МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1999

УДК 532.5.031

 ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ОБЩИЕ ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ[1]

1. Установив в моем предыдущем Мемуаре[2] законы равновесия жидкостей в самом общем виде как в отношении различных свойств жидкостей, так и сил, которые на них могут действовать, я предполагаю исследовать на том же самом основании движение жидкостей и установить общие законы, на которых зиждется вся наука о движении жидкостей. Нетрудно понять, что эта тема намного более трудна и включает исследования несравненно более глубокие. Тем не менее я все же надеюсь благополучно прийти к цели, причем если и останутся какие-нибудь трудности, то это будет не со стороны Механики, а только со стороны Анализа: эта наука пока еще не доведена до такой степени совершенства, которая была бы достаточна, чтобы получать аналитические уравнения (formules), содержащие в себе законы движения жидкостей.

2. Таким образом, речь идет о том, чтобы открыть законы, на основании которых можно определить движение жидкости, находящейся в произвольном состоянии под воздействием каких угодно сил. Для этой цели рассмотрим детально все объекты, которые составляют предмет наших исследований и которые включают величины как известные, так и неизвестные. Предположим сначала, что природа жидкости известна, но при этом нужно рассмотреть разные ее виды, ибо жидкость либо несжимаема, либо сжимаема. Если жидкость невосприимчива к сжатию, нужно различать два случая: один, когда вся масса состоит из однородных частей, так что плотность всюду остается всегда одной и той же, и другой случай, когда жидкость состоит из неоднородных частей; в этом последнем случае нужно знать плотность каждого рода частей и пропорцию смешения. Если жидкость сжимаема и ее плотность переменна, необходимо знать закон, согласно которому упругость (l'élasticité)[3] жидкости зависит от плотности; при этом упругость может зависеть только от плотности или дополнительно еще и от

---

[1] Читателю предлагается выполненный З.Н. Добровольской перевод с французского мемуара Л. Эйлера "Principes généraux du mouvement des fluides" (Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles lettres, Berlin, 1757. T. 11 (1755). P. 274–315 = Opera omnia, ser. II. V. 12. P. 54–91). Подлинной рукописи этого мемуара не сохранилось и поэтому неизвестно, писал ли его Эйлер первоначально, как обычно, по-латыни, или сразу по-французски. Во всяком случае французский язык мемуара сохраняет следы латинизмов.

Обстоятельный разбор публикуемой работы Эйлера дан К. Труселлом в предисловии к соответствующему тому "Полного собрания трудов" Эйлера (L. Euleri Opera omnia, ser. II. V. 12. P. LXXXIV–XCI). Некоторые общие историко-научные комментарии к работе Эйлера содержатся в статье Г.К. Михайлова (см. с. 8–25). Последующие подстрочные примечания принадлежат Г.К. Михайлову и Г.Ю. Степанову.

[2] *Euler L.* Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides // Mémoires de l'Académie des sciences et belles lettres, Berlin, 1757. T. 11 (1755). P. 217–273 = Opera omnia, ser. II. V. 12. P. 2–53.

[3] Под "упругостью" Эйлер понимает свойство жидкости, отражающееся в создании внутреннего давления, и употребляет поэтому далее этот термин наравне с термином "давление" (ср. ниже § 5).

какой-либо другой величины, например теплоты[4], которая свойственна каждой частице жидкости по крайней мере для каждого момента времени.

3. Нужно также предположить, что состояние жидкости известно в некоторый момент времени, и я буду называть это состояние начальным состоянием (l'état primitif) жидкости. Так как это состояние является как бы произвольным, в первую очередь необходимо знать расположение частиц, из которых состоит жидкость, и движение, которое в них заложено, если только в начальном состоянии жидкость не была в покое. При этом начальное движение не является полностью произвольным: как непрерывность, так и непроницаемость жидкости налагают некоторое ограничение, которое я изучу в дальнейшем. Однако часто о начальном состоянии ничего не известно, например, когда речь идет об определении движения реки; в этом случае исследование ограничивается для простоты нахождением стационарного состояния, к которому жидкость в конце концов придет, не подвергаясь новым изменениям. Итак, ни это обстоятельство, ни начальное состояние ничего не изменят в исследованиях, которые надо предпринять, и выкладки всегда останутся одинаковыми. Все это нужно будет принимать во внимание только при интегрированиях – при определении констант, появляющихся при каждом интегрировании.

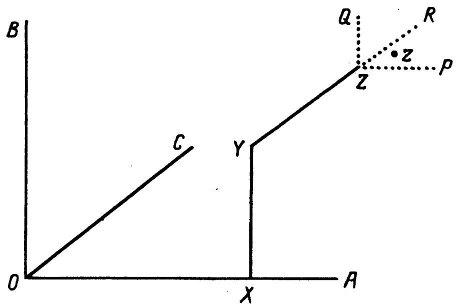
4. Наконец, среди заданных величин необходимо иметь внешние силы, воздействию которых подвергается жидкость: я называю здесь эти силы внешними, чтобы отличать их от внутренних сил, которыми частицы жидкости воздействуют друг на друга и которые составляют основной объект дальнейших исследований. Итак, можно предположить, что жидкость не подвержена воздействию никаких внешних сил или же подвержена воздействию только природной силы тяжести, которую повсюду считают постоянной по величине и действующей в одном и том же направлении. Но, для того чтобы придать исследованию бóльшую общность, я буду рассматривать жидкость, подверженную воздействию каких угодно сил, которые либо направлены к одному или нескольким центрам, либо подчиняются некоторому другому закону как в отношении их величины, так и их направления. Что касается этих сил, то исходно известно только их ускорительное действие безотносительно к массам, на которые они воздействуют. Таким образом, я введу в расчет только ускорительные силы, откуда будет легко получить истинные движущие силы, умножая в каждом случае ускорительные силы на массы, подверженные действию этих сил[5].

5. Перейдем теперь к объектам, которые содержат то, что неизвестно. Так, для того чтобы хорошо понять движение, в которое будет приведена жидкость, нужно определить в каждый момент и в каждом месте как движение, так и давление (pression) жидкости, которая там находится. А если жидкость сжимаема, нужно, кроме того, определить плотность, зная упомянутое выше другое свойство, которое вместе с плотностью позволяет определить упругость; последняя, будучи уравновешенной давлением, должна быть принята равной этому давлению точно так же, как в случае равновесия, где я разъяснил эти поднятия более тщательно[6]. Итак, мы видим, что число величин, входящих в задачу исследования движения, значительно больше, чем в случае равновесия, поскольку нужно ввести символы, которые обозначают движение каждой частицы, причем все эти величины могут меняться во времени. Следовательно, кроме символов, определяющих положение каждой точки, которую можно представить себе в жидкой массе, нужно ввести еще один, который обозначает время, уже

[4] Под "теплотой" подразумевается по существу температура.

[5] Ньютон различал в силе "ускорительную" и "движущую" ее величину: первая из них "есть мера, пропорциональная той скорости, которую она производит", а вторая "есть мера, пропорциональная количеству движения, которое ею производится в течение данного времени". Таким образом, "ускорительная сила" есть отношение действующей силы к массе частицы, на которую она действует, т.е. ускорение, которое она ей придает, а "движущая сила" есть то, что мы, собственно, и понимаем сейчас под силой.

[6] См. мемуар Эйлера, указанный в Примечании [2].



Фиг. 1

протекшее, и который в силу своей переменности может быть приписан каждому заданному времени.

6. Итак, пусть после начального состояния протекло время t (фиг. 1), и жидкость находится теперь к движении, которое нужно определить. Каково бы ни было пространство, занимаемое жидкостью в настоящий момент, я начну с рассмотрения некоторой точки Z, находящейся в жидкой массе. И для того чтобы ввести в расчет положение точки Z, я отнесу ее к трем неподвижным осям OA, OB и OC, взаимно перпендикулярным в точке O и имеющим заданное положение. Пусть две оси OA и OB находятся в плоскости, представляемой этим листом, а третья ось OC ей перпендикулярна. Из точки Z проведем перпендикуляр ZY к плоскости AOB, а из точки Y нормаль YX к оси OA, с тем чтобы получить три координаты $Ox = x$, $XY = y$ и $YZ = z$, параллельные нашим трем осям. Для каждой точки, содержащейся в жидкой массе, три координаты x, y и z будут иметь определенные значения, и если давать этим трем координатам последовательно все возможные значения, как положительные, так и отрицательные, то будут пройдены все точки бесконечного пространства и, стало быть, также и те, которые находятся в объеме, занимаемом жидкостью в каждый момент времени.

7. Кроме того, я рассматриваю ускорительные силы, которые действуют в данный момент на частицу, находящуюся в Z. Каковы бы ни были эти силы, их можно всегда свести к трем силам, которые действуют в трех направлениях ZP, ZQ и ZR, параллельных нашим трем осям OA, OB и OC. Примем за единицу ускорительную силу природной силы тяжести[7] и пусть P, Q, и R являются ускорительными силами, которые действуют на точку Z в направлениях ZP, ZQ и ZR, причем символы P, Q и R обозначают отвлечённые числа (nombres absolus)[8]. Если в одной и той же точке пространства Z действуют всегда одни и те же силы, величины P, Q и R будут представляться определенными функциями трех координат x, y и z; но в случае, когда силы меняются со временем t, эти функции будут содержать еще и время t. Итак, я считаю эти функции известными, поскольку действующие силы должны быть среди известных величин, зависят ли они только от переменных x, y, z или еще от времени t.

8. Пусть теперь r выражает теплоту в точке Z или же то другое свойство, которое помимо плотности оказывает влияние на упругость в случае сжимаемой жидкости. Величина r должна также рассматриваться как функция трех переменных x, y, z и времени t, поскольку может случиться, что она будет изменяться со временем в одной и той же точке Z пространства. Итак, эту функцию можно рассматривать как известную[9]. Далее, пусть в настоящий момент времени плотность частицы жидкости, находящейся в точке Z, равна q. При этом плотность некоторого однородного веще-

---

[7] Имеется в виду ускорение силы тяжести.

[8] Здесь подчеркнута безразмерность величин P, Q и R.

[9] Тем самым Эйлер ограничивается рассмотрением движения жидкости в заданном поле температур.

ства принята в качестве единицы плотности, которой я буду пользоваться, чтобы измерять давления высотами, как я это объяснял более пространного в моем Мемуаре о равновесии жидкостей[10]. Пусть также в настоящий момент времени давление жидкости в точке Z, выраженное через высоту, равно величине p, которая обозначает также и упругость. Поскольку природа жидкости предполагается известной, мы будем знать, в каком отношении высота p находится к величинам q и r[11]. Таким образом, величины p и q будут опять же функциями четырех переменных x, y, z и t, но неизвестными. В случае же, когда жидкость несжимаема, давление p не зависит от плотности q, а величина r вовсе не входит в рассмотрение.

9. Наконец, каким бы ни было движение, соответствующее в настоящий момент элементу жидкости, который находится в Z, оно может также быть разложено вдоль трех направлений ZP, ZQ и ZR, параллельных нашим трем слоям. Итак, пусть u, v, и w представляют скорости этого движения, разложенного по трем направлениям ZP, ZQ и ZR. При этом очевидно, что эти три величины должны также рассматриваться как функции четырех переменных x, y, z и t. Если свойства этих функций найдены и если считать, что время t постоянно, то в рамках изменения координат x, y и z будут известны три скорости u, v и w, а следовательно, истинное движение, которым каждый элемент жидкости переносится в настоящий момент времени. Если же координаты x, y и z считать постоянными и только время t переменным, то найдется движение не некоторого определенного элемента жидкости, а всех элементов, которые пройдут последовательно через ту же самую точку Z; другими словами, в каждый момент времени будет известно движение того элемента жидкости, который будет тогда находиться в точке Z.

10. Посмотрим теперь, какой путь опишет элемент жидкости, находящийся сейчас в точке Z, за бесконечно малое время dt или же в какой точке он окажется через некоторый промежуток времени[12]. Итак, если представить путь произведением скорости на время, элемент жидкости, находящийся в данный момент в Z, продвинется в направлении ZP на расстояние udt, в направлении ZQ на расстояние vdt и в направлении ZR на расстояние wdt. Поэтому, если мы положим $ZP = udt$, $ZQ = vdt$ и $ZR = wdt$ и достроим на этих трех ребрах параллелепипед, то угол, противолежащий точке Z, обозначит точку, в которой рассматриваемый элемент жидкости окажется спустя время dt, а диагональ этого параллелепипеда, равная $dt\sqrt{uu+vv+ww}$, даст истинный описанный путь[13]. Следовательно, скорость истинного движения будет равна $\sqrt{uu+vv+ww}$. Направление же легко определится через ребра параллелепипеда, так как скорость образует с плоскостями AOB, AOC и BOC углы, синусы которых равны

$$\frac{w}{\sqrt{uu+vv+ww}},\quad \frac{v}{\sqrt{uu+vv+ww}},\quad \frac{u}{\sqrt{uu+vv+ww}}$$

[10] Плотность q у Эйлера безразмерна, будучи отнесена к постоянной плотности ρ_0 некоторой вспомогательной жидкости: $q = \rho/\rho_0$. Давление в жидкости Эйлер определяет высотой p столба этой самой вспомогательной однородной жидкости. Таким образом, давление у Эйлера измеряется величиной с размерностью длины – отношением действующего давления к постоянной величине $\rho_0 g$ (где g – ускорение силы тяжести). Подробнее об этом написано в мемуаре Эйлера, указанном в Примечании [2].

[11] Т.е. предполагается известным "уравнение состояния" движущейся среды.

[12] Предложенный Эйлером наглядный вывод уравнений движения и неразрывности идеальной (невязкой и нетеплопроводной) сжимаемой жидкости справедлив при условии, что рассматриваемые функции имеют ограниченные производные до второй включительно. Современный вывод этих уравнений, основанный на интегральных законах сохранения массы и количества движения частиц жидкости и использующий формулу Гаусса – Остроградского, свободен от этого ограничения.

[13] Эйлер обычно не пользуется обозначением квадрата величин x через x^2, а пишет xx.

11. Определив движение жидкости, которая находится в данный момент в точке Z, изучим также движение некоторого другого, бесконечно близкого элемента, находящегося в точке z, которой соответствуют координаты $x + dx$, $y + dy$ и $z + dz$. Три скорости этого элемента вдоль направлений трех осей будут, следовательно, выражаться величинами u, v, w после того, как в них будут подставлены $x + dx$, $y + dy$ и $z + dz$, или же после того, как к ним будут добавлены их дифференциалы, в предположении постоянства времени t. При подстановке $x + dx$ вместо x приращения скоростей u, v и w составят[14]

$$dx\left(\frac{du}{dx}\right),\quad dx\left(\frac{dv}{dx}\right),\quad dx\left(\frac{dw}{dx}\right)$$

при подстановке $y + dy$ вместо y приращения составят

$$dy\left(\frac{du}{dy}\right),\quad dy\left(\frac{dv}{dy}\right),\quad dy\left(\frac{dw}{dy}\right)$$

и аналогично по отношению к изменению z. Тогда три скорости элемента жидкости, который сейчас находится в точке z, соответственно вдоль направлений OA, OB, OC будут иметь вид

$$u + dx\left(\frac{du}{dx}\right) + dy\left(\frac{du}{dy}\right) + dz\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$v + dx\left(\frac{dv}{dx}\right) + dy\left(\frac{dv}{dy}\right) + dz\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$w + dx\left(\frac{dw}{dx}\right) + dy\left(\frac{dw}{dy}\right) + dz\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

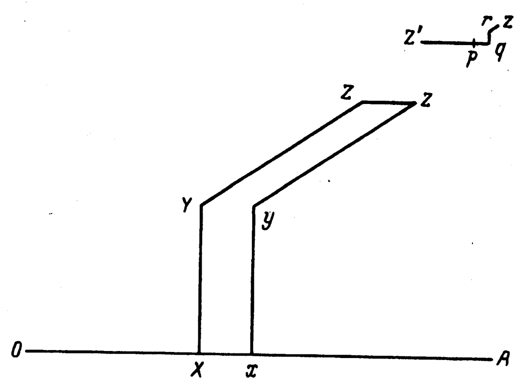
12. Эти выражения представляют собой скорости, соответствующие элементу жидкости в точке z, которая расположена бесконечно близко к точке Z и положение которой определяется тремя координатами $x + dx$, $y + dy$ и $z + dz$. Итак, если мы выберем точку z (фиг. 2) так, что только x изменится на dx, а две другие координаты y и z останутся такими же, как и у точки Z, то три скорости элемента жидкости, находящегося в этой точке z, будут иметь вид

$$u + dx\left(\frac{du}{dx}\right),\quad v + dx\left(\frac{dv}{dx}\right),\quad w + dz\left(\frac{dw}{dx}\right)$$

С этими скоростями рассматриваемый элемент жидкости будет перенесен за время dt в некоторую другую точку z', положение которой предстоит определить по отношению к точке Z', представляющей собой ту точку, в которую переносится за время dt элемент жидкости, находившийся в точке Z, положение которой было определено выше (§ 10). Для того чтобы определить точку z', я замечу, что если бы скорости точки z были в точности такими же, как и скорости точки Z, то точка z' попала бы в точку[15] p, так что отрезок $Z'p$ был бы равен и параллелен отрезку Zz. Поскольку же,

[14] Вместо привычного теперь обозначения частных производных с использованием символа ∂ Эйлер пользуется только символом d, но заключает выражения частных производных в круглые скобки.

[15] Эйлер сплошь и рядом использует одни и те же обозначения для различных величин. Так, символы p и q, используемые в статье в основном для обозначения давления и плотности, обозначают здесь и ниже некоторые вспомогательные точки.



Фиг. 2

согласно предположению, отрезок Zz параллелен оси OA и равен dx, отрезок $Z'p$ будет также равен dx и параллелен оси OA.

13. Теперь, поскольку скорость в направлении OA есть не u, а $u+dx\left(\frac{du}{dx}\right)$, это приращение скорости перенесет рассматриваемый элемент из p в q в направлении $Z'p$, так что

$$pq = dtdx\left(\frac{du}{dx}\right)$$

Следовательно, этот элемент был бы в q, если бы две другие скорости были равных v и w. Но, поскольку скорость в направлении оси OB равна

$$v + dx\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

это приращение перенесет наш элемент из q в r на расстояние

$$qr = dtdx\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

параллельно оси OB. Наконец, приращение $dx\left(\frac{dw}{dx}\right)$ скорости w перенесет элемент жидкости из r в z' на расстояние

$$rz' = dtdx\left(\frac{dw}{dx}\right)$$

параллельно третьей оси OC. Отсюда я заключаю, что элемент жидкости, занимавший маленький прямолинейный отрезок Zz, будет перенесен за время dt на отрезок $Z'z'$, бесконечно мало наклоненный к оси OA; длина его, в силу того что

$$Z'q = dx\left(1+dt\left(\frac{du}{dx}\right)\right)$$

будет равна

$$dx\sqrt{\left(\left(1+dt\left(\frac{du}{dx}\right)\right)^2 + dt^2\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + dt^3\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right)}$$

Следовательно, пренебрегая членами, содержащими квадрат dt, получим, что длина $Z'z'$ не будет отличаться от $Z'q$, а именно

$$Z'z' = dx\left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right)\right)$$

По поводу наклона этой оси к оси OA достаточно заметить, что он является бесконечно малой величиной первого порядка и может быть представлен как αdt.

14. Если бы малый отрезок Zz был выбран равным dy и параллельным оси OB, аналогичными рассуждениями можно было бы показать, что жидкость, занимавшая этот отрезок, перешла бы на другой отрезок

$$Z'z' = dy\left(1 + dt\left(\frac{dv}{dy}\right)\right)$$

наклон которого к оси OB также бесконечно мал. И, если принять отрезок Zz равным dz и параллельным третьей оси OC, то жидкость, его занимавшая, переместится на другой отрезок

$$Z'z' = dz\left(1 + dz\left(\frac{dw}{dz}\right)\right)$$

который будет наклонен к оси OC под бесконечно малым углом. Итак, если мы рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ZPQRzpqr$ (фиг. 3), образованный тремя ребрами

$$ZP = dx,\ \ ZQ = dy,\ \ ZR = dz$$

то жидкость занимавшая этот объем, за время dt переместится и заполнит объем $Z'P'Q'R'z'p'q'r'$, бесконечно мало отличающийся от прямоугольного параллелепипеда; три ребра последнего соответственно таковы

$$Z'P = dx\left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right)\right),\quad Z'Q' = dy\left(1 + dt\left(\frac{dv}{dy}\right)\right),\quad Z'R' = dz\left(1 + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right)$$

Поскольку ребра ZP, ZQ, ZR перейдут в $Z'P', Z'Q', Z'R'$, нет оснований сомневаться в том, что жидкость, содержащаяся в первом объеме, будет перенесена за время dt в указанный выше другой объем.

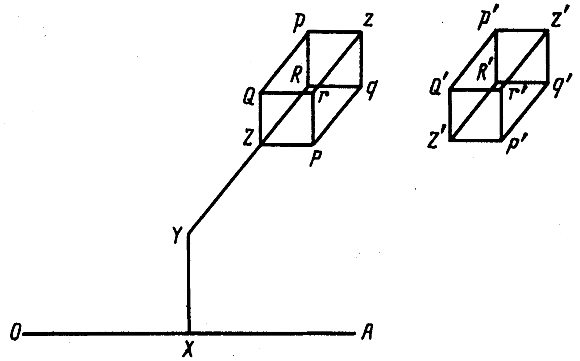
15. Теперь можно будет оценить, увеличится или уменьшится через время dt объем жидкости, занимавшей параллелепипед Zz – для этого нужно только найти объем или вместимость каждого из этих двух тел. Так как первое является прямоугольным параллелепипедом, образованным ребрами dx, dy, dz, его объем равен $dxdydz$; что касается другого, плоские углы которого бесконечно мало отличаются от прямого, замечу, что его объем находится аналогично перемножением трех ребер; ошибка, появляющаяся в результате бесконечно малого искажения углов, будет входить в члены, содержащие элемент времени dt в квадрате, вследствие чего этими членами можно пренебречь. Таким образом, объем $Z'z'$ будет представлен выражением

$$dxdydz\left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right) + dt\left(\frac{dv}{dy}\right) + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right)$$

Если же имеется какое-то сомнение по поводу справедливости этого заключения, можно почитать мое Сочинение на латинском языке "Законы движения жидкостей", где я рассчитал этот объем, ничем не пренебрегая[16].

---

[16] *Euler L.* Principia motus fluidorum // Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae, 1761. T. 6 (1756–1757). P. 271–311 = Opera omnia, ser. II. V. 12. P. 133–168.



Фиг. 3

16. Итак, если жидкость не подвержена сжатию, эти два объема должны быть равны между собой, поскольку масса, занимавшая объем Zz, не может вместиться ни в больший, ни в меньший объем. В связи с тем что я предполагаю рассмотреть этот вопрос со всей возможной общностью и я обозначил плотность в Z через q, причем q рассматривается как функция трех координат и времени, замечу, что для нахождения плотности в Z' нужно в первую очередь увеличить время t на его дифференциал dt, а величины x, y, z, вследствие того что положение точки Z' отличается от Z, должны быть увеличены на малые приращения udt, vdt, wdt. Тогда плотность в точке Z' составит

$$q+dt\left(\frac{dq}{dt}\right)+udt\left(\frac{dq}{dx}\right)+vdt\left(\frac{dq}{dy}\right)+wdt\left(\frac{dq}{dz}\right)$$

Поскольку же плотность обратно пропорциональна объему, эта величина будет относиться к q, как $dxdydz$ относится к

$$dxdydz\left(1+dt\left(\frac{du}{dx}\right)+dt\left(\frac{dv}{dy}\right)+dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right)$$

Следовательно, разделив на dt, получим следующее уравнение, к которому приводит рассмотрение плотности:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+u\left(\frac{dq}{dx}\right)+v\left(\frac{dq}{dy}\right)+w\left(\frac{dq}{dz}\right)+q\left(\frac{du}{dx}\right)+q\left(\frac{dv}{dy}\right)+q\left(\frac{dw}{dz}\right)=0$$

17. Итак, получено совершенно замечательное условие, которое уже установило некоторое соотношение между тремя скоростями u, v и w и плотностью жидкости q. Это уравнение может быть приведено к значительно более простому виду[17], ибо $u\left(\frac{dq}{dx}\right)$ не отличается от $\left(\frac{udq}{dx}\right)$, так как при таком способе выражения нужно понимать, что при дифференцировании q в качестве переменной принимается только величина x, и аналогично

$$q\left(\frac{du}{dx}\right)=\left(\frac{qdu}{dx}\right)$$

[17] В последующих рассуждениях Эйлера круглые скобки выходят за рамки простого обозначения частных производных, но смысл производимых действий остается прозрачным; в обозначениях Эйлера $d.qu = d(qu)$ и т.д.

Отсюда ясно, что

$$q\left(\frac{du}{dx}\right)+u\left(\frac{dq}{dx}\right)=\left(\frac{udq+qdu}{dx}\right)=\left(\frac{d.qu}{dx}\right)$$

причем дифференциал от произведения qu понимается так, что в качестве переменной рассматривается только величина x. Поэтому полученное нами уравнение сводится к следующему:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{d.qu}{dx}\right)+\left(\frac{d.qv}{dy}\right)+\left(\frac{d.qw}{dz}\right)=0$$

Если бы жидкость не была сжимаемой, плотность q была бы одинакова в Z и Z' и в этом случае получилось бы уравнение

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0$$

совпадающее с тем, на котором основано мое Сочинение на латинском языке, упомянутое выше[18].

18. Это уравнение, полученное при рассмотрении непрерывности жидкости, уже содержит некоторую зависимость, которая должна существовать между величинами u, v, w и q. Другие зависимости должны быть получены из рассмотрения сил, воздействию которых подвержена каждая частица жидкости. Итак, помимо ускорительных сил[19] P, Q, R, действующих на жидкость в Z, она подвержена также давлению (pression), которое действует со всех сторон на элемент жидкости, содержащейся в Z. Из совокупности этих двояких сил получаются три ускорительные силы, действующие в направлениях трех осей. А так как сами ускорения можно определить из рассмотрения скоростей u, v и w, мы получим отсюда три уравнения, которые вместе с только что выведенным уравнением будут содержать в себе все, что касается движения жидкости. Таким образом, мы получим при этом общие и полные законы всей науки о движении жидкостей.

19. Для нахождения ускорений, которым подвергается элемент жидкости в Z, нам нужно только сравнить скорости u, v, w, соответствующие в данный момент точке Z, со скоростями, которые соответствуют точке Z' по истечении времени dt. Происходит, следовательно, двоякое изменение: в отношении координат x, y, z, получающих приращения udt, vdt, wdt, и в отношении времени, которое увеличивается на dt. Отсюда следует, что три скорости в точке Z' соответственно в направлениях OA, OB и OC таковы

$$u+dt\left(\frac{du}{dt}\right)+udt\left(\frac{du}{dx}\right)+vdt\left(\frac{du}{dy}\right)+wdt\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$v+dt\left(\frac{dv}{dt}\right)+udt\left(\frac{dv}{dx}\right)+vdt\left(\frac{dv}{dy}\right)+wdt\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$w+dt\left(\frac{dw}{dt}\right)+udt\left(\frac{dw}{dx}\right)+vdt\left(\frac{dw}{dy}\right)+wdt\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

[18] См. сочинение, указанное в Примечании [16].

[19] О понятии "ускорительных" (массовых) сил см. Примечание [5].

Таким образом, ускорения, выраженные через приращения скоростей, поделенные на элемент времени dt, соответственно в направлениях OA, OB и OC будут иметь вид

$$\left(\frac{du}{dt}\right)+u\left(\frac{du}{dx}\right)+v\left(\frac{du}{dy}\right)+w\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)+u\left(\frac{dv}{dx}\right)+v\left(\frac{dv}{dy}\right)+w\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)+u\left(\frac{dw}{dx}\right)+v\left(\frac{dw}{dy}\right)+w\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

20. Найдем теперь ускорительные силы, действующие в тех же самых направлениях, обусловленные давлением жидкости на параллелепипед Zz, объем которого равен $dxdydz$, а, следовательно, масса жидкости, занимающей его, равна $qdxdydz$. Так как давление в точке Z выражается через высоту p, движущая сила, действующая на грань $ZQRp$, равна $pdydz$; для противоположной грани $zqrP$ площадью $dydz$ высота p увеличивается на свой дифференциал $dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$, получаемый в предположении переменности только координаты x. Следовательно, жидкая масса Zz толкается в направлении AO движущей силой

$$dxdydz\left(\frac{dp}{dx}\right)$$

или же ускорительной силой $\frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)$. Таким же образом получим, что жидкая масса Zz подвержена воздействию ускорительной силы $\frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right)$ в направлении BO и ускорительной силы $\frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right)$ в направлении CO. Добавим к этим силам заданные силы P, Q, R, и полные ускорительные силы в направлениях OA, OB и OC соответственно будут равны

$$P-\frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right),\quad Q-\frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right),\quad R-\frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right)$$

21. Итак, остается лишь приравнять эти ускорительные силы только что найденным действительным ускорениям и мы получим три следующих уравнения[20]:

$$P-\frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)=\left(\frac{du}{dt}\right)+u\left(\frac{du}{dx}\right)+v\left(\frac{du}{dy}\right)+w\left(\frac{du}{dz}\right)$$

---

[20] Несмотря на внешнее сходство с современной записью уравнений Эйлера, эти уравнения записаны здесь в безразмерной форме. Давление p измеряется отношением действующего давления к объемному весу $\gamma_0 = \rho_0 g$ некоторой вспомогательной однородной жидкости, плотность q безразмерна ($q = \rho/\rho_0$), компоненты массовых сил отнесены к ускорению силы тяжести g и переход от эйлеровых скоростей u, v, w и времени к реальным U, V, W, T производится преобразованиями вида $u \to U/\sqrt{g}$, $t \to T/\sqrt{g}$. (Подробнее о системе физических единиц у Эйлера см. выше в статье Г.К. Михайлова в этом же выпуске журнала, с. 8–25.)

$$Q-\frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right)=\left(\frac{dv}{dt}\right)+u\left(\frac{dv}{dx}\right)+v\left(\frac{dv}{dy}\right)+w\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$R-\frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right)=\left(\frac{dw}{dt}\right)+u\left(\frac{dw}{dx}\right)+v\left(\frac{dw}{dy}\right)+w\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

Если к этим трем уравнениям добавить в первую очередь то уравнение, которое было выведено из рассмотрения непрерывности жидкости, а именно

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{d.qu}{dx}\right)+\left(\frac{d.qv}{dy}\right)+\left(\frac{d.qw}{dz}\right)=0$$

а затем уравнение [состояния], которое дает соотношение между упругостью [давлением] p, плотностью q и некоторой другой величиной r, влияющей на упругость p помимо плотности q, то мы будем иметь пять уравнений, содержащих всю Теорию движения жидкостей.

22. Какой бы природы ни были силы P, Q, R, при условии, что они реальны, следует заметить, что выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ всегда является полным (réel) дифференциалом от некоторой конечной и определенной величины[21] в предположении переменности координат x, y и z. Таким образом, всегда будем иметь

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right),\quad \left(\frac{dP}{dz}\right)=\left(\frac{dR}{dx}\right),\quad \left(\frac{dQ}{dz}\right)=\left(\frac{dR}{dy}\right)$$

И если положить эту конечную величину равной S, то, предполагая время t постоянным, получим $dS = Pdx + Qdy + Rdz$ для случая, когда силы P, Q, R изменяются также со временем в одних и тех же точках. Величина S выражает то, что я называю напряженностью (l'effort) приложенных сил[22], и равна сумме интегралов от каждой силы, умноженной на элементарный отрезок в направлении этой силы или на то маленькое расстояние, на которое она протащила бы тело, подверженное ее действию. Это понятие напряженности в высшей степени важно для всей Теории как равновесия, так и движения, поскольку оно позволяет усмотреть, что сумма всех напряженностей всегда *максимальна* или *минимальна*. Это прекрасное свойство замечательно согласуется с превосходным принципом наименьшего действия, открытием которого мы обязаны нашему Знаменитому Президенту г-ну де Мопертюи[23].

23. Только что полученные уравнения содержат четыре переменные x, y, z и t, абсолютно независимые между собой, ввиду того что изменяемость первых распространяется на все элементы жидкости, а последней – на все времена. Поэтому, для того чтобы уравнения имели смысл, нужно, чтобы остальные переменные u, v, w, p и q представляли собой некоторые функции предыдущих. Хотя одно дифференциальное уравнение с двумя переменными[24] всегда разрешимо (possible), известно, что одно дифференциальное уравнение, содержащее три или больше переменных, разрешимо только при определенных условиях, в силу которых члены уравнения должны удовлетворять некоторому соотношению между ними. Итак, до того как можно будет начать решение этих уравнений, надо, следовательно, выяснить, какого рода функ-

[21] Эйлер полагает здесь реальные массовые силы имеющими потенциал (точнее говоря, силовую функцию). Под "конечными" величинами (функциями) Эйлер понимает величины, не содержащие дифференциалов.

[22] Эйлерово понятие "напряженность приложенных сил" эквивалентно нынешнему понятию потенциала сил.

[23] Мопертюи был в то время президентом Берлинской академии.

[24] Под переменными Эйлер понимает здесь как независимые переменные, так и их функции.

циями от x, y, z и t должны выражаться величины u, v, w, p и q, чтобы эти самые уравнения были разрешимы.

24. Умножим теперь первое из трех полученных уравнений на dx, второе на dy и третье на dx. Ввиду того что выражение

$$dx\left(\frac{dp}{dx}\right)+dy\left(\frac{dp}{dy}\right)+dz\left(\frac{dp}{dz}\right)$$

представляет собой дифференциал p, в предположении постоянства времени t мы получим

$$dS-\frac{dp}{q}=\begin{cases}+dx\left(\frac{du}{dt}\right)+udx\left(\frac{du}{dx}\right)+vdx\left(\frac{du}{dy}\right)+wdx\left(\frac{du}{dz}\right)\\ +dy\left(\frac{dv}{dt}\right)+udy\left(\frac{dv}{dx}\right)+vdy\left(\frac{dv}{dy}\right)+wdy\left(\frac{dv}{dz}\right)\\ +dz\left(\frac{dw}{dt}\right)+udz\left(\frac{dw}{dx}\right)+vdz\left(\frac{dw}{dy}\right)+wdz\left(\frac{dw}{dz}\right)\end{cases}$$

Речь идет о том, чтобы найти интеграл этого уравнения, в котором время принято постоянным. Следует заметить, что это одно уравнение содержит в себе три уравнения, из которых оно составлено, и что, как только оно будет удовлетворено, условия всех трех будут выполнены. Итак, если выражение[25] $dS - dp/q$ равно трем строчкам, где x, y и z переменные, часть выражения $dS - dp/q$, обусловленная только переменностью x и равная

$$Pdx-\frac{dx}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)$$

обязательно должна быть равна первой строчке и аналогично для двух других. Члены

$$\left(\frac{du}{dt}\right),\ \left(\frac{dv}{dt}\right),\ \left(\frac{dw}{dt}\right)$$

найденные в предположении переменности времени t, в силу того что они обозначают некоторые конечные функции, не препятствуют тому, чтобы время t могло быть принято теперь постоянным.

25. Представим себе, что это уравнение уже решено и величины u, v, w, q и p найдены как некоторые функции x, y, z и t. Подстановка этих функций в дифференциальное уравнение в предположении постоянства времени t дает тождество. Поскольку после этой подстановки мы будем иметь три вида членов – одни, связанные с dx, другие с dy и третьи с dz, – тождество приводит нас к трем уравнениям. Отсюда ясно, что хотя рассматривается только одно дифференциальное уравнение, оно на самом деле имеет силу трех и что оно определяет три из наших неизвестных. Ясно также, что дифференциальное уравнение с тремя переменными, такое, как $Ldx + Mdy + Ndz = 0$, разрешимо, если только имеет место некоторое соотношение между величинами L, M и N. Но так как теория решения таких дифференциальных уравнений с тремя переменными разработана очень слабо, мы не можем надеяться на то, что получим полное решение нашего уравнения, пока не будут значительно расширены границы Анализа.

26. В связи с этим наилучший выход – это хорошо поразмыслить над частными решениями нашего дифференциального уравнения, которые мы в состоянии дать;

---

[25] Для упрощения набора здесь и ниже иногда используется введенная лишь в XIX веке форма записи дробей через косую черту, не встречающаяся у Эйлера.

после этого можно будет судить о том пути, который нужно выбрать, чтобы прийти к полному решению. Я уже заметил[26], что в случае постоянной плотности q можно получить прекрасное решение, когда скорости u, v и w таковы, что дифференциальное выражение $udx + vdy + wdz$ допускает интегрирование. Предположим, что W представляет собой этот интеграл, являющийся некоторой функцией x, y, z и t, и тогда его дифференцирование с учетом переменности также и t, дает $dW = udx + vdy + wdz + \Pi dt$. Если это так, то величины u, v, w и Π будут связаны следующими соотношениями[27]:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)=\left(\frac{dv}{dx}\right),\quad \left(\frac{du}{dz}\right)=\left(\frac{dw}{dx}\right),\quad \left(\frac{du}{dt}\right)=\left(\frac{d\Pi}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)=\left(\frac{dw}{dy}\right),\quad \left(\frac{dv}{dt}\right)=\left(\frac{d\Pi}{dy}\right),\quad \left(\frac{dw}{dt}\right)=\left(\frac{d\Pi}{dz}\right)$$

27. Используя эти равенства, можно привести наше дифференциальное уравнение к следующему виду:

$$dS-\frac{dp}{q}=\begin{cases} +dx\left(\frac{d\Pi}{dx}\right)+udx\left(\frac{du}{dx}\right)+vdx\left(\frac{du}{dy}\right)+wdx\left(\frac{du}{dz}\right)\\ +dy\left(\frac{d\Pi}{dy}\right)+udy\left(\frac{dv}{dx}\right)+vdy\left(\frac{dv}{dy}\right)+wdy\left(\frac{dv}{dz}\right)\\ +dz\left(\frac{d\Pi}{dz}\right)+udz\left(\frac{dw}{dx}\right)+vdz\left(\frac{dw}{dy}\right)+wdz\left(\frac{dw}{dz}\right)\end{cases}$$

Так как здесь время t предполагается постоянным, мы будем иметь в рамках той же гипотезы

$$dx\left(\frac{d\Pi}{dx}\right)+dy\left(\frac{d\Pi}{dy}\right)+dz\left(\frac{d\Pi}{dz}\right)=d\Pi$$

$$dx\left(\frac{du}{dx}\right)+dy\left(\frac{du}{dy}\right)+dz\left(\frac{du}{dz}\right)=du$$

. . . .

Наше уравнение, таким образом, перейдет в следующее:

$$dS-\frac{dp}{q}=d\Pi+udu+vdv+wdw$$

или

$$dp=q(dS-d\Pi-udu-vdv-wdw)$$

Значит, если плотность жидкости всюду одна и та же, т.е. $q = g$, в результате интегрирования получим[28]

$$p=g\left(C+S-\Pi-\frac{1}{2}uu-\frac{1}{2}vv-\frac{1}{2}ww\right)$$

---

[26] См. § 60–67 статьи Эйлера, указанной в Примечании [16].

[27] Введенная Эйлером функция $W = W(x, y, z, t)$, по современной терминологии, есть потенциал скорости; приводимое здесь равенство перекрестных производных W по координатам (условие интегрируемости dW) есть условие отсутствия вихрей.

[28] Последующие формулы, обобщающие интеграл Бернулли, обычно связывают с именами Коши и Лагранжа.

28. Положим для краткости

$$C+S-\Pi-\frac{1}{2}uu-\frac{1}{2}vv-\frac{1}{2}ww=V$$

Следует заметить, что постоянная C здесь вполне может содержать время t, так как оно рассматривается в этом интегрировании как постоянное, и, поскольку $dp = qdV$, ясно, что гипотеза $dW = udx + vdy + wdz + \Pi dt$ делает наше дифференциальное уравнение также разрешимым, когда упругость p зависит произвольным образом только от плотности q или когда q является произвольной функцией p. Уравнение становится также разрешимым в случае, когда жидкость несжимаема, но плотность q меняется таким образом, что она представляет собой произвольную функцию величины V. И, вообще, если упругость p зависит как от плотности q, так и от некоторой другой величины, понимаемой под символом r, эта гипотеза может также удовлетворяться, если только r является функцией от V. И во всех упомянутых случаях, для того чтобы движение могло существовать при этой гипотезе, необходимо, кроме того, чтобы выполнялось условие

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{d.qu}{dx}\right)+\left(\frac{d.qv}{dy}\right)+\left(\frac{d.qw}{dz}\right)=0$$

29. Эта гипотеза является настолько общей, что, кажется, не существует ни одного случая, который бы не был ею охвачен, и, значит, формула $dp = qdV$ вместе с другими уравнениями, которые не представляют почти никаких трудностей, заключает в себе, вообще, все основы Теории движения жидкостей. Поэтому я поставил своей единственной целью рассмотрение именно этого случая в моем Сочинении на латинском языке, посвященном законам движения жидкостей[29], где были рассмотрены только несжимаемые жидкости; и я показал, что все рассмотренные до сих пор случаи, когда жидкость движется через произвольные трубки, содержатся в этом допущении и что скорости u, v и w при этом всегда таковы, что дифференциальное выражение $udx + vdy + wdz$ становится интегрируемым. Однако потом я заметил, что существуют также случаи, даже когда жидкость повсюду несжимаема и однородна, в которых это условие вовсе не имеет места. А этого нам достаточно, чтобы убедиться в том, что только что представленное мною решение является лишь частным.

30. Для того чтобы дать пример реального движения, которое бы полностью согласовывалось со всеми формулами, вытекающими из законов Механики, но без того, чтобы выражение $udx + vdy + wdz$ было интегрируемым, предположим, что жидкость повсюду несжимаема и однородна, т.е. что величина q постоянна и равна g, и что вовсе нет сил, которые действуют на жидкость, так что $P = 0$, $Q = 0$ и $R = 0$. Далее, пусть $w = 0$, $v = Zx$ и $u = -Zy$, где Z обозначает произвольную функцию от $\sqrt{xx+yy}$; тогда очевидно, что выражение $udx + vdy + wdz$, принимающее вид $-Zydx + Zxdy$, интегрируемо только в случае

$$Z=\frac{1}{xx+yy}$$

Однако принятые значения [u, v и w] удовлетворяют всем нашим формулам и, следовательно, мы не можем сомневаться в возможности такого движения. Поскольку величина Z является функцией от $\sqrt{xx+yy}$, ее дифференциал будет иметь вид $dZ = Lxdx + Lydy$, где L будет еще одной функцией от $\sqrt{xx+yy}$.

[29] См. сочинение, указанное в Примечании [16].

31. Используя величины u, v и w, мы получим

$$\left(\frac{du}{dt}\right)=0,\ \left(\frac{du}{dx}\right)=-Lxy,\ \left(\frac{du}{dt}\right)\ =-Z-Lyy,\ \left(\frac{du}{dz}\right)=0$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)=0,\ \left(\frac{dv}{dx}\right)=Z+Lxx,\ \left(\frac{dv}{dy}\right)\ =+Lxy,\ \left(\frac{dv}{dz}\right)=0$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)=0,\ \left(\frac{dw}{dx}\right)=0,\ \left(\frac{dw}{dy}\right)=0,\ \left(\frac{dw}{dz}\right)=0$$

и в силу того что $dS = 0$ будем иметь следующее дифференциальное уравнение в предположении постоянства времени t:

$$-\frac{dp}{g}=\left\{\begin{matrix}+LZxyydx-ZZxdx-LZxyydx\\ -ZZydy-LZxxydy+LZxxydy\end{matrix}\right\}=-ZZ(xdx+ydy)$$

Следовательно, $dp = gZZ(xdx + ydy)$ и, поскольку Z предполагается функцией от $\sqrt{xx+yy}$, это уравнение, безусловно, будет разрешимым и даст в качестве интеграла выражение

$$p=g\int ZZ(xdx+ydy)$$

Понятно, что дифференциальное уравнение стало бы разрешимым даже в случае, когда жидкость подвержена воздействию произвольных сил P, Q, R, лишь бы выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ было полным (posssible) дифференциалом dS, ибо тогда

$$p=gS+g\int ZZ(xdx+ydy)$$

32. Так как значения $u = -Zy$, $v = Zx$ и $w = 0$ удовлетворяют нашему дифференциальному уравнению, понятно, что они удовлетворяют также условию, содержащемуся в уравнении[30]

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{d.qu}{dx}\right)+\left(\frac{d.qv}{dy}\right)+\left(\frac{d.qw}{dz}\right)=0$$

В силу того что $q = g$, это уравнение переходит в $-gLxy + gLxy = 0$, которое, являясь тождеством, удовлетворяет требуемым условиям. Таким образом, вполне возможно, что жидкость имеет такое движение, при котором скорости каждого ее элемента $u = -Zy$, $v = Zx$ и $w = 0$, хотя дифференциальное выражение $udx + vdy + wdz$ не является разрешимым [полным дифференциалом]; это подтверждает тот факт, что существуют случаи, когда движение жидкости возможно, а указанное условие, которое казалось общим, не имеет места. Таким образом, предположение о разрешимости дифференциального выражения $udx + vdy + wdz$ дает только частное решение найденных нами уравнений.

33. Очевидно, что движение, соответствующее рассмотренному случаю, сводится к вращательному движению вокруг оси OC. Поскольку то, что сказано об оси OC, можно приложить к любой другой фиксированной оси, мы делаем заключение о возможности того, что жидкость, подверженная воздействию любых сил, напряженность[31] которых есть S, может совершать такое движение вокруг фиксированной оси, при

[30] Строго говоря, нельзя утверждать, что принятые в § 30 значения u, v и w удовлетворяют также уравнению движения из § 31; в действительности это уравнение определяет соответствующее давление $p = p(s)$ $(S=\sqrt{xx+yy})$. Уравнение неразрывности выполняется при этом независимо от уравнений движения.

[31] См. Примечание [22].

котором скорости вращения пропорциональны некоторой функции, зависящей от расстояния до этой оси. Таким образом, если расстояние до этой оси обозначить через s, а скорость вращения на этом расстоянии через[32] ψ, то, в силу того что $xx + yy = ss$ и $Zss = \psi\psi$, давление там будет выражаться высотой

$$p = gS + g\int \frac{\psi\psi ds}{s}$$

Значит, движение, представляющее собой вихрь (tourbillon), в равной степени возможно, как и те движения, которые содержатся в выражении $udx + \upsilon dy + wdz$, когда последнее интегрируемо. Без сомнения, существует еще бесконечное число других движений, которые, удовлетворяя нашим формулам, также в равной степени возможны.

34. Вернемся к нашим общим формулам и, поскольку они довольно сложны, введем для краткости обозначения

$$\left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + \nu\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) = X$$

$$\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) + u\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right) + \nu\left(\frac{d\upsilon}{dy}\right) + w\left(\frac{d\upsilon}{dz}\right) = Y$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right) + \nu\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) = Z$$

Какой бы природы ни были три ускорительные силы P, Q и R, вследствие того что[33] $dS = Pdx + Qdy + Rdz$, необходимо, чтобы удовлетворялось дифференциальное уравнение

$$\frac{dp}{q} = (P - X)dx + (Q - Y)dy + (R - Z)dz$$

в котором t предполагается постоянным. Кроме того, существует уравнение непрерывности жидкости, которое имеет вид

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.q\upsilon}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0$$

Каким бы образом ни были удовлетворены эти два уравнения, всегда будет существовать движение, которое может действительно иметь место в жидкости.

35. Когда жидкость повсюду несжимаема и однородна, т.е. плотность q постоянна и равна g, очевидно, что дифференциальное уравнение не может иметь места, если дифференциал

$$(P - X)dx + (D - Y)dy + (R - Z)dz$$

не является разрешимым, или полным, т.е. если он не может быть получен в результате реального дифференцирования некоторой конечной функции переменных x, y, z, которая может содержать также и время t, хотя последнее предполагается при дифференцировании постоянным. Очевидно также, что это дифференциальное выражение должно быть разрешимым, или полным, когда жидкость сжимаема и плотность q выражена через некоторую функцию упругости p. Как в том, так и в другом случае, если

---

[32] Эйлер обозначает эту величину астрономическим символом созвездия Тельца ♉. Здесь это обозначение заменено по техническим соображениям на ψ.

[33] Эйлер предполагает здесь, что все реальные массовые силы имеют потенциал $S = S(x, y, z)$.

обозначить через V конечную величину, дифференциал которой имеет вид

$$dV = (P - X)\,dx + (Q - Y)\,dy + (R - Z)\,dz$$

наше дифференциальное уравнение даст либо $p/g = V$, либо

$$\int \frac{dp}{q} = V$$

Однако, для того чтобы движение было возможно, необходимо, чтобы помимо этого выполнялось и другое условие, вытекающее из непрерывности.

36. Если жидкость несжимаема, но ее плотность q переменна и выражается некоторой функцией положения, т.е. трех координат x, y, z и времени t, то недостаточно, чтобы выражение

$$(P - X)\,dx + (Q - Y)\,dy + (R - Z)\,dz = dV$$

было интегрируемым; кроме этого, нужно, чтобы интеграл V был функцией q. Так как $dp/q = dV$, или $dp = qdV$, ясно, что давление p не может иметь определенного значения, если выражение qdV неинтегрируемо. Более того, я замечу, что в этом случае не обязательно, чтобы выражение

$$(P - X)\,dx + (Q - Y)\,dy + (R - Z)dz$$

было интегрируемым, лишь бы оно было таково, чтобы при умножении на некоторую функцию U становилось интегрируемым. Итак, пусть

$$U\,(P - X)\,dx + U\,(Q - Y)\,dy + U\,(R - Z)\,dz = dW$$

поскольку $dp\,/\,q = dW\,/\,U$, или $dp = qdW\,/\,U$, для разрешимости этого уравнения достаточно, чтобы W было функцией q/U или чтобы W было функцией, содержащей величины q и V в нулевой степени[34].

37. Вообще, как бы упругость p ни зависела как от плотности q, так и от некоторого другого свойства, обозначаемого через r и являющегося произвольной функцией координат x, y, z, которая может содержать также и время t, из нашего уравнения $q = dp/dV$ ясно, что дифференциал dp должен всегда делиться на dV, где dV обозначает не полный дифференциал, а выражение $(P - X)\,dx + (Q - Y)\,dy + (R - Z)\,dz$; и это вследствие того, что в результате деления дифференциалы dx, dy и dz вовсе уходят из вычислений, потому что как p, так и q должны всегда выражаться через конечные функции переменных x, y и z, в то время как их дифференциалы не входят в эти функции. Но этого бы не произошло, если бы не существовала некоторая функция U, умножение на которую выражения dV делает это произведение интегрируемым. Положим, что этот интеграл имеет вид $\int UdV = W$; ясно, что при этом p должно быть функцией W, чтобы выражение dp/dV получило определенное значение, которое соответствует плотности q.

38. Поскольку $UdV = dW$, имеем $q = Udp/dW$. Следовательно, если в качестве W принять произвольную функцию координат x, y и z, содержащую время t среди постоянных величин, и если положить p равным произвольной функции от W, а именно[35]

$$p = \varphi(W) \text{ и } dp = dW\varphi'(W),$$

будем иметь $q = U\varphi'(W)$, откуда $U = q/\varphi'(W)$. Стало быть, каким бы образом плотность q ни была задана через упругость p и некоторую другую функцию r, зависящую

[34] Последнее выражение эквивалентно, в терминологии XVIII века, условию зависимости W только от отношения q/U.

[35] Для представления функциональной зависимости $f(x)$ Эйлер использует обозначения f, x и $f{:}x$. Для удобства читателей эйлеровы обозначения заменены всюду на современное $f(x)$.

от координат x, y и z, мы получим значение $U = q/\varphi'(W)$ и, следовательно, значение $dV = dW\varphi'(W)/q$, которое нам даст затем следующее уравнение:

$$(P-X)\,dx+(Q-Y)\,dy+(R-Z)\,dz=\frac{dW\varphi'(W)}{q}=\frac{dp}{q}$$

Отсюда будут получены значения X, Y, Z, по которым затем нужно искать значения скоростей u, v и w, а когда эти последние будут удовлетворять, кроме того, условию непрерывности, мы будем иметь случай возможного движения жидкости.

39. Вот, следовательно, к чему сводится вопрос о природе выражения $(P-X)\,dx + (Q-Y)\,dy + (R-Z)\,dz$. Когда плотность q постоянна или же зависит только от упругого p, нужно, чтобы это выражение было абсолютно интегрируемым, а для этого необходимо определить надлежащие значения трех скоростей u, v и w. Когда же плотность q представлена заданной функцией места и времени, это выражение должно быть таково, чтобы стать интегрируемым при умножении его на некоторую заданную функцию U. Следовательно, как в первом, так и во втором случае скорости u, v и w должны быть таковы, чтобы уравнение

$$(P-X)\,dx+(Q-Y)\,dy+(R-Z)\,dz=0$$

стало разрешимым; а мы знаем условия, при которых дифференциальное уравнение с тремя неизвестными становится разрешимым. При удовлетворении этого условия нужно еще удовлетворить условию, которое налагается непрерывностью.

40. Выше речь шла об условиях, которыми должны быть ограничены функции, выражающие три скорости u, v и w, и все исследование о движении жидкостей сводится к тому, чтобы определить в общем виде природу этих функций, которые бы удовлетворяли условиям нашего дифференциального уравнения и непрерывности. Поскольку же величины X, Y и Z зависят не только от самих скоростей u, v и w, но также и от их изменяемости по отношению к каждой из координат u, y и z и еще ко времени t, это исследование представляется самым глубоким среди тех, которые могут встретиться в Анализе. И если нам не дано в совершенстве познать движение жидкостей, причину тому надо приписать не Механике и недостаточности известных законов движения; сам Анализ покидает нас здесь, поскольку вся Теория движения жидкостей только что была сведена к решению аналитических уравнений.

41. Так как получение общего решения должно быть признано невозможным из-за недостаточности Анализа, мы должны довольствоваться рассмотрением некоторых частных случаев; тем более что изучение нескольких случаев кажется нам единственной возможностью прийти, наконец, к более совершенному познанию предмета. Итак, наипростейшим случаем, который можно себе представить, несомненно, является тот, когда три скорости u, v и w полагаются равными нулю; это случай, в котором жидкость остается в совершенном покое и который я исследовал в моем предыдущем Мемуаре. А формулы, найденные нами для движения в общем случае, содержат также и случай равновесия. Ибо при $X = 0$, $Y = 0$ и $Z = 0$ мы имеем

$$\frac{dp}{q}=Pdx+Qdy+Rdz,\quad \left(\frac{dq}{dt}\right)=0$$

откуда видно прежде всего, что плотность q не может зависеть от времени t, т.е. что она должна оставаться всегда одной и той же в том же самом месте. Далее, силы P, Q, R должны быть таковы, чтобы дифференциальное выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ было либо интегрируемым, когда q постоянно, либо зависело только от упругости p, либо становилось интегрируемым после умножения на некоторую функцию.

42. В моем Мемуаре о равновесии жидкостей были рассмотрены только случаи побуждающих сил P, Q, R, когда дифференциальное выражение $Pdx + Qdy + Rdz$

становится интегрируемым, так как этой случай кажется единственным, который может иметь место в Природе. В действительности, если плотность q либо постоянна, либо зависит только от давления p, жидкость никогда не может быть в равновесии, если это условие для побуждающих сил не имеет места. Однако в случае, который был возможен при побуждающих силах, подчиняющихся некоторому другому закону, равновесие было возможно при условии, что силы таковы, что существует некоторая функция U, которая после умножения на нее выражения $Pdx + Qdy + Rdz$ делает его интегрируемым, или же когда дифференциальное уравнение $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ становится интегрируемым. В случае, когда плотность q выражается через эту функцию U или же через произведение этой функции U на некоторую произвольную функцию от упругости p, равновесие может также иметь место. Но так как такие случаи, может быть, невозможны, я не останавливаюсь на их рассмотрении более подробно.

43. После случая равновесия простейшим состоянием, которое может существовать в жидкости, является такое, при котором вся жидкость целиком переносится равномерным движением в одном и том же направлении. Посмотрим теперь, каким образом это состояние описывается нашими двумя формулами. Так как в рассматриваемом случае три скорости постоянны, положим $u = a$, $v = b$ и $w = c$; мы имеем также $X = 0$, $Y = 0$ и $Z = 0$. При этом наши два уравнения переходят в следующие:

$$\frac{dp}{q} = Pdx + Qdy + Rdz$$

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + a\left(\frac{dq}{dx}\right) + b\left(\frac{dq}{dy}\right) + c\left(\frac{dq}{dz}\right) = 0$$

Отсюда ясно, что, если плотность q постоянна, условие второго уравнения выполняется, но первое уравнение не может удовлетворяться, если только выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ не допускает интегрирования, точно так, как если бы жидкость была в покое. Естественно, что такое движение не может ничего изменить в давлении.

44. Но если плотность q не постоянна, посмотрим прежде всего, какой функцией от x, y, z и t она должна выражаться, чтобы удовлетворялось второе уравнение. И вот возникает достаточно любопытный аналитический вопрос, в котором спрашивается, какая функция переменных x, y, z и t должна быть принята для q, чтобы имело место соотношение

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + a\left(\frac{dq}{dx}\right) + b\left(\frac{dq}{dy}\right) + c\left(\frac{dq}{dz}\right) = 0$$

Решение этого вопроса представляется достаточно трудным, если рассматривать его во всей возможной общности. Но в случае $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ величина q будет произвольной функцией x, y, z, не содержащей времени t. Если мы сведем этот случай к случаю покоя, сообщая пространству движение, равное и противоположно направленное, то очевидно, что через время t координаты x, y и z трансформируются в результате изменения в $x - at$, $y - bt$, $z - ct$, откуда мы заключаем, что наше уравнение будет выполняться, если в качестве q принять произвольную функцию трех величин $x - at$, $y - bt$, $z - ct$. И действительно, легко убедиться, что такая функция удовлетворяет уравнению, поскольку

$$dq = L(dx - adt) + M(dy - bdt) + N(dz - cdt)$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) = -aL - bM - cN, \quad \left(\frac{dq}{dx}\right) = L, \quad \left(\frac{dq}{dy}\right) = M, \quad \left(\frac{dq}{dz}\right) = N$$

45. Итак, для того чтобы удовлетворить первому уравнению, нужно, как я уже заметил, чтобы дифференциальное выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ после умножения его на некоторую функцию U становилось интегрируемым. Пусть, следовательно,

$$\int U(Pdx + Qdy + Rdz) = W$$

где постоянная, появляющаяся в результате интегрирования, содержит также произвольным образом время t; тогда ясно, что выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ будет также интегрируемым, если его умножить на $Uf(W)$, где U и W – известные функции, поскольку действующие силы предполагаются известными. Если q вовсе не зависит от p, нужно, чтобы q представлялось в виде $Uf(W)$; поэтому мы должны определить функцию трех величин $x - at$, $y - bt$ и $z - ct$, которая бы приводилась к виду $Uf(W)$. Если же q зависит только от p, нужно, чтобы выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ было абсолютно интегрируемым или же было принято $U = 1$; тогда, поскольку p будет найдено в виде функции от W, плотность q будет также функцией от W, которая опять же должна быть функцией величин $x - at$, $y - bt$, $z - ct$; отсюда мы и выведем природу этой функции.

46. Но мы видим, что в общем случае давление p должно быть всегда функцией от W, поскольку иначе плотность q не могла бы быть конечной функцией. Стало быть, пусть $p = f(W)$ и $dp = f'(W)$; тогда, в силу того что

$$Pdx + Qdy + Rdz = \frac{dW}{U}$$

получим $q = Uf'(W)$. Следовательно, этот случай не мог бы осуществляться, если бы плотность q не была пропорциональна произведению величины U на функцию от давления p или же произведению величины $U\varphi(W)$ на произвольную функцию от p, где через $\varphi(W)$ обозначена заданная функция от W. Пусть, например

$$q = ppU\varphi(W)$$

тогда будем иметь

$$f'(W) = \frac{df(W)}{dW} = f(W)^2\varphi(W)$$

откуда найдем, что неизвестная функция $f(W)$ оставлена из W. В данном примере имеем

$$\frac{1}{f(W)} = -\int dW\varphi(W) = \frac{1}{p}$$

и отсюда p будет выражено через W, а следовательно, величина q будет также известна. Если она будет приводиться к виду функции от $x - at$, $y - bt$, $z - ct$, предполагаемое состояние жидкости будет возможным и мы будем знать давление и плотность жидкости в любой момент времени и в любом месте.

47. Пример лучше разъяснит эти рассуждения[36], которые, ввиду того что мы еще недостаточно освоили их, могли бы показаться слишком непонятными. Итак, пусть $P = y$, $Q = -x$ и $R = 0$; так как

$$\frac{dp}{q} = ydx - xdy$$

[36] В этом примере рассматриваются силы, не имеющие потенциала, и находится для них интегрирующий множитель U.

мы получим

$$U=\frac{1}{yy},\quad W=\frac{x}{y}+T$$

где T представляет произвольную функцию времени t. Пусть, сверх того, $q = pp/yy$; поскольку $dp/pp = (ydx - xdy)/yy$,
мы получим

$$\frac{1}{p}=\Theta-\frac{x}{y},\quad p=\frac{y}{\Theta y-x}$$

где постоянная Θ содержит также время t. В результате мы будем иметь

$$q=\frac{1}{(\Theta y-x)^2}$$

причем это выражение должно быть функцией от $x - at$ и $y - bt$, поскольку z не входит в него, а это возможно только при $\Theta = a/b$; тогда будем иметь

$$q=\frac{bb}{(ay-bx)^2},\quad p=\frac{by}{ay-bx}$$

Таким образом, ни давление, ни плотность вовсе не зависят от времени и будут постоянно одними и теми же в данном месте. Этот пример показывает, как нужно проводить выкладки в других случаях, которые хотелось бы себе представить.

48. Рассмотрев предыдущий случай, где три скорости были постоянными, предположим теперь, что две скорости v и w равны нулю, что соответствует случаю, когда все частицы жидкости движутся в направлении оси OA, так что траектория, описываемая каждой частицей, представляет собой прямую линию[37], параллельную оси OA; этот случай отличается от предыдущего, так как скорость u считается переменной как по отношению к месту, так и ко времени. Ввиду того что

$$X=\left(\frac{du}{dt}\right)+u\left(\frac{du}{dx}\right),\quad Y=0,\quad Z=0$$

наши два уравнения примут вид

$$\frac{dp}{q}=Pdx+Qdy+Rdz-dx\left(\frac{du}{dt}\right)-udx\left(\frac{du}{dx}\right)$$

и

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{d.qu}{dx}\right)=0$$

Последнее уравнение позволяет нам прежде всего понять, что выражение $qdx - qudt$ должно быть интегрируемым, причем величины y и z считаются при этом интегрировании постоянными; следовательно, необходимо, чтобы произведение q на $dx - udt$ представляло собой полный дифференциал, т.е. было интегрируемым.

49. Если плотность жидкости всюду и всегда одна и та же, т.е. q равно постоянной величине g, то, поскольку $\left(\frac{du}{dx}\right)=0$, ясно, что скорость u не должна зависеть от пе-

[37] Это случай так называемого сдвигового течения.

ременной x. Пусть u является произвольной функцией двух других координат y, z и времени t; при этом дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{dp}{q} = Pdx + Qdy + Rdz - dx\left(\frac{du}{dt}\right)$$

где время t предполагается постоянным; стало быть, нужно, чтобы это выражение было интегрируемым. Следовательно, если выражение $Pdx + Qdy + Rdz$, полученное из рассмотрения действующих сил, интегрируемо само по себе, необходимо, чтобы $dx\left(\frac{du}{dt}\right)$ было также интегрируемым. Выражение $\left(\frac{du}{dt}\right)$ не содержит x, но, если бы в нем присутствовали y и z, выражение $dx\left(\frac{du}{dt}\right)$ не могло бы быть интегрируемым; поэтому необходимо, чтобы $\left(\frac{du}{dt}\right)$ вовсе не содержало y и z. Пусть Z – произвольная функция y и z, а T – произвольная функция только времени t; тогда величина $u = Z + T$ будет удовлетворять этому условию, откуда, в силу того что $Pdx + Qdy + Rdz = dV$ и

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{dT}{dt}\right)$$

получим следующий интеграл:

$$\frac{p}{q} = V - x\left(\frac{dT}{dt}\right) + \text{const}$$

50. Для того чтобы лучше понять этот случай, заметим, что каждая частица Z совершает движение только в направлении ZP, параллельном оси ZA, и поэтому каждый элемент жидкости опишет в своем движении прямую линию, параллельную этой оси, так что для одного и того же элемента две координаты y и z вовсе не меняют свои значения. Следовательно, движение каждой частицы будет либо равномерным, либо изменяющимся со временем таким образом, что все частицы будут подвержены в каждый момент времени одинаковым изменениям в их движениях, что очевидно благодаря формуле $u = Z + T$. Состояние давления описывается при этом формулой

$$p = gV - gx\left(\frac{dT}{dt}\right) + \text{const}$$

где постоянная может произвольным образом содержать время t; давление зависит не только от напряженности[38] сил V, но еще и от изменения скорости, которому подвержен каждый элемент жидкости, и, кроме того, оно может меняться произвольным образом со временем.

51. Этот случай дает мне возможность разрешить некоторые сомнения, которые, естественно, должны возникать и разъяснение которых будет очень важно в Теории как равновесия, так и движения жидкостей. Прежде всего мы будем удивлены тому, что изменение скорости жидкости может иметь место, когда побуждающие силы P, Q, R не содействуют возникновению этого изменения. Поскольку видно, что это предполагаемое изменение могло бы существовать даже при исчезновении побуждающих сил, то резонно возникает вопрос, какая же причина вызывает это изменение? Далее, кажется также парадоксальным, что давление может изменяться в каждый момент времени произвольным образом и это независимо от упомянутого изменения, которому

[38] См. Примечание [22].

подвержено движение. Эта последняя трудность сохраняется даже в состоянии равновесия: полагая исчезающими три скорости u, v, w, будем иметь для несжимаемых жидкостей следующий интеграл:

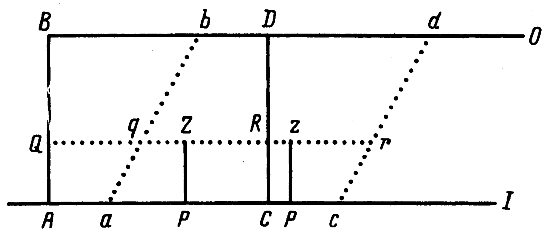
$$\frac{p}{g} = V + \text{const}$$

где постоянная может содержать время t произвольным образом.

52. Для того чтобы лучше понять это, нужно только представить себе определенную массу, заключенную в сосуде. Ясно, что состояние давления зависит не только от побуждающих сил, но также и от посторонних сил, которые могут действовать на сосуд. Ведь если бы даже вовсе не было побуждающих сил, то посредством поршня, через который действовали бы на жидкость, можно было воспроизвести последовательно все возможные состояния давления, не нарушая равновесия. Именно это позволяет нам заключить наша формула, которая в рассматриваемом случае показывает, что p/g есть функция времени t. Отсюда мы видим, что состояние давления может изменяться в каждый момент времени и это независимо от равновесия. Но если в каждый момент времени известно давление в какой-то точке, то тем самым будут определены давления во всех остальных точках; и если бы случилось, что на поршень давили бы то с большей, то с меньшей силой, расчет должен бы был показать все эти возможные изменения. То же самое изменение должно иметь место и тогда, когда жидкость подвержена действию произвольных ускорительных сил, так что в каждый момент времени состояние давления не определено и зависит от силы, которая действует в это время на поршень.

53. Таково, следовательно, очень существенное различие между ускорительными силами, которые действуют на все элементы жидкости, и силой поршня, с которой он давит на жидкость. В наше дифференциальное уравнение входят только ускорительные силы, а сила поршня входит в расчет только после интегрирования и влияет лишь на постоянную, которая появляется в результате интегрирования. Эту постоянную нужно, следовательно, определять в каждом случае так, чтобы в том месте, где находится поршень, давление было точно равно силе, с которой на поршень давят в каждый момент. И именно по этой причине упомянутая постоянная содержит время, что позволяет ее изменять со временем по желанию, как того требуют обстоятельства. Это изменение можно всегда представить действием поршня; каким бы ни был рассматриваемый случай, для его определения нужно всегда предполагать, что по крайней мере в одной точке жидкости давление известно в каждый момент времени и именно это обстоятельство позволяет определить постоянную, введенную в расчет в результате интегрирования нашего дифференциального уравнения.

54. В нашем случае движения, рассмотренном в § 49, предположим также, что ускорительные силы равны нулю, т.е. $V = 0$, а для того чтобы сделать этот случай вполне определенным, положим $u = a + \alpha y + \beta t$. Тогда уравнение, определяющее давление, будет иметь вид $p/g = \text{const}-\beta x$. Положим, сверх того, постоянную равной $\gamma + \delta t$, так что $p/g = \gamma + \delta t - \beta x$, и посмотрим, при каких условиях это движение может иметь место. Поскольку каждый элемент жидкости движется в направлении оси OA, это движение может происходить только в цилиндрической трубке, лежащей в том же самом направлении. Пусть (фиг. 4) $ABIO$ представляет собой эту трубку; предположим, что в начале, т.е. при $t = 0$, жидкость заполняет в ней часть $ABCD$, ограниченную сечениями AB и CD, перпендикулярными трубке. Будем отсчитывать абсциссы x от точки A на прямой AI; и пусть на всем основании AB давление $p = \gamma g$, а на другом основании CD давление равно $g\gamma - \beta g \cdot AC$; внутри же жидкости, в произвольном месте Z с координатами $AP = x$, $PZ = y$, давление будет равно $\gamma g - \beta g x$. Следовательно, нельзя рассматривать жидкость в трубке далее, чем до CD, причем надо принять $AC = \gamma/\beta$, чтобы давление на CD не могло стать отрицательным.



Фиг. 4

55. Положим, что у так выбранной массы жидкости длина $AC = b$, ширина $AB = CD = c$, высота же не входит в рассмотрение, так как ни скорости, ни давления вовсе не зависят от третьей координаты z; при $\gamma = \beta b$ давление на основании AB в начальном состоянии $ABCD$ равно βbg, на основании CD равно нулю, а в произвольной точке Z равно $\beta g(b-x) = \beta g \cdot CP$. Предположим, что в этом состоянии жидкость имеет такое движение вдоль направления трубки, что скорость на линии AC равна a, на линии BD равна $a + \alpha c$, а на произвольной линии QR, параллельной направлению трубки, равна $a + \alpha y$, где принято $AQ = CR = y$. Итак, мы представляем себе, что вследствие некоторой причины такое движение было сообщено жидкости и что в первый момент жидкость получила воздействие силы βbg на поверхности AB в результате давления поршня, в то время как другое основание CD не было подвержено никакому давлению. Но в последующие моменты времени силы, действующие на крайних сечениях, могли бы меняться произвольно: но это изменение определено гипотезами, которые мы только что установили. Итак, посмотрим, как в силу этих гипотез будет продолжаться движение жидкости.

56. По истечении времени t все элементы жидкости, находящиеся на линии QR, будут иметь скорость в том же направлении, равную $a + \alpha y + \beta t$, с которой они пробегут за промежуток времени dt расстояние $(a + \alpha y + \beta t)dt$; таким образом, с начала движения они пройдут расстояние, равное $at + \alpha yt + {}^1/_2\, \beta tt$; следовательно, жидкая ниточка, находившаяся в начале в положении QR, окажется теперь сдвинутой в qr, пробежав расстояние $Qq = at + \alpha yt + {}^1/_2\, \beta tt$. Таким образом, нить AC перейдет в ac, пробежав расстояние $Aa = at + {}^1/_2\, \beta tt$, а нить BD перейдет в bd, пробежав расстояние $Bd = at + \alpha ct + {}^1/_2\, \beta tt$, так что масса жидкости будет теперь ограничена сечениями ab и cd, прямыми, но наклоненными по отношению к направлению трубки. Нужно, чтобы теперь давление в точке q на сечении ab было равно

$$g(\beta b + \delta t - \beta \cdot Qq) = g(\beta b + \delta t - \beta at - \alpha\beta yt - \frac{1}{2}\beta\beta tt)$$

а cd в точке r на сечении cd равно

$$g(\beta b + \delta t - \beta \cdot Qr) = g(\delta t - \beta at - \alpha\beta yt - \frac{1}{2}\beta\beta tt)$$

Итак, нужно представить себе поршни, которые действуют с такими силами на два крайних сечения ab и cd, и поскольку эти давления не одинаковы по всей площади этих сечений, нужно представить себе гибкие и податливые поршни, посредством которых могут быть осуществлены указанные давления.

57. Это движение осталось бы тем же самым, если бы при интегрировании давления p мы взяли вместо δt произвольную функцию от t, но тогда состояние давления в жидкой массе стало бы различным для каждого момента времени, даже если предполагаемое движение жидкости при этом не было бы подвержено никаким изменениям. Итак, положим $\delta t = \beta at + \alpha\beta ct + {}^1/_2\beta\beta tt$; по истечении времени t давление в произвольной точке q в сечении ab будет равно $g(\beta b + \alpha\beta(c-y)t)$, а в произвольной точке z на линии qr оно будет равно $g(\beta b + \alpha\beta(c-y)t-\beta \cdot qz)$; поэтому давление на другом конце r будет $\alpha\beta g(c-y)t$. Значит, в сечении ab давление будет равно $\beta g(b + \alpha ct)$ в a и βgb в b, а в сечении cd давление будет равно $\alpha\beta gct$ в c и равно нулю в d. К тому же, каждая нить QR будет двигаться в своем собственном направлении равноускоренно, т.е. будет получать равные приращения скорости за равные времена. Исследование этого частного случая может послужить для уяснения выкладок, которые нужно будет проводить во всех других случаях.

58. Остановимся еще раз на предложенном случае (§ 48) и положим плотность q постоянной и равной g; но в качестве сил P, Q, R выберем такие, при которых жидкость никогда не могла бы быть в равновесии. В этих целях пусть $p = 0$, $Q = -x/a$ и $R = -x/a$; положим далее

$$u = b + \frac{(y+z)t}{a}$$

чтобы иметь

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 0, \quad \frac{dp}{g} = -\frac{xdy + xdz}{a} - \frac{ydx + zdx}{a}$$

Отсюда в результате интегрирования получаем

$$\frac{p}{g} = \text{const} - \frac{xy + xz}{a}$$

где постоянная может содержать время произвольным образом. Следовательно, невозможно, чтобы вся масса жидкости оставалась когда-нибудь в покое. Ибо если бы мы и приняли $b = 0$, чтобы иметь жидкость в покое в начале при $t = 0$, тотчас же после первого мгновения она будет возбуждена, и только элементы, для которых $y = 0$ или $z = 0$ или $y + z = 0$, останутся в покое; все остальные приобретут движение либо вперед, либо назад, в зависимости от того, будет ли величина $y + z$ положительной или отрицательной. Легко также определить давления, которые требуются для поддержания рассматриваемого движения.

59. Но пусть плотность больше не постоянна, а переменна, т.е. жидкость сжимаема; для того чтобы выражение $qdx-qudt$ стало полным дифференциалом, можно принять в качестве u произвольную функцию переменных x, y, z и t. Поскольку здесь только две величины, x и t, рассматриваются в качестве переменных, а две другие, y и z, в качестве постоянных, можно будет всегда определить такую величину s, чтобы $s(dx-udt)$ стало интегрируемым. Пусть S будет этим интегралом и это условие будет выполнено, если принять $q = sf(S)$, где $S = \int s(dx-udt)$. Кроме того, теперь нужно, чтобы было интегрируемым следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dp}{q} = Pdx + Qdy + Rdz - dx\left(\frac{du}{dt}\right) - udx\left(\frac{du}{dx}\right)$$

Замечу, что, если силы P, Q, R здесь исчезают, давление p будет функцией от x и t и, следовательно, величина

$$q\left(\left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right)\right)$$

должна содержать только две переменные x и t, откуда должна быть определена природа функции u, хотя она может содержать также y и z.

60. Хотя я и предположил здесь, что $v = 0$ и $w = 0$, эти формулы содержат в себе все случаи, когда движение всех частиц жидкости происходит всегда в одном и том же направлении; остается только принять ось OA за это направление. Поэтому мы сможем также решить наши уравнения в случае, когда движение направлено под углом по отношению к трем осям, что не преминет дать нам некоторые пояснения в этом анализе. С этой целью рассмотрим истинную скорость произвольной частицы Z жидкости и пусть она будет[39] ψ; поскольку ее направление задано по отношению к трем осям, составляющие скорости связаны между собой определенными соотношениями. Пусть $u = \alpha\psi$, $v = \beta\psi$ и $w = \gamma\psi$; полагая $d\psi = Kdt + Ldx + Mdy + Ndz$, получим

$$X = \alpha K + \alpha\alpha L + \alpha\beta M + \alpha\gamma N$$

$$Y = \beta K + \alpha\beta L + \beta\beta M + \beta\gamma N$$

$$Z = \gamma K + \alpha\gamma L + \beta\gamma M + \gamma\gamma N$$

Следовательно, если для краткости обозначить $K + \alpha L + \beta M + \gamma N = O$, так что $X = \alpha O$, $Y = \beta O$, $Z = \gamma O$, наши уравнения примут вид

$$\frac{dp}{q} = Pdx + Qdy + Rdz - O(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)$$

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \alpha\left(\frac{d.q\psi}{dx}\right) + \beta\left(\frac{d.q\psi}{dy}\right) + \gamma\left(\frac{d.q\psi}{dz}\right) = 0$$

61. Пусть сначала плотность $q = g$. Как мы видели в § 44, для того чтобы удовлетворить равенству

$$\alpha\left(\frac{d\psi}{dx}\right) + \beta\left(\frac{d\psi}{dy}\right) + \gamma\left(\frac{d\psi}{dz}\right) = 0$$

величина ψ должна быть произвольной функцией величин $\alpha y - \beta x$ и $\alpha z - \psi x$ или же $\beta z - \gamma y$, причем эта функция может, кроме того, содержать произвольным образом и время t. Итак, пусть ψ будет произвольной функцией величин $\alpha y - \beta x$, $\alpha z - \gamma x$ и t, так как выражение $\beta z - \gamma y$ уже образовано из двух других. Отсюда легко понять, что скорость частиц, находящихся на одной и той же прямой линии, параллельной направлению движения, в каждый момент времени повсюду одна и та же, точно так, как того требует природа гипотезы. Значит, дифференциал величины ψ будет иметь следующий вид:

$$d\psi = Fdt + G\,(\alpha dy - \beta dx) + H\,(\alpha dz - \gamma dx)$$

так что $K = F$, $L = -\beta G - \gamma H$, $M = \alpha G$ и $N = \alpha H$. Следовательно, $O = F$ – функция от $\alpha y - \beta x$, $\alpha z - \gamma x$ и t; поэтому дифференциальное уравнение, которое остается решить, будет таково

$$\frac{dp}{q} = Pdx + Qdy + Rdz - F(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)$$

62. Предположим, что время t здесь постоянно. И если выражение $Pdx + Qdy + Rdz = dV$ интегрируемо само по себе, то нужно, чтобы остальная часть $F(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)$ была также интегрируема; а этого не может случиться, если только F не является функцией от $\alpha x + \beta y + \gamma z$ и времени t. Но, кроме того, нужно, чтобы функция F была также функцией величин $\alpha y - \beta x$, $\alpha x - \gamma x$ и времени t; следовательно, так как выражение $\alpha x + \beta y + \gamma z$ не может быть образовано из выражений $\alpha y - \beta x$ и

[39] Здесь, как и в § 33, эйлерово обозначение ∀ заменено на ψ.

$\alpha z-\gamma x$, очевидно, что величина F должна быть функцией только времени t. Поэтому скорость ψ будет типа $\psi = Z + T$, где Z обозначает произвольную функцию двух величин $\alpha y-\beta x$ и $\alpha z-\gamma x$, не содержащую времени t, а T представляет собой произвольную функцию только времени t, так что $dT = Fdt$. Поэтому интегралом нашего дифференциального уравнения будет

$$\frac{p}{g} = V - F(\alpha x + \beta y + \gamma z) + \text{const}$$

где постоянная может произвольным образом содержать время t. Этот интеграл вместе с соотношением $\psi = Z + T$ содержит все, что касается движения в рассматриваемом случае.

63. Если же плотность q не постоянна, будет важно получить решение следующего уравнения:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \alpha\left(\frac{d.q\psi}{dx}\right) + \beta\left(\frac{d.q\psi}{dy}\right) + \gamma\left(\frac{d.q\psi}{dz}\right) = 0$$

Сколь бы трудным это не могло показаться, свед́ение к предыдущему случаю указывает, что скорость ψ может быть произвольной функцией четырех переменных x, y, z и t, а значение q должно определяться следующим образом. Рассмотрим в общем случае выражение

$$s(ldx + mdy + ndz-\psi dt) = dS$$

которое стало интегрируемым после умножения на s, и пусть $q = sf(S)$. Тогда, если положить $df(S) = dsf'(S)$, наше выражение примет вид

$$f(S)\left(\frac{ds}{dt}\right) - sf'(S)s\psi + \alpha sf(S)\left(\frac{d\psi}{dx}\right) + \alpha\psi f(S)\left(\frac{ds}{dx}\right) + \alpha\psi sf'(S)ls +$$

$$+\ \beta sf(S)\left(\frac{d\psi}{dy}\right) + \beta\psi f(S)\left(\frac{ds}{dy}\right) + \beta\psi sf'(S)ms +$$

$$+\ \gamma sf(S)\left(\frac{d\psi}{dz}\right) + \gamma\psi f(S)\left(\frac{ds}{dz}\right) + \gamma\psi sf'(S)ns$$

и оно должно быть равно нулю.

64. Прежде всего приравняем нулю члены, содержащие $f'(S)$, в результате чего получим $1 = \alpha l + \beta m + \gamma n$; остальные члены после деления на $f(S)$ дают

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) + \alpha\left(\frac{d.s\psi}{dx}\right) + \beta\left(\frac{d.s\psi}{dy}\right) + \gamma\left(\frac{d.s\psi}{dz}\right) = 0$$

что очень похоже на рассматриваемое выражение; но нужно заметить, что интегрируемость величины dS включает следующие условия:

$$\left(\frac{d.s\psi}{dx}\right) = -\left(\frac{d.ls}{dt}\right),\ \left(\frac{d.s\psi}{dy}\right) = -\left(\frac{d.ms}{dt}\right),\ \left(\frac{d.s\psi}{dz}\right) = -\left(\frac{d.ns}{dt}\right)$$

отсюда получаем

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)(1 - \alpha l - \beta m - \gamma n) = 0$$

что согласуется с предыдущим условием. Таким образом, при условии, что $\alpha l + \beta m + \gamma n = 1$, а s – такая функция, которая дает $s(ldx + mdy + ndz-\psi dt) = dS$, обеспечивая интегрируемость, наше уравнение будет удовлетворено, если принять $q = sf(S)$, что означает, что q/s является произвольной функцией от S. Совсем не обязательно, чтобы величины l, m и n были постоянными, но тогда нужно, чтобы выполнялось условие

$$\alpha\left(\frac{dl}{dt}\right)+\beta\left(\frac{dm}{dt}\right)+\gamma\left(\frac{dn}{dt}\right)=0$$

которое уже содержится в уравнении $1 = \alpha l + \beta m + \gamma n$.

65. Кроме того, необходимо, чтобы l, m и n были такими функциями, при которых становится разрешимым дифференциальное уравнение $ldx + mdy + ndz - \psi dt = 0$; без этого условия было бы невозможно найти множитель s, который делает это выражение интегрируемым. Таким образом, если в качестве l произвольно принять какое-то значение, величины m и n будут уже определены и мы сможем избавиться от их поиска. Положим $\alpha l = 1$, или $l = 1/\alpha$; тогда нужно, чтобы было $\beta m + \gamma n = 0$, и остается только найти такой множитель s, при котором выражение

$$s\left(\frac{dx}{\alpha}-\psi dt\right)$$

становится интегрируемым при условии, что две величины y и z рассматриваются как постоянные. Итак, пусть

$$S=\int s\left(\frac{dx}{\alpha}-\psi dt\right)$$

а y и z содержатся в S как постоянные; можно принять $q= sf(S)$, что дает нам то же решение, как если бы мы изменили положение трех осей таким образом, чтобы одна из них совпала с направлением движения всех элементов жидкости. Отсюда мы видим, что это кажущееся ограничение вовсе не умаляет общности решения.

66. Таким же образом можно было бы исследовать много других частных случаев, которые будут иметь то бóльшую, то меньшую общность, но мы не найдем такого случая, который был бы более общим, чем тот, в котором три скорости u, v и w таковы, что выражение $udx + vdy + wdz$ становится интегрируемым[40]. Пусть S – интеграл, который включает еще и время t, и пусть его полный дифференциал

$$dS = udx + vdy + wdz + \Pi dt$$

Поскольку

$$\left(\frac{du}{dt}\right)=\left(\frac{d\Pi}{dx}\right),\ \left(\frac{dv}{dt}\right)=\left(\frac{d\Pi}{dy}\right),\ \left(\frac{dw}{dt}\right)=\left(\frac{d\Pi}{dz}\right)$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right)=\left(\frac{dv}{dx}\right),\ \left(\frac{du}{dz}\right)=\left(\frac{dw}{dx}\right),\ \left(\frac{dv}{dz}\right)=\left(\frac{dw}{dy}\right)$$

мы будем иметь

$$X=\left(\frac{d\Pi}{dx}\right)+u\left(\frac{du}{dx}\right)+v\left(\frac{dv}{dx}\right)+w\left(\frac{dw}{dx}\right)$$

---

[40] Выше, в § 30–33, Эйлер уже указал на возможность и привел примеры непотенциальных течений жидкости. К. Трусделл полагает, что § 66 мемуара был вставлен Эйлером на основании предшествующей его работы (см. Примечание [16]), в которой он еще не обнаружил существования непотенциальных движений жидкости. Это тем более вероятно, что, как подчеркнул Трусделл, Эйлер обозначает здесь потенциал скоростей не через W, как выше в § 26, а через S, как в предшествующей своей работе.

$$Y = \left(\frac{d\Pi}{dy}\right) + u\left(\frac{du}{dy}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dy}\right)$$

$$Z = \left(\frac{d\Pi}{dz}\right) + u\left(\frac{du}{dz}\right) + v\left(\frac{dv}{dz}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

При этом наше дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{dp}{q} = Pdx + Qdy + Rdz - d\Pi - udu - vdv - wdw$$

(последний член которого абсолютно интегрируем), а другое уравнение останется прежним

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0$$

67. Все сводится, следовательно, к нахождению подходящих значений трех скоростей u, v и w, удовлетворяющих нашим двум уравнениям, которые содержат все, что мы знаем о движении жидкостей. Если известны эти три скорости, мы сможем определить траекторию, описываемую каждым элементом жидкости в своем движении. Рассмотрим частицу, находящуюся в данный момент в точке Z; для нахождения траектории, которую она уже пробежала и которую еще пробежит, мы имеем $dx = udt$, $dy = vdt$ и $dz = wdt$ для ее положения в следующий момент времени, поскольку три ее скорости u, v и w предполагаются известными. Исключив из этих трех равенств время t, получим еще два уравнения с тремя координатами x, y и z, которые определят искомую траекторию элемента жидкости, находящегося в данный момент в Z, и вообще мы будем знать траекторию, которую каждая частица описала и еще опишет.

68. Определение этих траекторий чрезвычайно важно и должно способствовать приложению Теории к каждому рассматриваемому случаю. Если форма сосуда, в котором движется жидкость, задана, частицы жидкости, соприкасающиеся с поверхностью сосуда, должны обязательно следовать ее направлению; поэтому скорости u, v и w должны быть таковы, чтобы траектории, которые будут при этом выведены, оказывались на этой самой поверхности[41]. Итак, мы видим отсюда в достаточной мере, насколько мы еще далеки от полного познания движения жидкости, и то, что я только что объяснил, является лишь незначительным вступлением. Тем не менее все, что содержит Теория жидкостей, заключено в двух приведенных выше уравнениях (§ 34), так что нам не хватает для продолжения этих исследований не законов Механики, а только Анализа, который пока еще недостаточно развит для этой цели. Поэтому ясно видно, какие открытия нам еще предстоит сделать в этой Науке, прежде чем мы сможем прийти к более совершенной Теории движения жидкостей.

[41] Здесь Эйлер указывает на то, что для расчета движения жидкости помимо уравнений движения, неразрывности и состояния, а также начальных условий необходимо иметь еще краевые условия.