при $t \rightarrow \infty$ колебаний усложняется. На фиг. 2 приведены фрагменты графиков колебаний температуры $T(t)$ в точке ($r_0 = 0,64, z_0 = 0,5$), устанавливающихся при различных числах Грасгофа от $6 \cdot 10^6$ до $6 \cdot 10^7$.

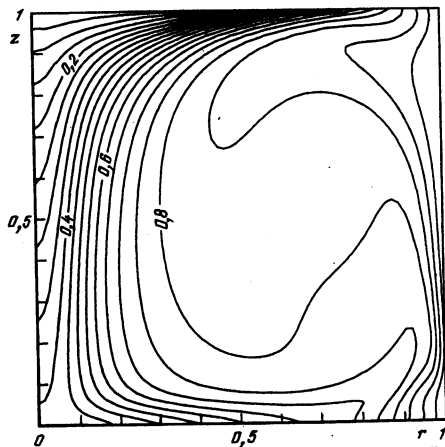
Анализ частотных спектров показывает, что колебания при $Gr = 6 \cdot 10^6$ близки к гармоническим с частотой $f_0 = 4,32 \cdot 10^3$, энергия старших гармоник составляет менее 10% энергии основного тона. При $Gr = 7 \cdot 10^6$ в спектре колебаний кроме основной частоты $f_0 = 4,67 \cdot 10^3$ появляется новая независимая частота $f_1 \approx 1,1 \cdot 10^3$. Таким образом, сигнал $T(t)$ представляет собой квазипериодические двухчастотные колебания. При $Gr = 7,5 \cdot 10^6$ происходит синхронизация частот $f_0 = 4 f_1$, кроме того, появляется низкочастотная составляющая $f_2 = f_1/2 = f_0/8$. В результате возникает периодическое движение с частотой $f_0/8$ при $f_0 \approx 4,88 \cdot 10^3$.

Дальнейшее увеличение Gr ведет к усложнению поведения движения. В сигналах $T(t)$ появляется хаотическая составляющая, проявляющаяся в уширении спектральных линий. Последние результаты отличаются от [16], где получены периодические колебания при $Gr = 10^7$. Нерегулярный характер колебаний при $Gr \geq 10^7$ согласуется с результатами [17], где использовались другие вычислительные алгоритмы. Обнаруженный сценарий смены режимов колебаний: периодический – квазипериодический – синхронизация частот – хаос наблюдается и в других гидродинамических системах, например в течениях с винтовой симметрией во вращающейся трубе [19].

Линии тока осредненного движения в нестационарных режимах, соответствующих числам Грасгофа $6 \cdot 10^6$ и $6 \cdot 10^7$, изображены на фиг. 3. Качественный вид движения соответствует стационарному случаю, рассматривавшемуся в [2]. Жидкость поднимается вдоль стенки сосуда и опускается вдоль оси симметрии. Как и в стационарном



Фиг. 3. Линии тока осредненных движений; $Gr = 6 \cdot 10^7$. Осесимметричная модель



Фиг. 4. Поля температуры; $Gr = 6 \cdot 10^7$. Осесимметричная модель

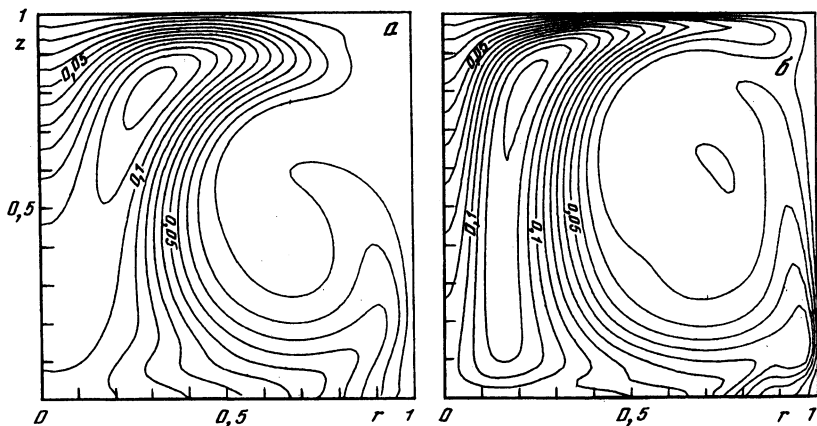
движении, имеются слабые рециркуляционные зоны в угловых областях. Максимальная скорость движения жидкости растет пропорционально $Gr^{0.5}$.

На фиг. 4 изображены изотермы осредненного движения $\langle T \rangle(r, z)$ в нестационарных режимах при $Gr = 6 \cdot 10^6$ и $6 \cdot 10^7$. Заметные изменения в распределениях средней температуры по сравнению со случаем стационарной гравитационной конвекции [2] появляются только при наибольших числах Грасгофа. Однако поле колебаний в целом более чувствительно к изменению числа Грасгофа, что видно из фиг. 5, где изображены изолинии распределения среднеквадратичной амплитуды колебаний температуры $T_{rms} = \langle T^2 \rangle^{0.5}$, $T' = T - \langle T \rangle$ при тех же числах Грасгофа. Максимум T_{rms} наблюдается в подкристалльной области вблизи точки $(r = 0,25 - 0,3, z = 0,8 - 0,9)$. Последнее свидетельствует о том, что колебания зарождаются на границе кристалла и свободной поверхности расплава.

Таким образом, осесимметричная модель при больших надкритичностях обнаруживает все характерные черты сложной динамической системы. Анализ полученных данных показывает, что переход к хаотическому состоянию для осесимметричного приближения при использованных параметрах находится вблизи значения $Gr = 10^7$. Отметим, что более детальные исследования характеристик переходных и турбулентных течений даже для осесимметричной модели представляют методический интерес. В рамках данной работы они ограничиваются недостаточным разрешением пограничных слоев у твердых поверхностей.

3. Трехмерные конвективные течения в переходном и турбулентном режимах. В предыдущей работе [2] определены порог устойчивости и вид нарастающих малых возмущений в рамках линеаризованных уравнений, а также особенности трехмерной конвекции при малой надкритичности ($Gr = 10^6$). Неустойчивость стационарных осесимметричных течений к малым возмущениям приводит к нестационарным трехмерным движениям, которые возникают при меньших числах Грасгофа, чем нестационарные осесимметричные движения. В частности, при рассматриваемых параметрах (см. разд. 1) осесимметричные колебания появляются, начиная с $Gr = 2,5 \cdot 10^6$, тогда как трехмерные колебания возникают уже при $Gr = 5 \cdot 10^5$.

Для расчета устанавливающихся трехмерных течений интегрировались полные нелинейные уравнения (1.1)–(1.3) с представлением всех искомых функций в виде (1.4). Возникающие при $t \rightarrow \infty$ трехмерные конечно-амплитудные движения могут зависеть от начальных условий. Например, если при отсутствии вращения тигля и кристалла начальное поле температуры и скорости обладает диаметальной симметрией в



Фиг. 5. Распределения средневладратичных амплитуд колебаний температуры: *a* – $Gr = 6 \cdot 10^6$, *б* – $Gr = 6 \cdot 10^7$. Осесимметричная модель

плоскости (r, θ) , т.е. при всех r и z

$$T(-\theta) = T(\theta), \quad v_r(-\theta) = v_r(\theta), \quad v_z(-\theta) = v_z(\theta), \quad v_\theta(-\theta) = -v_\theta(\theta)$$

то эти условия будут выполнены в силу уравнений в течение всего времени движения. Во избежание такой ситуации начальные условия задавались в несимметричном виде

$$T(0, r, \theta, z) = T_{2D}(r, z) + Cr(1-r^2)(1-z^2)(\cos \theta + (0,25-r^2)\sin \theta) \quad (3.1)$$

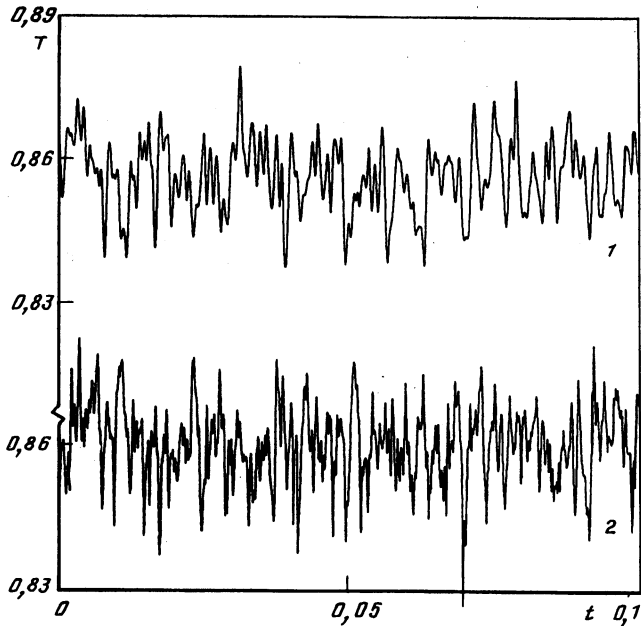
$$v(0, r, \theta, z) = v_{2D}(r, z)$$

Здесь T_{2D} , v_{2D} – распределения температуры и скорости в осесимметричном движении при соответствующих параметрах, C – нормировочный коэффициент. Поле температуры (3.1) содержит только нулевую и первую угловые гармоники, старшие гармоники рождаются при $t > 0$ в силу нелинейных взаимодействий. Трехмерность поля температуры порождает при $Gr > 0$ трехмерное поле скорости, отсутствующее при $t = 0$.

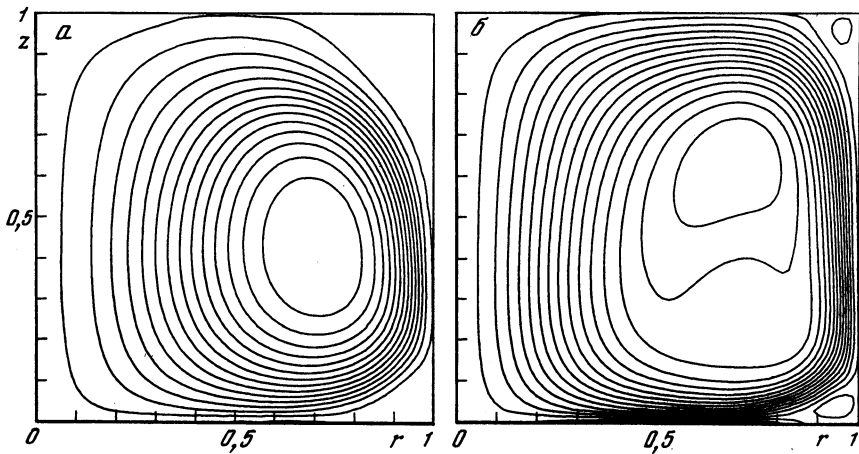
Рассмотрение трехмерных течений начнем со сравнений амплитуд колебаний температуры в той же характерной точке, что и в осесимметричном случае $(r_0, z_0) = (0,64, 0,5)$ в плоскости $\theta = 0$. При $Gr = 10^6$ это движение, начиная с $t \sim 0,2$, имеет вид автоколебательного статистически стационарного режима. Колебания $T(t)$ в предельном режиме близки к периодическим. Колебательный характер трехмерной составляющей движения порождает колебания и осесимметричной составляющей, которые подробнее рассмотрены в [2]. Напомним, что осесимметричное движение при этом значении числа Грасгофа является стационарным.

При значениях $Gr = 6 \cdot 10^6$ и $6 \cdot 10^7$ температурные колебания, начиная с некоторых значений t , имеют вид неупорядоченных, но статистически стационарных режимов, характерных для турбулентной конвекции (фиг. 6). На фиг. 7–9 изображены линии тока осредненного движения, изотермы и линии уровня средневладратичной амплитуды колебаний температуры в плоскости (r, z) , полученные при решении задачи в трехмерной постановке при $Gr = 6 \cdot 10^6$ и $6 \cdot 10^7$. Несмотря на то, что колебания в трехмерной модели обусловлены в основном пульсациями несимметричной составляющей, что видно из графика $T_{rms}(r, z)$ вблизи оси симметрии сосуда (фиг. 9), распределения всех средних величин вблизи к соответствующим распределениям, полученным в рамках осесимметричной модели (фиг. 3–5).

Вклад несимметричной составляющей в мгновенные распределения полей температуры и скорости весьма значителен, однако в распределениях средних величин "



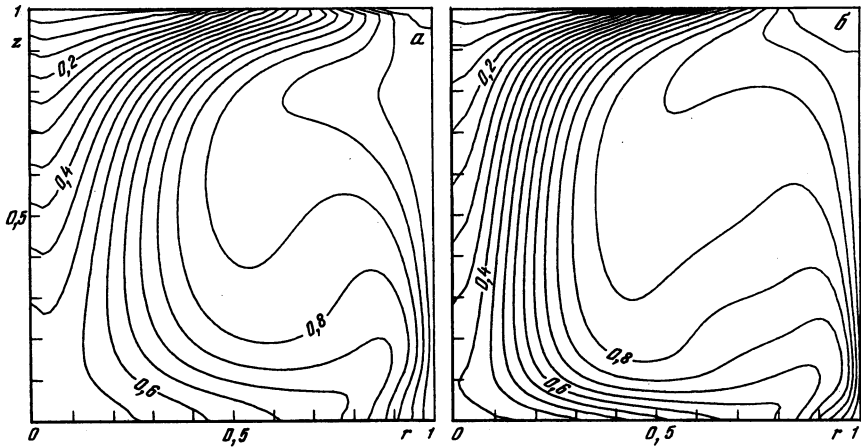
Фиг. 6. Колебания температуры в точке ($r = 0,64, z = 0,5, \theta = 0$): 1 – $Gr = 6 \cdot 10^6$, 2 – $Gr = 6 \cdot 10^7$. Трехмерная модель



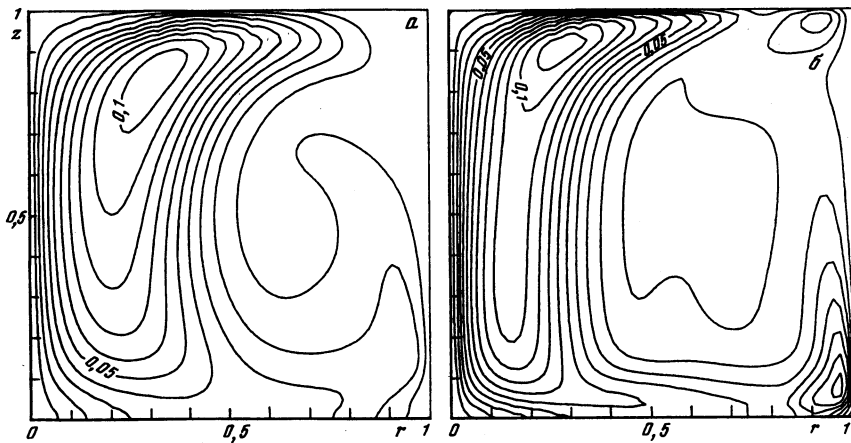
Фиг. 7. Линии тока осредненных движений в плоскости (r, z) : а – $Gr = 6 \cdot 10^6$, б – $Gr = 6 \cdot 10^7$. Трехмерная модель

плане" (в плоскости (r, θ)) при $Gr = 6 \cdot 10^6$ и $6 \cdot 10^7$ отсутствуют выраженные угловые структуры, характерные для меньших чисел Грасгофа [2]. Это свидетельствует о статистической однородности трехмерных турбулентных течений в угловом направлении.

4. Сопоставление осесимметричной и трехмерной моделей конвекции в переходном и турбулентном режимах. На основе осесимметричной модели создана удобная система для моделирования [20] и выполнен цикл исследований управляющих воздействий, альтернативных микрогравитации [5,18]. В связи с крайней трудоемкостью применения для этих целей трехмерной модели изучение возможностей осесимметричной



Фиг. 8. Распределения температуры: а – $Gr = 6 \cdot 10^6$, б – $Gr = 6 \cdot 10^7$. Трехмерная модель



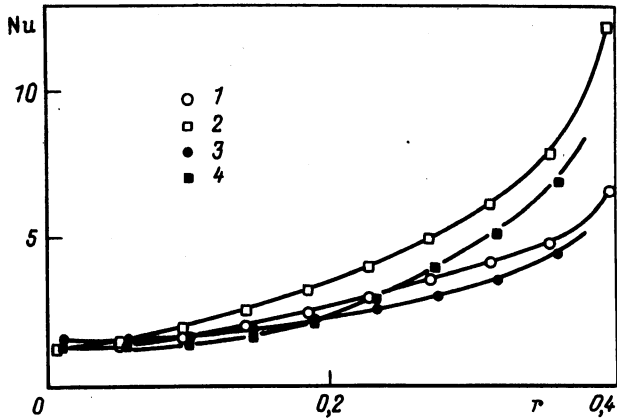
Фиг. 9. Распределения среднеквадратичных амплитуд колебаний температуры: а – $Gr = 6 \cdot 10^6$, б – $Gr = 6 \cdot 10^7$. Трехмерная модель

модели представляет важную практическую задачу, решение которой интересно для более глубокого понимания влияния трехмерных конвективных течений.

Такие явления пространственной конвекции, как наличие несимметричной структуры "в плане", в принципе не описываются с помощью осесимметричной модели. Однако из приведенных выше результатов видно, что осесимметричная модель передает многие качественные стороны конвективной неустойчивости, а влияние несимметричных эффектов на распределения средних величин до определенных значений числа Gr невелико.

На фиг. 10 изображены распределения локального числа Нуссельта $Nu = |\partial T / \partial n|$ вдоль поверхности кристалла, полученные в осесимметричной и трехмерной постановках. Осесимметричная модель дает несколько большие значения Nu , однако максимальные отличия от трехмерной модели составляют около 30%, что, по оценкам авторов, сопоставимо с погрешностями численного метода при рассматриваемых больших числах Грасгофа.

Рост несимметричных возмущений приводит к более раннему появлению колебаний и реализации стохастических численных решений. Результаты данной работы свиде-



Фиг. 10. Распределения локального числа Нуссельта вдоль поверхности кристалла. Точки 1, 2 – осесимметричная модель ($Gr = 6 \cdot 10^6$ и $6 \cdot 10^7$ соответственно); 3, 4 – трехмерная модель ($Gr = 6 \cdot 10^6$ и $6 \cdot 10^7$ соответственно)

тельствуют, что до некоторых, достаточно больших чисел Gr , имеющих практическое значение, влияние трехмерности на средние поля температуры и среднеквадратичных температурных колебаний незначительно не только в качественном, но и количественном отношении.

Заключение. Получены первые численные реализации тепловой гравитационной конвекции в модели метода Чохральского для переходных и турбулентных режимов для параметров, соответствующих параметрам международного теста [15]. Проведено сопоставление результатов осесимметричной и трехмерной моделей.

Основные различия состоят в росте несимметричных возмущений, приводящих к более раннему появлению колебаний и реализации стохастических численных решений. Однако, до некоторых, достаточно больших чисел Gr , имеющих практическое значение, влияние трехмерности на средние поля температуры и среднеквадратичных температурных колебаний незначительно.

Работа выполнена в рамках программы НАУКА–НАСА (проект № ТМ-11) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-01095).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dupret F., Van Den Bogaert N. Modelling Bridgman and Czochralski growth // Handbook of Crystal Growth / Ed. D.T.J. Hurlle. Amsterdam: Elsevier, 1994. V. 2. P. 875–1010.
2. Никитин Н.В., Полежаев В.И. Трехмерная конвективная неустойчивость и колебания температуры при выращивании кристаллов по методу Чохральского // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 3. С. 26–39.
3. Полежаев В.И., Бунз А.В., Везуб Н.А. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье–Стокса. М.: Наука, 1987. 271 с.
4. Fontaine J.-P., Randriamampianina A., Extremet G.P., Bontoux P. Simulation of steady and time-dependent rotation-driven regimes in a liquid-encapsulated Czochralski configuration // J. Crystal Growth. 1989. V. 97. № 1. P. 116–124.
5. Захаров В.Г., Косушкин В.Г., Никитин С.А., Полежаев В.И. Технологические эксперименты и математическое моделирование процессов гидродинамики и теплообмена при выращивании монокристаллов арсенида галлия // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 1. С. 134–142.
6. Дайковский А.Г., Полежаев В.И., Федосеев А.И. Исследование структуры переходного и турбулентного режимов конвекции в вертикальном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 6. С. 66–75.

7. *Polezhaev V.I., Bune A.V., Griashov V.L.* Structure, characteristics of transition and turbulence in the thermal convection given by the direct numerical modelling // *Laminar-Turbulent Transition* / Ed. Kozlov V.V. Berlin: Springer, 1985. P. 741–747.
8. *Курдюшкин А.Г.* Структура тепловых гравитационных течений у поверхности теплообмена // *Модели в механике сплошной среды*. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1979. С. 69–90.
9. *Grötzbach G.J.* Direct numerical and large eddy simulation of turbulent channel flows // *En cycl. Fluid Mech.* / Ed. N.P. Chermisinoff. Gulf Publ. Co., 1987. V. 6. P. 1337–1391.
10. *Wagner C., Friedrich R.* Turbulent flow in idealized Czochralski crystal growth configurations // *New results in numerical and experimental fluid mechanics: Braunschweig, Germany, 1996* / Ed H. Korner, R. Hilbig. Braunschweig: Viewe, 1997. P. 367–380.
11. *Бердников В.С., Панченко В.И., Соловьев С.В.* Конвективный теплообмен в режиме смешанной конвекции на модели метода Чохральского // *Теплофизика кристаллизации и высокотемпературной обработки материалов*. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1990. С. 199–221.
12. *Бердников В.С., Борисов В.Л., Марков В.А., Панченко В.И.* Лабораторное моделирование микроскопических процессов переноса в расплаве при выращивании монокристаллов методом вытягивания // *Гидромеханика и теплообмен при получении материалов*. М.: Наука, 1990. С. 68–88.
13. *Никитин Н.В.* Спектрально-конечно-разностный метод расчета турбулентных течений несжимаемой жидкости в трубах и каналах // *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 1994. Т. 34. № 6. С. 909–925.
14. *Никитин Н.В.* Статистические характеристики пристенной турбулентности // *Изв. РАН. МЖГ*. 1996. № 3. С. 32–43.
15. *Wheeler A.A.* Four test problems for the numerical simulation of flow in Czochralski crystal growth // *J. Crystal Growth*. 1991. V. 102. № 4. P. 691–695.
16. *Bückle U., Schäfer M.* Benchmark results for the numerical simulation of flow in Czochralski crystal growth // *J. Crystal Growth*. 1993. V. 126. № 4. P. 682–694.
17. *Polezhaev V.I., Ermakov M.K., Nikitin N.V., Nikitin S.A.* Nonlinear interactions and temperature oscillations in low Prandtl melt of Czochralski model: validation of computational solutions for gravitydriven and rotatory flows // *Proc. Intern. Symp. on Adv. in Computational Heat Transfer, Cesme, Turkey, 1997*. N.Y.: Begel House, 1998. P. 492–499.
18. *Polezhaev V.I., Nikitin N.V., Nikitin S.A.* Gravity-driven and rotational low Prandtl melt flow in enclosure: nonlinear interaction, temperature oscillations and gravitational sensitivity // *Proc. Joint 10th Europ. and 6th Russian Symp. on Physical Sciences in Microgravity, St-Petersburg, Russia, 1997*. Moscow, Russia: RAS, 1997. V. 1. P. 28–36.
19. *Никитин Н.В.* О характере вторичных течений во вращающейся трубе // *Изв. РАН. МЖГ*. 1992. № 6. С. 29–35.
20. *Ермаков М.К., Никитин С.А., Полежаев В.И.* Система и компьютерная лаборатория для моделирования процессов конвективного тепло- и массообмена // *Изв. РАН. МЖГ*. 1997. № 3. С. 22–38.

Москва

Поступила в редакцию
30.VI.1998