



В этом году научная общественность отмечает 275-летие Российской академии наук. В связи с этим Редколлегия журнала решила начать публикацию серии работ выдающихся ученых-гидромехаников, которые по тем или иным причинам труднодоступны современному читателю (не были опубликованы на русском языке, опубликованы в малодоступных изданиях и т.д.). Цель этих публикаций – не столько расстановка приоритетов, сколько демонстрация оригинального мышления наших предшественников и демонстрация широты их научных взглядов.

Серия открывается научно-исторической работой профессора Г.К. Михайлова о работах первых академиков Российской академии наук Д. Бернулли и Л. Эйлера, а также переводом основополагающей работы Л. Эйлера, посвященной выводу уравнений движения жидкостей и газов. Эта работа, впервые опубликованная в 1757 г. в трудах Берлинской академии (L. Euler "Principes généraux du mouvement des fluides"), никогда не публиковалась ни на русском, ни на английском языках.

УДК 532.5

© 1999 г. Г.К. МИХАЙЛОВ

## **СТАНОВЛЕНИЕ ГИДРАВЛИКИ И ГИДРОДИНАМИКИ В ТРУДАХ ПЕТЕРБУРГСКИХ АКАДЕМИКОВ (XVIII ВЕК)**

Первые плодотворные теоретические исследования движения жидкости были начаты в Петербурге в период создания там Академии наук – во второй половине 20-х годов XVIII века. Эти исследования принадлежат крупнейшим представителям физико-математических наук XVIII века петербургским академикам Д. Бернулли и Л. Эйлеру. В период своей работы в Петербурге Бернулли и Эйлер приступили одновременно к разработке учения о движении жидкости на основе закона сохранения живых сил. При полной тождественности полученных ими первых результатов Эйлер уступил право дальнейших исследований в этой области своему старшему коллеге. В итоге Бернулли создал в начале 30-х годов основы теоретической гидравлики, построив ее на базе закона баланса живых сил, приближающегося в его трактовке к закону сохранения энергии. Развитую им гидравлическую теорию Бернулли опубликовал в знаменитой "Гидродинамике" (1738) [1] – наиболее значительном трактате по физической механике XVIII века. Собственно гидродинамику (идеальной жидкости) в нынешнем ее понимании создал через 20 лет Эйлер, который придал ей близкий к нынешнему вид в своих работах первой половины 50-х годов XVIII века [2–4].

1. К 20-м годам XVIII века учение о движении жидкости располагало весьма ограниченным числом правильных результатов. Это прежде всего формула Торричелли (1608–1647) для скорости стационарного истечения жидкости из сосудов (1644) [5], не имевшая строгого обоснования для отверстия конечного размера. В нынешних обозна-

чениях она представляется в форме  $V = \sqrt{2gH}$ . Используя гипотезу плоских сечений и условие неразрывности жидкости, Торричелли выписал также формулу для сужения отвесно вытекающей из отверстия свободной струи, обусловленного ускорением падающих частиц жидкости. Он же указал форму сосуда, при истечении из которого уровень жидкости в сосуде опускается равномерно (в предположении квазистационарного истечения).

Ньютон (1643–1727) посвятил всю вторую книгу своих "Начал" [6] проблемам движения и сопротивления жидкостей. В первом издании "Начал" (1687) он попытался дать – на основе закона изменения количества движения – теоретическое решение и для скорости стационарного истечения жидкости из сосудов через отверстие конечного размера, но в результате принципиальной ошибки получил формулу, отличную от формулы Торричелли, а именно  $V = \sqrt{gH}$ . Во втором издании "Начал" (1713) Ньютон исправил допущенную им ошибку, но фактически принял формулу Торричелли за исходную предпосылку. Наряду с этим Ньютон ввел модель вязкой жидкости, предложив считать внутреннее трение при движении жидкости пропорциональным градиенту скорости в поперечном направлении. При решении единственной рассмотренной им в этой постановке задачи – о плоском осесимметричном вращении жидкости – он получил, однако, неверное решение<sup>1</sup>. Изучая сопротивление тел в потоке, Ньютон установил – на основе корпускулярной модели жидкости – закон пропорциональности локального гидродинамического сопротивления квадрату скорости и синуса угла наклона поверхности тела, соответствующий, как выяснилось в наше время, лишь неизвестным в XVIII веке гиперзвуковым течениям газа. Кроме того, Ньютону принадлежит первая формула для вычисления скорости распространения поверхностных волн в жидкости большой глубины. Наконец, он исследовал скорость распространения звука, опираясь на первую нетривиальную, хотя и никак не формализованную модель сплошной среды.

В результате Ньютон ввел в науку массу совершенно новых понятий, поставил перед механикой жидкости и газа грандиозные новые проблемы, но оставил их окончательное решение последующим поколениям.

На самом деле теоретический расчет нестационарного квазиодномерного течения жидкости (без учета трения) был дан впервые в 1727 г. на основе принципа сохранения живых сил учениками Иоганна Бернулли (1667–1748) – его сыном Даниелем (1700–1782)<sup>2</sup> и Леонардом Эйлером (1707–1783)<sup>3</sup>.

В 1725 г. в Петербурге была создана Академия наук, в первый состав которой был приглашен ряд выдающихся ученых Западной Европы. В числе первых академиков на берега Невы прибыл летом 1725 г. Даниель Бернулли, а весной 1727 г. и двадцатилетний Леонард Эйлер. По пути из Венеции в Петербург Д. Бернулли посетил в 1725 г. Базель, где провел некоторое время со своим отцом и встречался с его талантливым юным учеником – Эйлером. Старший Бернулли был в те годы вдохновлен законом живых сил, пропаганде которого он посвятил много усилий<sup>4</sup>. По приезде в Петербург – вероятно, уже в 1726 г. – Даниель заинтересовался возможностью приложения закона живых сил к задачам движения жидкости, которые он еще за два года до того совершенно ошибочно трактовал в одном своем раннем сочинении [10, 11]. Что касается Эйлера, то сохранились его юношеские научные дневники ("записные книжки" [12]), которые он начал вести, по-видимому, еще в Базеле. В них имеются два развернутых плана подготовки трактата о движении жидкостей, относящихся скорее

<sup>1</sup> Обычно исправление этой ошибки Ньютона приписывают Дж. Г. Стоксу [7]. Однако на самом деле эту ошибку исправил еще в середине XVIII века Д. Бернулли [8].

<sup>2</sup> Имя Д. Бернулли часто пишут в русифицированной форме – Даниил.

<sup>3</sup> В русском языке закрепилась фонетически неправильная транскрипция фамилии Эйлера, которую следовало бы писать Ойлер.

<sup>4</sup> Имеется русский перевод двух основных работ Иоганна Бернулли в этой области [9, с. 41–215, 217–260].

всего к 1726–1727 гг. [13]. И хотя там не указан принцип, на котором трактат должен был быть построен, из структуры планов явствует, что этим принципом мог быть только закон живых сил.

Дошедшие до нас сухие строки академических протоколов свидетельствуют, что 18 (7) и 22 (11) июля 1727 г. Бернулли читал в заседании Петербургской академии доклад о количестве воды, вытекающей через отверстие из сосудов, а двумя неделями позже – 5 и 8 августа (25 и 28 июля) – аналогичный доклад читал Эйлер. Работа Бернулли была тогда же представлена в академический ежегодник – "Комментарии" и опубликована в его втором томе в 1729 г. под заглавием "Новая теория о движении вод, текущих по произвольным каналам" [14]<sup>5</sup>. Рукопись же работы Эйлера была обнаружена и напечатана только в середине XX века [15].

Во вводной части своей статьи [14] Д. Бернулли ссылается сначала на принцип сохранения живых сил, о чрезвычайной эффективности которого в разных задачах механики он хорошо знает от своего отца. Затем он указывает, что сохранение суммы живых сил для механической системы упруго взаимодействующих тел было показано еще Гюйгенсом, и полагает, что жидкость можно считать состоящей из совокупности мельчайших совершенно упругих частиц. В результате Бернулли опирается на следующий "принцип Гюйгенса", незначительно отличающийся, как он сам подчеркивает, от принципа сохранения живых сил: "Тела, побуждаемые силой тяжести как бы то ни было к опусканию, достигают такой скорости, что если каждое из них снова поднимется прямо вверх до состояния покоя за счет своей конечной скорости, то общий центр тяжести вернется на исходную высоту". К этому принципу Бернулли добавляет еще гидравлический принцип неразрывности (в рамках гипотезы плоских течений) и на этих двух принципах строит всю свою теорию. В результате он определяет в квадратурах скорость опускания уровня жидкости в сосуде произвольной формы при истечении из него жидкости. После этого рассматривает случаи истечения воды из цилиндрического сосуда и из такого же сосуда с цилиндрическим насадком, причем в этих случаях получает конечные формулы для скорости опускания уровня воды в сосуде.

В первой половине XVIII века не было еще разработано учение о размерности физических величин и многие ученые, включая Бернулли, использовали обычно систему физических единиц, основанную по существу не на трех, как в наше время, а лишь на двух основных единицах, а именно на единицах длины  $L$  и силы (веса)  $F$ . Как известно, сокращение числа основных физических единиц эквивалентно введению одной дополнительной безразмерной величины [16]. В рассматриваемом случае такой дополнительной безразмерной величиной является ускорение. Вследствие безразмерности ускорения размерность массы  $[M]$  не отличается от размерности силы  $[F]$ . Из определения ускорения непосредственно следует также, что размерность времени  $[T] = L^{1/2}$ . Поскольку же скорость определяется как отношение пройденного пути ко времени, то размерность скорости  $V$  также составляет  $L^{1/2}$ . В работах первой половины XVIII века скорость обычно оценивается величиной с размерностью длины – скоростным напором – и определяется как корень квадратный из скоростного напора  $\sqrt{H}$  (или как  $\sqrt{2H}$ ). Поскольку скоростной напор  $H = V^2/(2g)$  и скорость  $V = \sqrt{2gH}$ , то в рассматриваемой системе единиц ускорение силы тяжести составляет соответственно  $g = 0,5$  (или  $g = 1$ ). Для перехода в формулах, записанных в системе единиц того времени, к современной форме надо, сохраняя величины сил и расстояний, заменять остальные величины по следующей схеме<sup>6</sup>: масса  $\rightarrow Mg$ , скорость  $\rightarrow V/\sqrt{2g}$  (или  $V/\sqrt{g}$ ),

<sup>5</sup> Труды Петербургской Академии наук печатались в XVIII веке на латинском языке – международном языке ученых того времени.

<sup>6</sup> Для ясности: физические величины, рассматриваемые в нынешней системе единиц, обозначаются здесь и ниже, как правило, большими буквами ( $F, M, V$  и т.д.), а соответствующие величины в системах единиц XVIII века – строчными буквами ( $f, m, v$  и т.д.).

время  $\rightarrow T\sqrt{2g}$  (или  $T\sqrt{g}$ ). Любопытно, что основное уравнение динамики  $F = MdV/dt$  принимает в первой из указанных систем единиц (когда  $v = \sqrt{H}$ ) форму  $f = 2mdv/dt$ , а во второй (когда  $v = \sqrt{2H}$ ) сохраняет привычную нам форму  $f = mdv/dt$ , хотя размерности входящих сюда величин принципиально отличаются от нынешних. При этом величина кинетической энергии (живой силы)  $\frac{1}{2}MV^2$  в зависимости от выбранного определения скорости принимала у старых авторов соответственно форму  $mv^2$  или  $\frac{1}{2}mv^2$ , что вводило в заблуждение многих последующих историков науки.

В случае истечения жидкости из цилиндрического сосуда уравнение движения принимает у Бернулли легко интегрируемый вид

$$-zdz = zdv - (nn - 1)v dz \quad (1.1)$$

где  $v$  – высота, при падении с которой тяжелое тело приобретает скорость, равную скорости опускания уровня воды в сосуде (т.е.  $v = V^2/(2g)$ , где  $V$  – сама скорость опускания уровня);  $z$  – глубина воды в сосуде;  $n$  – отношение площадей поперечного сечения сосуда и отверстия. Интегрируя уравнение (1.1), Бернулли получает (при  $n^2 \neq 2$ )

$$v = \frac{c^{nn-2}z - z^{nn-1}}{(n^2 - 2)c^{nn-2}} \quad (1.2)$$

где  $c$  – начальная глубина воды в сосуде. Для получения истинной скорости  $U$  истечения воды из сосуда достаточно использовать соотношение  $v = V^2/(2g)$  и учесть, что  $U = nV$

$$U = \sqrt{2gz \frac{1 - (z/c)^{nn-1}}{1 - 2/n^2}} \quad (1.3)$$

В заключение Бернулли заявляет, что с помощью предложенного им метода можно решать разнообразные задачи, в том числе, как он утверждает, и об истечении жидкости из двух отверстий, а также об истечении упругих жидкостей (газов).

Вернемся теперь к юному Эйлеру и предоставим сначала слово его "сопернику". Через несколько дней после своего и эйлерова докладов в Академии наук Бернулли писал своему падуанскому коллеге Дж. Полени (1683–1761):

"Я, наконец, счастливо напал на истинную теорию движения вод, которая весьма обща и может быть приложена во всех возможных случаях. Вы знаете, с каким старанием она разыскивалась наиболее искусными математиками, но безрезультатно, ибо я могу сказать, что все те, кто хотел распространить свои исследования за пределы гипотезы бесконечно малого отверстия, ошибались. Но что еще более замечательно, так это то, что в то же время эта теория была открыта другим методом г-ном Эйлером из Базеля, учеником моего отца, что создаст ему высокий авторитет. Вот задача, наше решение которой подтверждено большим числом экспериментов: определить скорость воды, вытекающей из сосуда произвольной формы через отверстие произвольной величины в каждый момент времени" [17].

В письме говорится далее, что на основе полученных уравнений проведено дальнейшее исследование задачи. Стоит обратить внимание на выражения "наша теория" и "наше решение", которыми Бернулли характеризует эти результаты.

О докладе, прочтенном Эйлером в Академии наук летом 1727 г., можно судить по сохранившейся незавершенной рукописи Эйлера, которая озаглавлена "Об истечении воды из цилиндрических труб, произвольно наклоненных и изогнутых" [15]. Эйлер решает здесь задачу об истечении жидкости с помощью прямого приложения закона живых сил. Сначала он рассматривает течение по наклонным трубам, а затем истечение из вертикальных цилиндрических сосудов и, наконец, истечение из цилиндрических сосудов с коническими насадками, выходное сечение которых перекрыто диаф-

рагмой (в отличие от Д. Бернулли для Эйлера всегда характерно рассмотрение задач в возможно более общей математической постановке). Для истечения из опорожняющегося вертикального цилиндра Эйлер, как и Бернулли, находит зависимость скорости истечения от высоты остающегося столба жидкости, а также максимальную скорость в процессе истечения и время полного опорожнения сосуда (последнее с использованием различных разложений в ряды выражения для элемента времени).

Рукопись Эйлера не содержит анализа общего случая истечения из сосудов произвольной формы, но рассмотрение цилиндрических сосудов с насадками он предваряет теоремой о приращении живой силы при бесконечно малом снижении уровня воды в произвольном сосуде. При этом Эйлер добавляет [15 § 56]: "Как только эту теорему увидел славнейший г-н Бернулли, он подкрепил ее собственным доказательством, полученным из природы центра тяжести, и изложил это доказательство недавно перед высоким собранием [Академии наук – Г.М.]". Эта теорема Эйлера составляет Предложение II статьи Бернулли [14], и остается не вполне ясным, действительно ли Бернулли не знал вообще об этой теореме до того, как он услышал о ней от Эйлера.

Результаты обоих авторов совпали и в этой деликатной ситуации Эйлер уступил право публикации полученных результатов своему старшему товарищу [18].

Отказ Эйлера от публикации своих ранних работ по теоретической гидравлике в пользу Бернулли дал повод недругам Бернулли несправедливо обвинить последнего в плагиате. Так, в 1729 г. в Петербургской академии возникла скандальная ссора между профессором физики Г.Б. Бюльфингером (1693–1750) и числившимся тогда по физиологии Д. Бернулли. Причины ссоры носили скорее личный характер, но Бюльфингер в азарте попытался воспользоваться ею, чтобы дискредитировать Бернулли и как ученого. Так, в числе прочего Бюльфингер ядовито утверждал, что "принцип живых сил, насколько известно, был впервые приложен к движению вод из конечного отверстия г-ном Эйлером, а до того Бернулли в своих математических диссертациях<sup>7</sup> использовал совсем другие принципы" [19, с. 572; 18, с. 234].

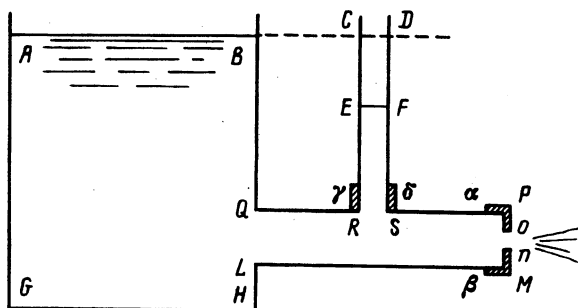
На это Бернулли отвечал категорически, хотя и несколько уклончиво: "Этот принцип я знал раньше и до того, как г-н Эйлер начал думать о математике, и прилагал его также к задачам; ...и эта задача правильно решена была сначала мною, каковое решение после того нашел и г-н Эйлер. Кроме того, крайне смешно, что мне ставят в вину, что я использовал ранее в моих диссертациях другие принципы, которые к этим принципам не имеют вовсе никакого отношения" [там же]. Само собой разумеется, все подобные официальные заявления следует рассматривать с соответствующими поправками на условия острого публичного скандала в Академии. В частности, Эйлер должен был в связи с этим письменно свидетельствовать: "Я не говорю и никогда не скажу с каким-либо основанием, что г-н профессор Бернулли взял у меня хотя бы малейшее из того, что он до сих пор докладывал в заседаниях" [20; 18, с. 234].

2. Если вопрос о скорости истечения жидкости из сосудов широко дебатировался на протяжении первой четверти XVIII века и был в принципе решен в 1727 г. Даниелем Бернулли и Эйлером, то вопрос о давлениях в потоке текущей жидкости не был тогда даже еще поставлен в повестку дня. В определенных кругах разделялось ошибочное мнение Иоганна Бернулли о том, что движение жидкости не меняет гидростатического распределения давлений в водоводах. К такому заключению пришел старший Бернулли, опираясь на неправильное понимание закона действия и противодействия (III закон Ньютона), и придерживался его до середины 20-х годов (!) [11].

Принципиальный прорыв в этом вопросе, создавший предпосылки для дальнейшего развития гидродинамики, суждено было совершить Даниелю Бернулли.

Однако в отчете Петербургской Академии наук, составленном к осени 1727 г., сказано, что Эйлер частично уже доложил Академии, а частично еще доложит резуль-

<sup>7</sup> Бюльфингер подразумевает здесь раннее сочинение Бернулли "Математические упражнения" [10], в котором тот действительно придерживался ошибочных взглядов на природу движения жидкости [11].



Фиг. 1

таты своих исследований, среди которых следующие: новая теория истечения воды из сосудов с приложением к цилиндрическим сосудам, в том числе и имеющим насадки; об истечении воды из постоянно наполненных сосудов с толкованием движения воды в фонтанах и водопроводах; о колебаниях воды в сосудах, частично погруженных в жидкость; о колебаниях воды в трубах произвольной формы<sup>8</sup>. В том же отчете сказано, что Даниель Бернулли в числе прочего показал несостоятельность предшествующих учений о течении вод по трубам и решил эту проблему математически, подтвердив свою теорию проведенными в академическом собрании экспериментами; он указал также на пользу этой теории для физиологии и, в частности, для учения о кровообращении и собирается написать трактат по физиологии (здесь ничего не говорится о дальнейших гидравлических исследованиях Бернулли).

На основании упомянутого академического отчета складывается впечатление, что Эйлер в отличие от Бернулли не считал летом 1727 г. свои гидравлические исследования законченными. Тем удивительнее, что Эйлер не опубликовал по этой тематике ни одной строки, прекратив занятия проблемами гидравлики на четверть века и уступив все права на продолжение этой работы Даниелю Бернулли.

Тем не менее ни в 1728, ни в 1729 г. Д. Бернулли еще не представил Академии ни одного доклада по этой тематике. В связи с предстоящим через два года истечением срока контракта на его работу в Академии Бернулли даже обращался осенью 1728 г. к президенту Академии с запросом о теме трактата, над которым он должен работать (написание обобщающих сочинений входило в обязанности академиков). И, вероятно, только зимой 1728/1729 гг. Бернулли приступил к написанию обширного сочинения о движении вод, отказавшись от сделанного ему предложения написать трактат о судовождении. Уже в июне 1729 г. Бернулли докладывал руководителю академической канцелярии для передачи президенту: "Я прошу вас, Милостивый государь, ...указать ему, что шесть месяцев тому назад я принялся за весьма полный трактат о законах движения вод, который составит около 40 листов; эта работа будет занимать меня день и ночь в течение всего оставшегося мне по контракту времени, поскольку я не нахожу никакой помощи у авторов, которые не смогли свести указанные законы к чистой математике без нового принципа сохранения живых сил. Другая причина, которая задержит окончание этого сочинения, заключается в большом числе экспериментов, которые мне предстоит провести... Но если я не смогу его завершить в такое короткое время, я обещаю все же, если г-н Президент одобрит это намерение, работать над ним без перерыва, когда я вернусь на Родину [в Швейцарию], и выслать его в эту Академию, когда оно будет закончено" [21].

<sup>8</sup> "Доношение" Академии наук в Верховный тайный совет о состоянии и успехах Академии (1727 г.) с перечислением работ всех академиков дошло до нас в тяжеловесном русском канцелярском переводе того времени, когда русской научной терминологии еще не существовало [19, с. 271–286; 13]. Рукописный текст "Доношения" хранится в РГАДА (ф. 17, № 3, ч. 1, лл. 424–444 об.).

В связи с реализацией указанного плана Бернулли приступил в 1729 г. к продолжению экспериментов по изучению истечения жидкости из отверстий и удара струй. Именно в этих экспериментах он пришел к заключению о зависимости давления в потоке от скорости течения.

Первым сохранившимся свидетельством открытия Д. Бернулли является его письмо Х. Гольдбаху (1690–1764) от 17(6) июля 1730 г. "Что касается меня, – писал ему тогда Бернулли, – я полностью погрузился в воды, которые составляют мое единственное занятие, и отказался с некоторого времени от всего того, что не относится к гидростатике и гидравлике... В последние дни я сделал новое открытие, которое может принести громадную пользу для сооружения водопроводов и которое прежде всего пролет новый свет на физиологию. Я открыл статику текущих вод – науку, которую никто, насколько я знаю, не рассматривал до меня и которая, если бы за нее даже пытались приняться, несомненно, оставалась бы весьма несовершенной, поскольку еще не были выявлены те законы, которыми я пользуюсь и которые я нашел весьма точными на основании большого числа экспериментов. Речь идет о нахождении давления (*l'effort*) вод, которые проталкиваются с произвольной силой через какую угодно трубку. Вот один из самых простых случаев (см. фиг. 1).

Пусть *AGHB* – сосуд с горизонтальной цилиндрической трубкой *LMPQ*, конечное основание которой *PM* имеет отверстие *on*; к этой трубке присоединена другая вертикальная трубка *SDCR*. Известно, что если заткнуть отверстие *on* и наполнить все водой до *AB*, то уровень воды поднимется в вертикальной трубке до *CD*; если же откупорить отверстие *on*, так что вода начнет течь по горизонтальной трубке с большей или меньшей скоростью в соответствии с тем, будет ли отверстие *on* больше или меньше, то я утверждаю, что поверхность воды в вертикальной трубке опустится до *EF*, несмотря на то что поверхность *AB* не опускается вследствие ли того, что сосуд весьма велик, или вследствие того, что он непрерывно пополняется водой в той мере, в которой она вытекает. Очевидно, что при этом давление текущей воды меньше давления воды покоящейся и эти давления относятся друг к другу в точности так, как *SF* к *SD*.

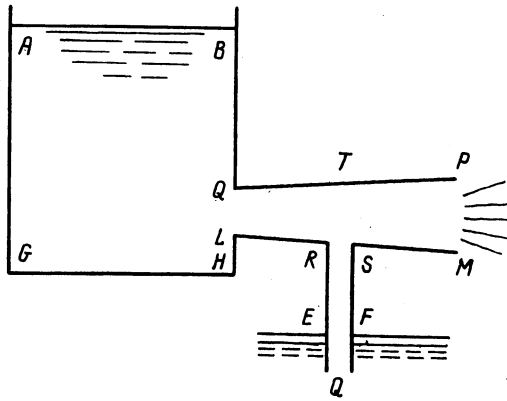
Таким образом, необходимо правильно определить высоту *SF*, и вот что я нашел с помощью моей новой теории. Пусть круг, [диаметр] которого *QL* или *PM* относится к кругу отверстия, [диаметр] которого *on*, как *n* к 1 и пусть высота *SD* = *a*; я утверждаю, что всегда будем иметь

$$SF = \frac{nna - a}{nn} \quad (2.1)$$

так что, если бы вовсе не было основания, т.е. если бы вся трубка была рассверлена, поверхность опустилась бы до *RS*. Следует отметить, что в этом случае горизонтальная трубка не испытывает никакого давления, что дает новые правила для устройства водопроводных труб и что г-н Бюльфингер не мог понять до тех пор, пока я не сделал для него эксперимент в присутствии других академиков. Я проводил эксперименты с помощью очень хорошо отполированного железного цилиндра, который я дал изготовить с различными крышечками  $\alpha PM\beta$ , имевшими отверстия разной величины; посередине цилиндра был припаян маленький кусочек трубки  $\gamma RS\delta$ , в которую плотно вставлялась стеклянная трубка *CRSD*. Все эксперименты удались в совершенстве" [22, с. 373–375; 23, с. 220–221].

В ответ на высказанную Гольдбахом по этому поводу примитивную и неправильную гипотезу Д. Бернулли писал ему 24(13) августа 1730 г.:

"Если бы дело было настолько простым, чтобы быть разрешенным с помощью простой аналогии, как ваша, было бы чудом, чтобы это ускользнуло от всех тех, кто писал по этому поводу. Мой метод требует значительно большего аппарата как в отношении механики и гидростатики, так и в отношении чистой математики, поскольку дело сводится часто к уравнениям, почти не поддающимся анализу. Я рассматри-



Фиг. 2

ваю сначала трубку  $QM$  как бы сразу ломающей в  $R$ , и ясно, что вода после разрыва будет в  $QP$  двигаться с ускорением; после этого надо суметь вычислить это ускорение для бесконечно малого промежутка времени (что до сих пор не умели делать) и отсюда можно заключить, какое давление (pression) испытывает вода в  $QP$ , а оно пропорционально высоте  $SF$  [22, с. 391]. Здесь указана по существу вся схема вычисления давлений в системах труб, которая будет использована Бернулли позже в его "Гидродинамике" [1].

"Следующее обстоятельство может сначала шокировать здравый смысл, – продолжал Бернулли, – но я тем не менее уверен в его абсолютной истинности, хотя и не провел еще никаких экспериментов. А именно то, что высота  $SF$  может быть отрицательной, так что стенки трубки  $QM$  не только не подвергаются давлению изнутри, но испытывают сжатие, и вследствие этого вода может подниматься сама по себе на любую высоту. Представьте себе, М[илостивый государь], что трубка  $QPLM$  (см. фиг. 2) является опрокинутым конусом; пусть, например, диаметр  $ST$  относится к диаметру  $MP$  как 1 к  $\sqrt{2}$  или, проще, их круговые сечения относятся как 1 к 2; я утверждаю, что если сделать маленькое отверстие в  $RS$ , которому соответствует трубка  $RSFE$ , конец которой  $Q$  находится под водой, то эта вода будет непрерывно подниматься, не будучи никак подталкиваема извне, и будет изливаться через  $PM$ , если только высота  $SF$  будет меньше  $3BQ$ , в отсутствие чего вода будет опускаться вдоль  $SF$ " [22, с. 391–392].

Таким образом, Д. Бернулли совершил прорыв на пути к установлению понятия гидродинамического давления – фундаментального понятия, создавшего эпоху в развитии гидродинамики.

Резюме своих результатов в отношении давления в потоке жидкости Бернулли опубликовал первоначально в небольшой заметке [24], помещенной в "Комментариях" Петербургской академии за 1729 г. (опубликованных, однако, по техническим причинам лишь в 1735 г.). В ней приведено описание соответствующих опытов, в том числе и с отрицательным давлением в диффузорных насадках. Последние он продемонстрировал осенью 1730 г. при торжественном посещении Академии португальским принцем. Заметка содержит и приведенную в письме к Гольдбаху расчетную формулу для давлений в простейшем случае истечения из сосуда через трубку с различными отверстиями на выходе. Бернулли не раскрыл здесь, однако, вывода указанной им формулы, предполагая включить его в подготавливавшийся им тогда большой трактат по гидравлике, которому суждено было увидеть свет лишь в 1738 г. [1].

3. Д. Бернулли покинул Петербург летом 1733 г., оставив Академии большую, содержащую около 400 страниц рукопись сочинения по гидравлике. Согласно просьбе



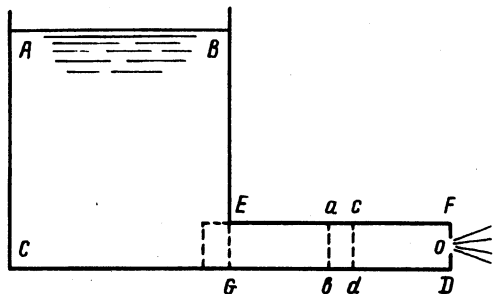
автора, рукопись эта должна была быть впоследствии уничтожена, а окончательную редакцию сочинения Бернулли сначала предполагал опубликовать в Базеле. В конце концов черновая петербургская рукопись так и не была уничтожена и готовится сейчас в Швейцарии к публикации в рамках "Собрания трудов" Д. Бернулли, а его завершённое сочинение было напечатано под названием "Гидродинамика, или записки о силах и движениях жидкостей" в 1738 г. в Страсбурге с подзаголовком на титульном листе: "Академический труд, сочиненный автором во время его работы в Петербурге". В своем сочинении Бернулли ввел впервые и сам термин "гидродинамика". Однако с современной точки зрения содержание "Гидродинамики" не выходит за пределы теоретической гидравлики – теории квазиодномерного движения жидкости. Нынешнее противопоставление терминов "гидродинамика" и "гидравлика" возникло значительно позже, уже в XIX веке.

Почти все содержащиеся в "Гидродинамике" решения получены на основе принципа сохранения живых сил. Формулировку этого принципа Бернулли предпочел заимствовать у Гюйгенса, чтобы не использовать непосредственно понятие живых сил, сильно раздражавшее в те времена ньютонианцев англичан. Согласно утверждению Гюйгенса, писал он, "если любое число весомых тел начинает двигаться произвольно под действием силы своей тяжести и затем все они сами собой приходят в состояние покоя, то общий центр тяжести этих грузов вернется на первоначальную высоту", а это эквивалентно утверждению, что "если любое количество весомых тел начинает двигаться произвольно под действием силы своей тяжести, то скорости отдельных тел по поводу будут таковы, что сумма их квадратов, умноженных на соответствующие массы, будет пропорциональна вертикальной высоте, на которую снизится общий центр тяжести этих тел, умноженной на массы всех тел" [1, разд. I, § 5]. При этом следует помнить, что, как сказано выше, под квадратами скорости у Бернулли подразумеваются величины  $V^2/(2g)$ , а под массами – величины  $Mg$ , так что живая сила определяется здесь именно в форме  $\frac{1}{2}MV^2$ , а не  $MV^2$ , как это может показаться. Таким образом, Бернулли пользуется вместо понятия живых сил понятием "потенциальный подъем", заменяя принцип сохранения живых сил принципом равенства "потенциального подъема" "действительному опусканию" элементов системы.

"Гидродинамика" Д. Бернулли является, пожалуй, наиболее глубоким по физическому содержанию сочинением по основам механики в XVIII веке. В первых разделах книги Бернулли приводит решения различных задач об истечении жидкостей из сосудов произвольной формы и о колебаниях жидкости в сосудах, в том числе с учетом потерь живой силы (т.е. кинетической энергии), при внезапных увеличениях поперечного сечения потока, например, при поступлении жидкости через отверстия в большие сосуды. Взгляды Бернулли на потери живой силы при движении жидкости и возможность перехода части ее к субмакроскопическим движениям среды приближают нас к пониманию общего закона сохранения энергии. Далее в "Гидродинамике" следует раздел, посвященный эффективности работы гидравлических машин, где Бернулли четко оперирует понятием механической работы и вычисляет коэффициент полезного действия ряда простейших гидравлических устройств. После этого он рассматривает движение упругих (сжимаемых) жидкостей, предлагает элементарную кинетическую теорию газов, рекомендует на ее основе определять температуру пропорционально внутренней энергии движения частиц газа (что соответствует по существу шкале Кельвина) и рассчитывает истечение газов в предположении его изотермичности<sup>9</sup>.

Наконец, в разделе XII "Гидродинамики" изложен метод определения давления потока на стенки труб. Это открытие Бернулли внесло коренной переворот во все представления ученых о давлении в потоках жидкости. Своеобразный и трудный для

<sup>9</sup> Исследование адиабатических течений газа было начато лишь в первой половине XIX века после введения этого понятия П.С. Лапласом (1749–1827), а сам термин "адиабатический" был введен еще позже У.Дж. Рэнкином (1820–1872).



Фиг. 3

современного читателя вывод формулы Бернулли, лежащей в основе того, что называется теперь интегралом Бернулли, заслуживает подробного рассмотрения.

Бернулли формулирует задачу о нахождении давления в § 5 раздела XII следующим образом: "Пусть имеется весьма обширный сосуд  $ACEB$ , снабженный цилиндрической и горизонтальной трубой  $ED$  (см. фиг. 3), который должен постоянно поддерживаться полным воды, и пусть в конце трубы имеется отверстие  $o$ , выбрасывающее воды с равномерной скоростью. Требуется определить давление воды на стенки трубы  $ED$ ".

Решение поставленной задачи Бернулли сводит к отысканию начального ускорения жидкости в предположении мгновенного разрыва трубы. Скорость истечения жидкости (воды) из отверстия (или, точнее, принятая у Бернулли мера ее)  $v_2 = \sqrt{a}$ , где  $a$  – высота уровня воды в сосуде над выходным отверстием<sup>10</sup>. Если отношение площади поперечного сечения трубы к площади выходного отверстия  $\Omega_1/\Omega_2 = n$ , то скорость в трубе составляет<sup>11</sup>  $v_1 = \sqrt{a/n}$ . В случае, если бы концевое сечение трубы  $ED$  было полностью открыто, скорость жидкости в трубе составляла бы, очевидно, также  $v_2$ . Однако частичное перекрытие сечения  $FD$  торцевой стенкой с отверстием  $o$  препятствует свободному истечению жидкости, обуславливает ее сжатие и создает тем самым давление в потоке и на стенки трубы. "Ясно, – пишет Бернулли, – что давление стенок пропорционально ускорению или приращению скорости, которую приобрела бы вода, если бы мгновенно исчезла всякая помеха для движения, так что она выбрасывалась бы прямо в воздух". Поэтому для определения давления на стенки трубы достаточно представить себе мгновенный разрыв трубы и определить начальное ускорение жидкости после разрыва. Бернулли предполагает, что в некоторый момент труба разрывается в сечении  $cd$  (находящемся на определенном расстоянии  $c$  от входного сечения  $EG$ ), и вычисляет ускорение движения жидкости в этом сечении. Для этого он использует свой принцип равенства "потенциального подъема" "действительному понижению" (т.е. по существу постоянства суммы кинетической и потенциальной энергии).

Пусть скорость жидкости в трубе  $Ed$  составляет  $v = V/\sqrt{2g}$  и за элементарный промежуток времени  $dt$  через сечение разрыва  $cd$  вытекает цилиндрическая капля  $acdb$  (длиной  $ac = dx$  и объемом  $\Omega_1 dx$ ) и равный ей объем жидкости входит в трубу через начальное сечение  $EG$ . Тогда общее приращение живых сил за промежуток времени  $dt$  складывается из двух частей: поступающий в трубу через сечение  $EG$  объем жидкости  $\Omega_1 dx$ , покоившийся в широком сосуде  $ACEB$ , приобретает живую силу  $\gamma \Omega_1 dx v^2$  (т.е.  $\rho \Omega_1 dx V^2/2$ ), где  $\rho$  и  $\gamma$  – плотность и объемный вес жидкости, которые Бернулли не

<sup>10</sup> В нынешней терминологии скорость истечения  $V_2 = \sqrt{2ga}$ .

<sup>11</sup> На самом деле Бернулли полагает затем в "Гидродинамике", что площадь отверстия  $o$  как бы равна единице, так что  $n$  выступает в роли площади поперечного сечения трубы.

вводит в расчет в явном виде; масса жидкости в трубе  $Ed$  приобретает дополнительную живую силу  $2\gamma\Omega_1cvdu$  (т.е.  $\rho\Omega_1cVdV$ ). Итак, общее приращение живой силы за элемент времени  $dt$  («потенциальный подъем») составляет  $\gamma\Omega_1(v^2dx + 2cvdu)$ . Происходящее за это же время «действительное понижение» соответствует опускающему поступившему в трубу объема  $\Omega_1dx$  с уровня поверхности жидкости в сосуде до уровня трубы (на высоту  $a$ ) и составляет  $\gamma a\Omega_1dx$ . Приравнивая "потенциальный подъем" "действительному понижению", получаем уравнение

$$\frac{udv}{dx} = \frac{a - v^2}{2c} \quad (3.1)$$

Но при любом движении действующая сила (давление) пропорциональна отношению приращения скорости к элементу времени. Таким образом, в рассматриваемом случае давление в трубе  $p_1$  пропорционально отношению<sup>12</sup>  $dv$  к  $dt = dx/v$ , т.е.  $p_1 = \alpha vdv/dx$ , где  $\alpha$  – некоторый постоянный коэффициент. Согласно предыдущему уравнению

$$p_1 = \alpha \frac{v dv}{dx} = \alpha \frac{a - v^2}{2c} \quad (3.2)$$

Но в начальный момент скорость в трубе  $v = \sqrt{a/n}$ , так что

$$p_1 = \alpha \frac{n^2 - 1}{2n^2 c} a \quad (3.3)$$

Остается найти величину коэффициента  $\alpha$ . Поскольку Бернулли полагает этот коэффициент не зависящим от параметров задачи, ему достаточно рассмотреть простейший случай бесконечно малого выходного отверстия  $o$ , когда жидкость в трубе практически не движется и давления в системе "сосуд + труба" распределяются гидростатически. При этом давление в трубе измеряется высотой столба жидкости  $a$  (т.е.  $p_1 = \gamma a$ ), а  $n \rightarrow \infty$ , откуда следует, что  $\alpha = 2c\gamma$ . В результате Бернулли получает окончательно для давления в трубе выражение<sup>13</sup>

$$p_1 = \gamma a \frac{n^2 - 1}{n^2} \quad (3.4)$$

Так появилось первоначально уравнение Бернулли для случая стационарного течения жидкости. Для того чтобы приблизить это выражение к тому, что теперь называется интегралом Бернулли, перепишем его, что  $n = \Omega_1/\Omega_2$ , скорость жидкости в трубе  $V_1 = \sqrt{2ga}/n$ , скорость истечения  $V_2 = \sqrt{2ga}$ ,  $V_1\Omega_1 = V_2\Omega_2$  и давление на выходе  $p_2 = 0$ :

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad (3.5)$$

В заключительном разделе "Гидродинамики" (XIII) Бернулли дал сначала первое правильное определение силы давления вытекающих из отверстия струй, величина которой была до того предметом острых дискуссий. Затем он выдвинул идею гидро-реактивного судоходства и развил теорию движения судов с водометным движителем,

<sup>12</sup> Как было сказано выше, время у Бернулли имеет разность  $L^{1/2}$ , что никак не нарушает рассуждений.

<sup>13</sup> В подлинном тексте Бернулли эта формула не содержит объемного веса жидкости  $\gamma$  и самого обозначения  $p$  для давления.

в которой впервые рассмотрел движение системы с массой переменного состава (на основе закона сохранения количества движения).

4. Печатание "Гидродинамики" сопровождалось различными техническими трудностями, о которых мы знаем из частично сохранившейся переписки Д. Бернулли с Эйлером [25]. В результате переданная издателю в 1734 г. рукопись была опубликована лишь весной 1738 г. Немедленно после выхода книги в свет, в начале мая 1738 г., Бернулли направил ящик с 11 ее экземплярами в Петербург, но посылка потерялась в пути и "Гидродинамика" попала в Петербург только в самом конце весны 1739 г.

Тем временем, ознакомившись с "Гидродинамикой" Даниеля Бернулли, завистливый и честолюбивый Иоганн Бернулли начал срочно готовить – в тайне от своего сына – свой собственный вариант обоснования гидравлики<sup>14</sup>. Первое известное нам упоминание об этой работе находится в письме Иоганна Бернулли Эйлеру от 11 октября 1738 г. [26, с. 247–254]. Начальный вариант своей "Гидравлики", ставший впоследствии ее первой частью, старший Бернулли выслал в Петербург<sup>15</sup> однако лишь 17 марта 1739 г., скрыв это сознательно от своего сына. Недавно еще апологет принципа сохранения живых сил, Иоганн обвинял теперь своего сына в том, что последний основал свою "Гидродинамику" лишь на "косвенном" принципе, который не всеми признан. Сам он претендовал на открытие "прямого" и истинного" принципа для изучения движения жидкостей.

Центральной идеей первой части "Гидравлики" является представление о некоей весьма (бесконечно) короткой "горловине" (*gorges*), которая образуется в потоке при течении по трубе в местах внезапного изменения ее сечения и на преодоление которой потоку требуется тем не менее конечная сила. Иоганн утверждал [27, 28, § 8], что идея "горловины" появилась у него еще в 1729 г. и он якобы рассказывал о ней тогда некоторым своим друзьям. Появление такой идеи у старшего Бернулли не исключено, но не в 1729, а в 1730 г., после ознакомления с открытием его сыном закона изменения давлений на стенки трубы при изменении ее сечения, полностью перевернувшим прежние представления Иоганна о давлениях в потоке жидкости. Но Бернулли-отец заведомо не мог в те годы извлечь из этой идеи никаких математических выводов и едва ли мог делиться с кем-нибудь своими мыслями по этому поводу. Только выход "Гидродинамики" дал ему импульс и контрольный материал для дальнейшего развития своих неясных представлений о "горловине". При этом Иоганн сначала почти вслепую подошел к попыткам применения к расчету движения жидкости "закона ускорительных сил" (т.е. второго закона Ньютона), что он еще не вполне осознал при подготовке первой части своей "Гидравлики". Но уже в сопроводительном письме к первой части своей работы, восхищаясь ценностью своей идеи о "горловине", он писал Эйлеру, что он приступил к написанию второй части своего труда, где представление о "горловине" уже не потребует.

Эйлер усмотрел уже в первой части "Гидравлики" элементы более общего динамического подхода к решению задачи о движении жидкости<sup>16</sup>, причем со свойственной ему пронизательностью понял их лучше, чем сам Иоганн Бернулли. В результате Эйлер тут же изложил в письме своему престарелому учителю – от 16 (5) мая 1739 г. – набросок теории движения жидкости в трубах и сосудах произвольной формы, основанный на косвенном, но последовательном использовании ньютонова "закона ускорительных сил", хотя и без явного использования понятия о гидродинамическом давлении в потоке [26, с. 287–290/295–198]. Это письмо, по-видимому, поставило старшего

<sup>14</sup> Следует подчеркнуть, что Даниель Бернулли упоминает своего отца в "Гидродинамике" всегда с большим уважением и аккуратно ссылается на все его относящиеся к делу опубликованные работы.

<sup>15</sup> Иоганн Бернулли состоял почетным членом Петербургской Академии наук и поэтому печатал часть трудов в академических "Комментариях".

<sup>16</sup> Пожалуй, только прозорливый Эйлер смог усмотреть это уже в первой части "Гидравлики".

Бернулли в очень трудное положение, заставив его переработать свои наброски второй части "Гидравлики". Так или иначе, но высылка этой второй части Эйлеру задержалась под разными, вполне благовидными предлогами на полтора года, до августа 1740 г.

По существу вторая часть оказалась совершенно новым сочинением, практически не связанным с первой частью. Здесь, в частности, содержались элементы представления о гидродинамическом давлении и была аккуратно развита теория неустановившегося движения жидкости, не всегда правильно понимавшаяся Даниелем Бернулли. Подтверждая получение второй части "Гидравлики", Эйлер воздал в своем письме – от 29 (18) октября 1740 г. – чрезвычайную хвалу своему учителю: "Благодаря в высшей степени полезному и глубокому открытию, – писал он в свойственном тому времени витиеватом стиле, – Ваше имя навсегда будет свято для Ваших потомков" [26, с. 386–389]. Для проницательного Эйлера "Гидравлика" Иоганна Бернулли была основополагающим сочинением, приоткрывающим путь к более широкому использованию основного закона динамики в механике жидкости<sup>17</sup>. Но далеко не все современники смогли сразу же оценить "жемчужные зерна" этого сочинения, ценность которых была полностью перекрыта через десятилетие в очередном цикле работ Эйлера.

Любопытно, что сам Иоганн Бернулли допустил в "Гидравлике" грубую ошибку в расчете сил реакции вытекающей из сосуда струи, ранее правильно определенных в "Гидродинамике" его сына. Не поняв многократных разъяснений Эйлера, он все же распорядился – под давлением последнего – вычеркнуть из посланной в Петербург рукописи весь раздел, посвященный реактивным силам.

Две части "Гидравлики" Иоганна Бернулли были представлены Петербургской академии к публикации соответственно в 1738 и 1740 гг. С учетом преклонного возраста их автора они были помещены в тома петербургских "Комментариев" за 1737 и 1738 гг., но ввиду трудностей, испытывавшихся академическим издательством, были напечатаны соответственно лишь в 1744 и 1747 гг. [27]. Тем временем старший Бернулли готовил в Швейцарии к печати свое "Полное собрание трудов" и включил в последний его том также и "Гидравлику". Здесь она и увидела впервые свет [28]. Опубликованной в "Полном собрании трудов" "Гидравлике" Иоганн дал вызывающее заглавие: "Гидравлика, теперь только открытая и обоснованная на чисто математических началах. Сочинена в 1732 г. [!]" – заглавие, которое он не посмел дать рукописи, посланной Эйлеру в Петербург. Само собой разумеется, что приведенная дата – 1732 г. – не выдерживает никакой критики. Но Иоганн добился своего: он присвоил себе все результаты своего сына. Косвенным результатом этого подлога было то, что оскорбленный и разочарованный Даниель прекратил ведущую им дальнейшую работу над совершенствованием "Гидродинамики" и подготовкой ее второго издания. Кроме того, он разобиделся на Эйлера, хвалебный отзыв которого о "Гидравлике" Иоганн предпослал ее швейцарскому изданию [28, с. 389].

Иоганн Бернулли так и не понял замечаний Эйлера об ошибочности своих подходов к определению реакции вытекающих струй жидкости и включил в швейцарское издание "Гидравлики" специальное дополнение, в котором вернулся к своим глубоко ошибочным старым взглядам на природу истечения струй.

В те же годы попытку применения основного закона динамики к расчету движения жидкости предпринял в своем "Трактате о флюксиях" (1742) шотландец Маклорен (1698–1746) [29, § 537–550], однако его подход не получил отклика на континенте. Со своей стороны, Даламбер (1717–1783) предложил в 1744 г. теорию движения жидкостей, основанную на сформулированном им в предшествующем году и носящем сегодня его имя принципе динамики. Однако посвященный теории движения жидкостей трактат Даламбера [30] также не внес заметного прогресса в развитие гидравлики.

<sup>17</sup> Сейчас уже невозможно установить, в какой мере упомянутое выше письмо Эйлера повлияло на содержание второй части "Гидравлики" Иоганна Бернулли и не следует ли считать Эйлера в некоторой мере ее "соавтором".

5. Разработка фундаментальных основ механики жидкости и газа принадлежит Леонарду Эйлеру. Правда, первые подходы к выводу общих континуальных уравнений движения жидкости были предприняты в самом конце 40-х годов Даламбером. Он включил свои гидродинамические исследования в представленное в конце 1749 г. на конкурс Берлинской академии сочинение о сопротивлении жидкостей. Сочинение это не было, однако, удостоено премии, а Академия (при очевидном участии Эйлера) предложила всем соискателям дополнить исследования сопоставлением их теоретических выводов с экспериментальными данными. После этого обиженный Даламбер опубликовал свое сочинение самостоятельно в Париже в 1752 г. [31].

Наряду с соображениями о сопротивлении жидкостей в его сочинении содержится рассмотрение непрерывного поля скоростей и вывод дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих некоторые случаи движения жидкости. Хотя и насыщенное новыми идеями, сочинение Даламбера не доводило исследования до общих уравнений движения жидкости. Более того, написанное в свойственном Даламберу нечетком и непоследовательном стиле сочинение это трудно для чтения и понимания. Изучавший его тщательно К. Трусделл писал: "Ясность и прямота, которых мы ожидали на основании введения к сочинению, нигде не обнаруживаются, и я признаю, что мне стоило громадного труда проследить, насколько это удалось, за действительным содержанием работы, – труда, облегчению которого не послужили многочисленные опечатки в основных результатах" [32, с. LI]. Подчеркнутые недостатки работы Даламбера не уничтожали ее ценности, особенно для Эйлера, который имел возможность ознакомиться с ней еще в 1749–1750 гг.

Эйлеру всегда нужен был лишь тончайший намек на новую идею, чтобы понять ее, ухватившись за нее, развить полную и стройную теорию. В результате именно Эйлеру удалось построить с присущей ему ясностью и четкостью всю систему уравнений континуального движения идеальной жидкости.

Продвижению Эйлера в разработке общих методов механики существенно способствовало введение им записи уравнений движения точки или элемента среды в неподвижных декартовых координатах. Преимущества такой формы записи уравнений движения настолько поразили Эйлера, что он назвал этот подход новым "общим и фундаментальным принципом всей механики"<sup>18</sup>. Посвященный этому принципу мемуар был доложен Берлинской академии 3 сентября 1750 г. и опубликован через два года [33]. Указанный принцип, по словам Эйлера, можно рассматривать "как единственный фундамент всей механики и других наук, которые трактуют о движении произвольных тел". В своем мемуаре Эйлер писал, что "именно на этом единственном принципе должны быть основаны все другие принципы, как те, которые уже получены в механике и гидравлике и которыми пользуются сейчас для определения движения твердых и жидких тел, так и те, которые пока еще неизвестны и которые нам нужны для развития как указанных выше случаев твердых тел, так и многих других, которые относятся к жидким телам" [33, § 19].

Итак, новый принцип Эйлера включал выделение элементарной частицы из сплошной среды и применение к ней основного ньютонова закона динамики, записанного в проекциях на неподвижные оси координат. Сейчас трудно себе даже представить тот скачок, который придала механике эта работа Эйлера, которая кажется сегодня самоочевидной. Но именно она открыла самый простой и естественный путь для последовательного построения динамики твердого тела и главное всей механики сплошной среды.

Справедливости ради надо отметить, что запись основного закона динамики в проекциях на неподвижную систему координат применительно к изучению движения

<sup>18</sup> Уравнения движения материальной точки или элементарной частицы Эйлер представил в форме  $2Mddx = Pdt^2$ ,  $2Mddy = Qdt^2$ ,  $2Mddz = Rdt^2$ , где  $M$  – масса частицы, а  $P$ ,  $Q$  и  $R$  – составляющие внешних сил. Наличие в левой части уравнений коэффициента 2 объясняется системой физических единиц, применявшейся тогда Эйлером (см. выше).

материальной точки была предложена в качестве самостоятельного "принципа" механики еще Маклореном в 1742 г. [29, § 466]. В 40-х годах XVIII века такая запись уравнений движения уже использовалась рядом ученых и, в частности, Иоганном Бернулли, Клеро, Даламбером и самим Эйлером. Однако никому до Эйлера не пришла в голову мысль о том, что эти дифференциальные уравнения, будучи выписаны для произвольного элемента среды (или тела), непосредственно приводят к математической формулировке всех задач механики. (Необходимость независимого привлечения также и закона момента количества движения была осознана Эйлером значительно позже.)

Первые результаты Эйлера по общей теории движения жидкости относятся, по видимому, к 1752 г. 31 августа этого года он доложил в Берлинской академии свое сочинение на латинском языке о законах движения жидкостей, которое позже направил для публикации в Петербург<sup>19</sup>, где оно, правда, увидело свет с большим запозданием [35]. Три его последующих фундаментальных сочинения по гидростатике и гидродинамике, относящихся к 1753–1755 гг., опубликованы на французском языке в 1757 г. в 11-м томе "Мемуаров" Берлинской академии<sup>20</sup>.

В первом из этих мемуаров – "Общие законы состояния равновесия" [2], – доложенном 11 октября 1753 г., Эйлер обобщил результаты Клеро и придал изложению гидро- и аэростатики ту форму, которая сохранилась в основном и до наших дней. Вначале он вводит понятие давления  $p$ , указывает на зависимость давления по крайней мере от плотности и температуры и дает затем вывод общего уравнения равновесия жидкостей и газов

$$dp = q(Pdx + Qdy + Rdz) \quad (5.2)$$

Величину  $p$  Эйлер называет иногда давлением (pression), но чаще упругостью (élasticité), поскольку именно упругость определяет давление в сжимаемой жидкости. Строго говоря, Эйлер определяет давление в жидкости через вес столба однородной жидкости (произвольной плотности  $\rho_0$ ), имеющего высоту  $p$ . Таким образом, давление у Эйлера измеряется величиной с размерностью длины – отношением действующего давления к некоторому постоянному объемному весу  $\gamma_0 = \rho_0 g$ . При этом под  $q$  понимается безразмерная плотность  $\rho/\rho_0$ , а компоненты массовых сил  $P$ ,  $Q$  и  $R$  также безразмерны, будучи отнесены к ускорению силы тяжести.

Затем Эйлер вводит понятие потенциала сил  $S$  и, переписав общее уравнение равновесия в виде  $dp = qdS$ , указывает на постоянство давления, плотности и температуры на поверхностях уровня. Потом он выводит общие зависимости применительно к случаю идеального газа, рассматривает действующие на погруженное тело силы и переходит к подробному рассмотрению различных случаев равновесия жидкостей и газов. Здесь он получает, в частности, известную барометрическую формулу для изотермической атмосферы и повторяет высказанное в "Гидродинамике" Бернулли предложение о целесообразности определения температуры пропорционально давлению газа при постоянном объеме.

Второй свой мемуар – "Общие законы движения жидкостей" [3]<sup>21</sup> – Эйлер доложил Берлинской академии 4 сентября 1755 г. Он начинает его с общей постановки задач теории движения идеальной жидкости. Затем из обычного для нашего времени рас-

<sup>19</sup> Находившийся в эти годы в Берлине, Эйлер писал сам в 1760 г. в Петербург: "Я до сих пор работал для императорской Академии не как отсутствующий член, но наверное так же много, как бы я состоял там налицо" [34, ч. 1, с. 162]. Документальным свидетельством тесного сотрудничества Эйлера с Петербургской Академией наук в период его жизни в Берлине являются три тома его переписки с представителями Академии, изданные в 1959–1976 гг. [34].

<sup>20</sup> Труды Берлинской академии печатались в середине XVIII века на французском языке – языке Прусского королевского двора.

<sup>21</sup> Сочинение это публикуется в этом выпуске журнала в переводе с французского на русский язык (см. с. 26–54), в связи с чем его разбор здесь сведен к минимуму.

смотрения элементарного жидкого параллелепипеда выводятся общие уравнения гидродинамики и уравнения неразрывности для сжимаемых жидкостей. Система уравнений гидродинамики получена Эйлером сразу в привычном нам виде (здесь она приводится в его обозначениях)

$$\begin{aligned}
 P - \frac{1}{q} \left( \frac{dp}{dx} \right) &= \left( \frac{du}{dt} \right) + u \left( \frac{du}{dx} \right) + v \left( \frac{du}{dy} \right) + w \left( \frac{du}{dz} \right) \\
 Q - \frac{1}{q} \left( \frac{dp}{dy} \right) &= \left( \frac{dv}{dt} \right) + u \left( \frac{dv}{dx} \right) + v \left( \frac{dv}{dz} \right) + w \left( \frac{dv}{dz} \right) \\
 R - \frac{1}{q} \left( \frac{dp}{dz} \right) &= \left( \frac{dw}{dt} \right) + u \left( \frac{dw}{dx} \right) + v \left( \frac{dw}{dy} \right) + w \left( \frac{dw}{dz} \right) \\
 \left( \frac{dq}{dt} \right) + \left( \frac{d \cdot qu}{dx} \right) + \left( \frac{d \cdot qv}{dy} \right) + \left( \frac{d \cdot qw}{dz} \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Несмотря на внешнее сходство с современной записью уравнений гидродинамики, уравнения Эйлера записаны им в безразмерной форме. Давление  $p$  измеряется здесь, как и в предыдущем мемуаре, отношением действующего давления к объемному весу  $\gamma_0 = \rho_0 g$  некоторой однородной жидкости,  $q = p/\rho_0$ , а компоненты массовых сил отнесены к ускорению силы тяжести. Незначительное внешнее отличие от сегодняшней записи уравнений заключается лишь в том, что Эйлер не пользуется еще введенными позже Лежандром (1752–1833) и Якоби (1804–1851) обозначениями для частных производных через  $\partial$ , помещая их в круглые скобки, и пишет  $d \cdot qu$ ,  $d \cdot qv$ ,  $d \cdot qw$  вместо  $d(qu)$ ,  $d(qv)$ ,  $d(qw)$ .

Эйлер добавляет тут же, что к этим четырем уравнениям следует добавить пятое, которое дает связь между давлением, плотностью и дополнительной физической величиной, которая влияет на давление и под которой подразумевается, вообще говоря, температура. Полученные в результате пять уравнений, говорит Эйлер, – "заключают в себе всю теорию движения жидкости" [3, § 21].

Вслед за приведенным выводом основных уравнений гидродинамики Эйлер вводит потенциалы сил  $S$  и скорости  $W$  и получает (§ 27 и 28) формулу

$$dp = q(dS - d\Pi - udu - vdv - wdw) \left[ \Pi = \frac{\partial W}{\partial t} \right] \tag{5.4}$$

и соответствующие интегралы для случая несжимаемой жидкости, а также для баротропных процессов – интегралы, носящие сегодня обычно название интегралов Лагранжа – Коши. Эйлер специально оговаривает здесь существование непотенциальных течений жидкости, приводя в качестве примера один случай вихревого вращения несжимаемой жидкости в отсутствие массовых сил. Заканчивается сочинение исследованием отдельных частных случаев движения жидкости и замечанием, что выведенные уравнения переводят задачи движения жидкости из области механики в область математического анализа [3, § 68].

При чтении этого сочинения особенно поражают (свойственные и большинству других работ Эйлера) ясность и простота изложения мыслей. Трудно порой поверить, что его отделяют от настоящего времени два с половиной века.

В последнем из серии гидродинамических мемуаров, опубликованных в 1757 г. [4], Эйлер продолжает попытки построить решения общих уравнений движения жидкости, получает ряд результатов для сжимаемых жидкостей и, в частности; подробно рассматривает интеграл Бернулли для линии тока, получая отсюда некоторые важные следствия.

Вслед за первыми тремя работами Эйлера по механике жидкости и газа последовали многие другие его сочинения, посвященные гидродинамике и теории распростра-



нения звука. Завершением и обобщением их явилась большая работа (516 страниц), относящаяся уже к концу 60-х годов и опубликованная в четырех частях в 1769–1772 гг. в "Новых комментариях" Петербургской Академии наук [36]. Первая ее часть включает рассмотрение общих свойств жидкостей и газов, вывод общих уравнений равновесия и исследования частных случаев равновесия в поле силы тяжести и центральных сил. Во второй части выведена система общих уравнений гидродинамики идеальной жидкости и рассмотрены подробнее случаи движения несжимаемых жидкостей, в том числе потенциального течения<sup>22</sup>. Последняя глава посвящена определению движения жидкости по заданному начальному состоянию. Здесь, в частности, выведены общие уравнения гидродинамики и в материальных переменных – так называемых переменных Лагранжа<sup>23</sup>. В третьей части работы Эйлер рассматривает течение в трубах постоянного и переменного сечения, подъем воды при помощи насосов и течения под действием разности температур. Последняя часть является обобщением многочисленных предыдущих исследований Эйлера по акустике и теории духовных музыкальных инструментов.

Таким образом, Эйлер заложил основы всей гидродинамики идеальной жидкости, за исключением сверхзвуковой аэродинамики и теории тепломассопереноса, зародившихся на столетие позже и развившейся уже в XX веке. Не обладая общим понятием напряжения<sup>24</sup>, Эйлер не смог, конечно, перейти к изучению более сложных моделей механики сплошной среды – вязкой жидкости и упругого тела. Однако им было подготовлено многое для дальнейшего развития механики сплошной среды.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bernoulli D.* Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii. Argentorati-Strasbourg, 1738. Рус. перев.: *Бернулли Д.* Гидродинамика, или записки о силах или движениях жидкости. Л.: Изд-во АН СССР, 1959. 551 с.
2. *Euler L.* Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides *Mém. Acad. sci. et belles lettres.* Berlin, 1757. Т. 11(1755). P. 217–273 = *Opera omnia.* Ser. II. V. 12. P. 2–53.
3. *Euler L.* Principes généraux du mouvement des fluides // *Mém. Acad. sci. et belles lettres.* Berlin, 1757. Т. 11(1755). P. 274–315 = *Opera omnia.* Ser. II. V. 12. P. 54–91.
4. *Euler L.* Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides // *Mém. Acad. Sci. et belles lettres.* Berlin, 1757. Т. 11(1755). P. 316–361 = *Opera omnia.* Ser. II. V. 12. P. 92–132.
5. *Toricelli E.* De motu gravium naturaliter descendantium et proietorum *Libri duo.* Florentiae, 1644 = *Opere.* V. 2. Faenza, 1919. См. раздел "De motu aquarum" (*Opere.* P. 185–197).
6. *Newton I.* Philosophiae naturalis principia mathematica. London, 1687 (2-е изд. Cambridge, 1713; 3-е изд. London, 1726). Критическое издание "Начал" Ньютона, с разночтениями по трем их прижизненным изданиям и сохранившимся рукописям, подготовлено А.В. Койре и И.Б. Коэнном. Cambridge: Univ. Press, 1972, 916 p.
7. *Stokes G.G.* On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids // *Trans. Cambridge Phil. Soc.* 1847. V. 8. Pt. 3. P. 287–319 = *Math. and Phys. Papers.* V. 1. Cambridge, 1880. P. 75–129.
8. *Bernoulli D.* Mémoire sur la nature et la cause des courans, et la meilleure manière de les observer et de les déterminer // *Recueil des pieces qui ont remporté les prix de l'Académie Royale des sciences depuis leur fondation.* Paris, 1769. Т. 7. P. 3–108.

<sup>22</sup> Ни здесь, ни в мемуарах Эйлера 50-х годов нет анализа так называемого парадокса Даламбера, заключающегося в отсутствии гидродинамического сопротивления тел в потенциальном потоке. По существу же этот парадокс был впервые обнаружен Эйлером еще при комментировании изданного им в 1745 г. немецкого перевода "Новых оснований артиллерии" Б. Робинса (1707–1751) [37], на что неоднократно обращали внимание позднейшие исследователи.

<sup>23</sup> Эти переменные были указаны Эйлером Л. Лагранжу (1736–1813) в его письме к нему от 1 января 1760 г., опубликованном Лагранжем в 1762 г. вместе со своими собственными, связанными с этими исследованиями.

<sup>24</sup> Общее понятие напряжения было введено О. Коши (1789–1857) в 1823 г.

9. *Bernoulli I.* Избранные сочинения по механике. М.; Л.: Гостехиздат, 1937. 94 с.
10. *Bernoulli D.* Exercitationes quaedam mathematicae. Venetiis, 1724. 96 p. = Werke. B. 1. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 295–362.
11. *Mikhailov G.K.* Early studies on the outflow of water from vessels and Daniel Bernoulli's *Exercitationes quaedam mathematicae* // Bernoulli D. Werke. B. 1. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 199–255.
12. *Михайлов Г.К.* Записные книжки Леонарда Эйлера в Архиве АН СССР // Историко-математические исследования. М.: Гостехиздат, 1957. Вып. 10. С. 67–94.
13. *Михайлов Г.К.* К переезду Леонарда Эйлера в Петербург // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 3. С. 10–37; *Mikhailov G.K.* Notizen über die unveröffentlichten Manuskripte von Leonhard Euler // Leonhard Euler. Berlin: Akademie-Verlag, 1959. P. 256–280.
14. *Bernoulli D.* Theoria nova de motu aquarum per canales quoscunque fluentium // Comm. Acad. Imper. scient. Petropolitanae. 1729. T. 2 (1727). P. 111–125.
15. *Euler L.* De effluxu aquae ex tubis cylindricis utcunque inclinatis et inflexis // Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР. Л.: Наука, 1965. Т. 2. С. 253–280. Рус. перев.: Об истечении воды из цилиндрических труб, произвольно наклоненных и изогнутых // Там же. С. 542–571.
16. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Физматгиз, 1987. 432 с.
17. *Mikhailov G.R.* Einleitung zum Briefwechsel Eulers mit Johann I Bernoulli: Hydraulik // Euler L. Opera omnia. Ser. IV-A. V. 2. Basel; Birkhäuser, 1998. P. 60–67.
18. *Mikhailov G.K.* Leonhard Euler und die Entwicklung der theoretischen Hydraulik im zweiten Viertel des 18. Jahrhunderts // Leonhard Euler, 1707–1783. Basel: Birkhäuser, 1983. P. 229–241.
19. Материалы для истории Императорской Академии наук. Т. I (1716–1730). СПб., 1885. 732 с.
20. Санкт-Петербургское отделение Архива Российской Академии наук. Разряд 1, опись 64, № 11.
21. Санкт-Петербургское отделение Архива Российской Академии наук. Фонд 1, опись 3, № 17, лл. 16–17.
22. Correspondance entre Daniel Bernoulli et Goldbach // Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle / Ed. P.H. Fuss. SPb., 1843. T. 2. P. 171–406.
23. *Truesdell C.* Essays in the history of mechanics. Berlin et al.: Springer, 1968. 383 p.
24. *Bernoulli D.* Experimenta coram Societate instituta in confirmationem theoriae pressionum quas latera canalis ab aqua transfluente sustinent // Comm. Acad. Imper. scient. Petropolitanae. 1735. T. 4 (1729). P. 194–201.
25. Lettres de Daniel Bernoulli à Leonard Euler // Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle / Ed. P.H. Fuss. SPb., 1843. T. 2. P. 407–655 (полное издание всей сохранившейся переписки Д. Бернулли с Л. Эйлером готовится в очередном томе "Полного собрания трудов" Эйлера, сер. IV-A, V. 3).
26. Der Briefwechsel Leonhard Eulers mit Johann I Bernoulli // Euler L. Opera omnia. Ser. IV-A. V. 2. P. 73–458.
27. *Bernoulli J.* Dissertatio hydraulica de motu aquarum per vasa aut per canales quancunque figuram habentes fluentium // Comm. Acad. Imper. scient. Petropolitanae. 1744. T. 9 (1737). P. 3–49; Dissertationis hydraulicae pars secunda continens methodum directam et universalem solvendi omnia problemata hydraulica, quaecunq; de aquis per canales cuiuscunque figurae fluentibus formari ac proponi possunt // Ibid. 1747. T. 10 (1738). P. 207–260.
28. *Bernoulli J.* Hydraulica. Nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentis pure mechanicis. Bernoulli J. Opera omnia, tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita. Lausannae & Genevae, 1742. T. 4. P. 387–488. (на самом деле "Полное собрание трудов" И. Бернулли вышло в свет в 1743 г.).
29. *Maclaurin C.* A treatise of fluxions. 2 vols. Edinburgh, 1742.
30. *d'Alembert J.* Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides, pour servir de suite au Traité de dynamique. Paris, 1744. XXXII + 458 p.
31. *d'Alembert J.* Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides. Paris, 1752. XLVI + 212 p.
32. *Truesdell C.* Rational fluid mechanics, 1687–1765 // Euler L. Opera omnia. Ser. II. V. 12. P. VII–CXXXV.
33. *Euler L.* Découverte d'un nouveau principe de mécanique // Mém. Acad. Sci. et belles lettres. Berlin, 1752. T. 6 (1750). P. 185–217 = Opera omnia. Ser. II. V. 5. P. 81–108.

34. Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers. 3 Bd. Berlin: Akademie-Verlag, 1959–1976.
35. Euler L. Principia motus fluidorum. Pars prior // Novi comm. Acad. Imper. Scient. Petropolitanae. 1761. T. 6. (1756–1757). P. 271–311 = Opera omnia. Ser. II. V. 12. P. 133–168.
36. Euler L. De statu aequilibrum fluidorum; de principiis motus fluidorum; de motu fluidorum lineari potissimum aquae; de motu aeris in tubis // Novi comm. Acad. Imper. scient. Petropolitanae, 1769–1772. T. 13 (1768) – 16 (1771) = Opera omnia. Ser. II. V. 13. P. 1–369.
37. Robins B. Neue Grundsätze der Artillerie enthaltend die Bestimmung der Gewalt des Pulvers nebst einer Untersuchung über den Unterscheid des Widerstands der Luft in schnellen und langsamen Bewegungen. Berlin, 1745. 720 p. = Opera omnia. Ser. II. V. 14. P. 1–409. Рус. перев.: Новые основания артиллерии // Эйлер Л. Исследования по баллистике. М.: Физматгиз, 1961. С. 7–452.

Москва

Поступила в редакцию  
17.VII.1999