

УДК 532.59

© 1999 г. Ю.С. ИЛЬИНЫХ, С.А. СМИРНОВ, Ю.Д. ЧАШЕЧКИН

ВОЗБУЖДЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ВЯЗКОЙ НЕПРЕРЫВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Теоретически и экспериментально исследуется генерация трехмерных монохроматических внутренних волн частью цилиндрической оболочки, совершающей вертикальные колебания вдоль своей образующей в вязкой непрерывно стратифицированной жидкости и двухмерных волн пластинами, колеблющимися под углом к горизонту. Решение линейной задачи возбуждения волн с учетом точных граничных условий на теле описывает две формы движения – внутренние волны и пограничные течения, которые и наблюдаются в лабораторном бассейне. Приводятся теневые картины волн и течений, а также результаты изменения амплитуд внутренних волн с помощью датчика электропроводности.

В теории внутренних волн, играющих важную роль в динамике стратифицированных сред, рассмотрение задач их генерации проводится с использованием силовых или массовых источников, заимствованных из теории однородной жидкости [1, 2]. Учет граничных условий позволяет уточнить решение задачи возбуждения волн и выделить характеристики, на которых решение становится сингулярным в двухмерной [3] и в трехмерной постановке [4]. Интенсивность и взаимное расположение источников в пространстве являются подгоночными параметрами, определяемыми из эксперимента. Хотя структура волнового пучка качественно согласуется с экспериментальными данными на больших расстояниях от излучателя [2, 5], расчеты и измерения амплитуд волн различаются более чем на порядок [6]. Основные результаты проведенных исследований по проблеме представлены в обзорах [7, 8].

В последнее время развивается самосогласованная теория внутренних волн, учитывающая пространственно локализованные пограничные течения [9], поскольку при движении тела часть его энергии расходуется как на излучение волн, так и на поддержание возникающей неоднородности стратификации. Эти уточнения позволяют сблизить математическую постановку задачи с экспериментом, хотя и не учитывают в полном объеме влияние нестационарных течений, индуцированных диффузией на наклонной плоскости [10] или около горизонтального цилиндра [11]. Полученные формулы [8, 9] позволяют рассчитать амплитуду колебаний частиц как в двухмерном, так и в трехмерном случаях, когда волновой пучок образует в пространстве коническую поверхность. Методика, развитая в [9], позволяет находить точное решение задачи излучения внутренних волн периодически колеблющимся телом с учетом вязкости ввиду согласованности симметрии уравнения и граничных условий.

Целью данной работы являются изучение фазовой картины внутренних волн от различных двухмерных и трехмерных источников и сопоставление расчетов волн и пограничных течений в вязкой непрерывно стратифицированной жидкости с данными лабораторных измерений.

1. Теория. Расчет по методике [9] показывает, что вертикальные смещения частиц (η) в коническом пучке внутренних волн, образующемся при вертикальных колебаниях вертикальной цилиндрической оболочки (трехмерный случай), описываются следую-

щим выражением

$$\eta = e^{-3\pi i/4} \left(\frac{b}{\Phi \sqrt{2r^3 \sin \theta}} \right) \alpha^{-1/2} \left\{ F\left(p + \frac{a}{2}, q\right) - F\left(p - \frac{a}{2}, q\right) \right\} \quad (1.1)$$

$$F(p, q) = \int_0^{\infty} \exp(i\alpha p y^{1/3} - y) \frac{dy}{y^{7/6}}, \quad \alpha = \sqrt[3]{2N \cos \theta / \nu q}, \quad a = a_0 \cos \theta$$

$$\theta = \arcsin(\omega / N), \quad \Phi = 1 - \frac{\mu R H_0^{(1)}(\mu R)}{2H_1^{(1)}(\mu R)}, \quad \mu = |k| \operatorname{tg} \theta + \frac{i\nu}{2N \cos^5 \theta} |k|^3$$

Здесь ω , b , R , a – частота, амплитуда колебаний, радиус и высота оболочки, p , q – координаты сопутствующей системы координат, связанной с пучком, идущим вправо и вверх, N – частота плавучести, ν – кинематическая вязкость, \mathbf{k} – волновой вектор, $r = p \sin \theta + q \cos \theta$, $z = -p \cos \theta + q \sin \theta$ – цилиндрические координаты, $H^{(1)}$ – функция Ганкеля первого рода, соответствующая расходящимся волнам.

Форма выражения (1.1) указывает на то, что волновое поле, создаваемое протяженным телом в дальней зоне, эквивалентно полю, создаваемому двумя локализованными источниками, помещенными на его концах. В этом случае на расстояниях $q \geq a$ волновое поле состоит из двух пучков внутренних волн от каждого из источников в отдельности. По мере удаления от тела эти пучки уширяются и на некотором расстоянии формируют в результате интерференции единый пучок. Условием этого является неравенство $a \geq \lambda_1$, где λ_1 – длина внутренних волн, создаваемых точечным источником на расстоянии L от него, определяемая соотношением $\lambda_1 = \sqrt[3]{Lv / 2N \cos \theta}$ [2]. Так как в безграничной среде единственным масштабом длины является масштаб плавучести $\Lambda = g/N^2$, то, подставляя его в указанное выше неравенство, для размера тела находим $a \geq L_\nu = \sqrt[3]{\nu g / N}$ – вязкий волновой масштаб.

Критерием изменения структуры волнового поля – смены модальности пучка – является условие трансформации локального минимума в центре пучка в максимум $\partial^2 Y / \partial p^2 = 0$ при $p = 0$, где $Y = |\eta|$ – огибающая волновых смещений. Поскольку главный член разложения в (1.1) пропорционален $q^{-2/3}$, то для обеспечения требуемой точности вычислений достаточно дифференцировать только члены в фигурных скобках. В этом случае смена модальности происходит на расстоянии L_m , определенном уравнением

$$L_m = \left| \frac{(a \cos \theta)^3 N \cos \theta}{\nu y^3} \right| \quad (1.2)$$

$$G^2(y, 3) + G(y, 1)G(y, 5) = 0, \quad G(y, m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k+)} \Gamma\left(\frac{4k+m}{6}\right) \quad (1.3)$$

где y – безразмерная величина, наименьший корень алгебраического уравнения (1.3), $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Выражение (1.2) имеет один и тот же вид как в трехмерном, так и в плоском (двухмерном) случае [9], за исключением значений корней алгебраического уравнения (1.3). При этом $L_m \sim a^3$, т.е. чем больше размер источника возмущений, тем протяженнее становится зона бимодальности.

Около тела, помещенного в стратифицированную жидкость, образуется внутреннее пограничное течение, существующее как около движущегося [10], так и около покоящегося тела [11]. Из анализа решений [10] следует, что характерная толщина пограничного течения на пластине, расположенной под углом ϕ к горизонту и совершающей вынужденные колебания, составляет

$$\lambda_b = \sqrt{2\nu \sin \theta / N \cos^2 \theta} \quad (1.4)$$

Из последнего выражения видно, что толщина течения не зависит от ширины и толщины пластины и угла ее установки ϕ , а определяется только вязкостью среды, частотой плавучести и частотой вынужденных колебаний, задающей угловое положение пучка (θ).

Сравнение приведенных формул с результатами для осциллирующей пластины [9] показывает, что хотя в трехмерном случае меняется геометрия задачи – волновой пучок образует в пространстве коническую поверхность, качественно фазовые картины течения в центральной вертикальной плоскости подобны, закон спадания амплитуды внутренних волн на оси пучка также в обоих случаях одинаков $\eta \sim q^{-2/3}$. Распределение смещений по поперечной координате r в сечении на фиксированном расстоянии q от источника более быстрое из-за наличия дополнительного амплитудного множителя $r^{-1/2}$.

2. Методика эксперимента. Эксперименты проводились в лабораторном бассейне размером $9,0 \times 0,6 \times 0,6$ м. Для создания стратификации использовался метод послойного вытеснения, в котором раствор поваренной соли переменной концентрации подавался в бассейн снизу. При непрерывном процессе заливки и плавном изменении плотности раствора в бассейне образуется непрерывная стратификация. Период плавучести поддерживался постоянным по глубине бассейна и измерялся методом плотностной метки. В проведенных экспериментах масштаб плавучести составлял $\lambda = 9-14$ м, период плавучести $T_b = 6-7,5$ с, вязкий волновой масштаб $L_v = (gv)^{1/3} / N = 2-2,6$ см.

Генератор внутренних волн состоит из двигателя постоянного тока и кривошипно-шатунного механизма с направляющими, которые приводят в колебательное движение излучатель. Непосредственно источниками волн служат пластины толщиной $0,1$ см и шириной $\alpha = 1, 3, 6$ см (их длина совпадала с шириной бассейна), совершающие колебания в своей плоскости с амплитудой $0,15$ см, а также полый цилиндр длиной $3,5$ и диаметром $1,6$ см. Вся конструкция позволяет плавно регулировать угол наклона ϕ плоскости колебаний излучателя к горизонту в диапазоне от 0 до 90° . Амплитуда колебаний излучателя A_0 может изменяться в диапазоне от $0,05$ до 5 см, частота (период) колебаний ω – от $1,57$ до $0,16$ рад/с ($4-40$ с).

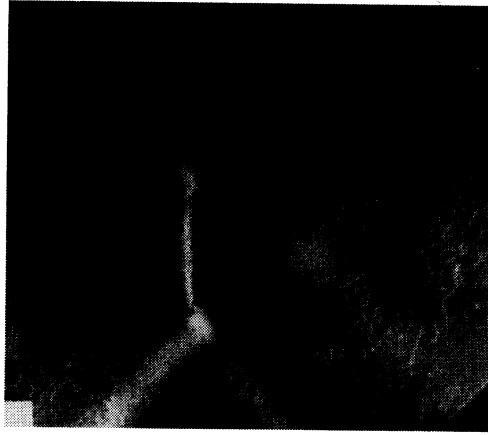
Визуальные наблюдения внутренних волн осуществлялись интерференционно-теневым прибором ИАБ-451 и регистрировались фотокамерой РФК-5. При визуализации обычно использовались вертикальная щель и вертикальный нож, иногда щель с нитью или другие сочетания. При этом изменения освещенности обусловлены вариациями горизонтальной компоненты градиента показателя преломления, связанного линейным соотношением с градиентом плотности.

Значения вертикальных смещений жидких частиц из положения равновесия регистрировались двухэлектродными микроконтактными преобразователями удельной электропроводности, чувствительные элементы которых видны в поле внутренних волн на приводимых теневых фотограммах. Тарировка датчиков проводилась методом "подъем – погружение", а динамическая градуировка – методом гармонических колебаний датчика в среде с частотами в рабочем диапазоне и фиксированной амплитудой. Оценка погрешностей измерений позволяет сделать вывод, что ошибка в определении волновых смещений частиц не превышает 10% . Профили смещений частиц жидкости измерялись при перемещении датчика параллельно плоскости излучателя. Разрешающая способность оптических методов удовлетворяет указанным выше требованиям к методике измерений.

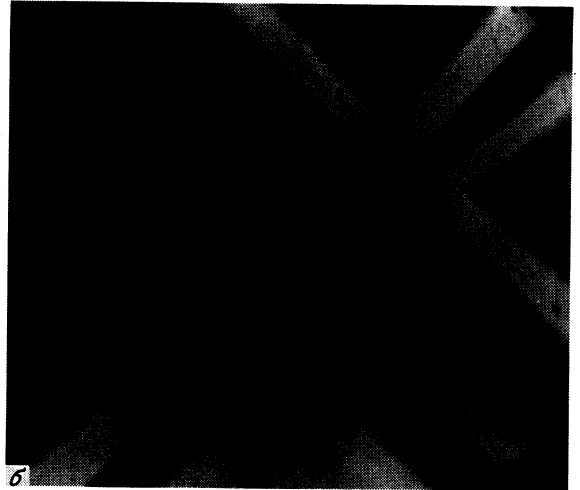
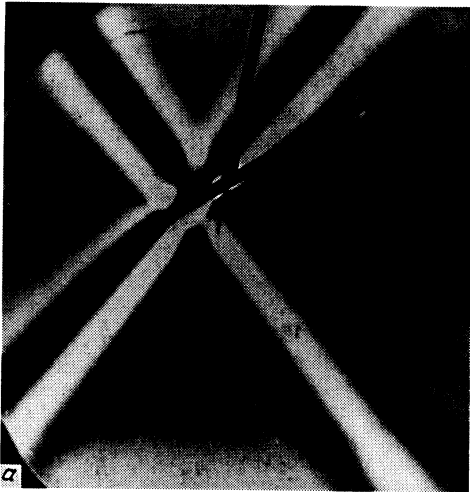
3. Основные результаты. Теневые фотографии монохроматических внутренних волн, генерируемых цилиндрической оболочкой и пластинами различной ширины, приведены на фиг. 1, 2.

Для излучателей малой ширины ($a < L_v$) волновые движения сконцентрированы в достаточно узких пучках, исходящих от краев источников возмущений. При визуализации по методике щель – нож границы черных и белых полос отвечают гребням и впадинам волн.

В силу особенностей теневого метода при осевой симметрии трехмерного волнового



Фиг. 1. Теневая фотография монохроматических внутренних волн, генерируемых вертикально осциллирующей цилиндрической оболочкой ($R = 0,8$ см, $a = 3,5$ см, $N = 1,05$ с⁻¹, $\omega = 0,83$ с⁻¹, $A_0 = 0,15$ см)

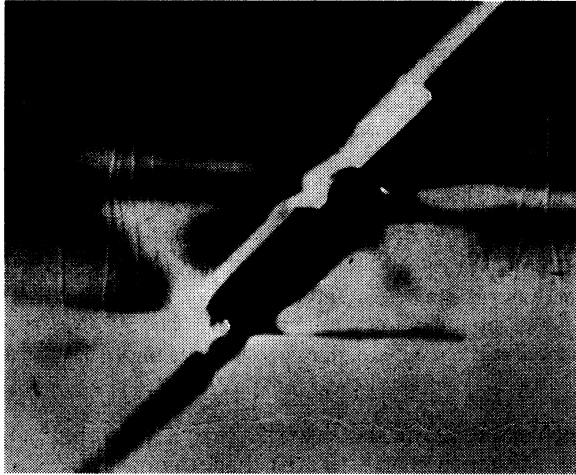


Фиг. 2. Теневая фотография монохроматических внутренних волн, генерируемых осциллирующей пластиной ($\varphi = 50^\circ$, $N = 0,84$ с⁻¹, $\omega = 0,64$ с⁻¹, $A_0 = 0,15$ см) для $a = 1$ (а) и 6 см (б) соответственно

поля прибор регистрирует центральное (главное) сечение (фиг. 1), в котором луч идет по касательной к фазовой поверхности.

Картина трехмерного поля гармонических волн отличается от двумерной, создаваемой узкой пластиной (фиг. 2), только яркостью изображения. Это связано с тем, что толщина слоя, в котором происходит преломление лучей, в данном случае значительно меньше, чем для пластин, длина которых близка к ширине бассейна. Однако, как показывают измерения амплитуд колебания частиц при помощи датчиков электропроводности, они совпадают в пределах погрешностей измерений.

В волновом поле, создаваемом излучателями с заостренными кромками, совершающими малые колебания ($A_0/a < 0,15$), нелинейные эффекты не наблюдаются. Горизонтальные мелкомасштабные прослойки, которые заметны около кромок излучателя на фотограммах (фиг. 1, 2), обусловлены отрывом внутренних пограничных тече-



Фиг. 3. Теневая фотография пограничного течения, образующегося на пластине $a = 3$ см с плотностными метками (светлые вертикальные полосы)

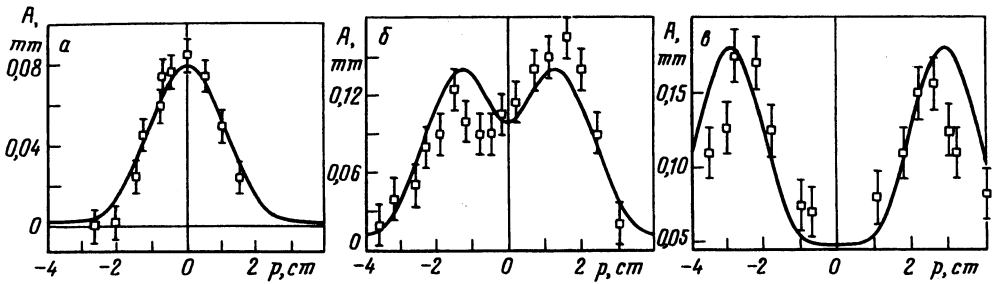
ний [9]. С учетом диффузии эти течения характеризуются различными масштабами изменчивости скорости и плотности [10]. В эксперименте эти прослойки присутствуют независимо от того, совершает тело периодические колебания или покоится, но природа их различна. Около покоящегося тела прослойки появляются вследствие диффузионного движения соли, а при колебательном движении тела сказывается вязкое увлечение жидкости, которое усиливает видимые пограничные слои. Толщина слоя около 5 мм, расчет по формуле (1.4) дает толщину в 2 раза меньше.

При более детальном рассмотрении этого эффекта (фиг. 3) можно заметить, что в прослойках происходит движение жидкости. Направление этого движения в верхней и в нижней прослойках противоположно. Слева от пластины в нижнем слое происходит подтекание жидкости, а в верхнем оттекание жидкости от пластины (движение против часовой стрелки). Справа от пластины движение происходит в противоположном направлении. Фотография получена на теневом приборе с использованием методики ("наклонная щель – наклонная нить в фокусе") позволяющей выделить именно прослойки и уменьшить видимость волновых пучков, показанных на фиг. 2, а и б. Для визуализации движения жидкости использовались плотностные метки (кристаллики сахара). Использование меток позволяет также оценить величину скорости движения. Скорость движения в данных условиях составляла около 0,5 см/мин.

Сопоставление теневых фотографий с профилями огибающих амплитуд, измеренных датчиком электропроводности при изменении поперечной сопутствующей координаты p на различных расстояниях q от источника, проведено для поперечного пучка, уходящего перпендикулярно плоскости колебаний тела. Для проведения количественного сравнения теоретические значения (сплошные кривые на фиг. 4) каждой из кривых умножались на единый нормирующий множитель k , величина которого выбиралась из условия минимизации отклонений от теоретической зависимости экспериментальных точек по методу наименьших квадратов с учетом погрешностей измерений.

В теневой картине волн от пластины шириной 1 см (фиг. 2, а) структура лучей достаточно проста. Профили поперечного пучка совпадают с расчетными с точностью до коэффициента $k = 0,67$ (фиг. 4, а). Один четко выраженный максимум свидетельствует об их одномодальности.

В случае пластины шириной 3 см ($a \approx L_v$) соответствие достигается при нормирующем множителе $k = 1,3$ (фиг. 4, б). На расстоянии $q = 5$ см значение минимума сме-



Фиг. 4. Графики зависимости амплитуды колебаний частиц жидкости в поперечном пучке от сопутствующей пучку поперечной координаты p ($\varphi = 50^\circ$, $N = 0,84 \text{ с}^{-1}$, $\omega = 0,64 \text{ с}^{-1}$, $A_0 = 0,15 \text{ см}$, $q = 5 \text{ см}$) для $a = 1, 3$ и 6 см (а, б, в) соответственно

щений сопоставимо со значениями максимумов, что характерно для переходной зоны при перестройке модальности пучка ($q > a$). Расстояние между максимумами как в опыте, так и в теории меньше ширины пластины. Это означает, что максимумы волновых смещений уже не лежат на характеристиках, исходящих от краев пластины и идущих параллельно друг другу, как в случае идеальной жидкости.

Для пластины шириной 6 см поперечный луч визуализируется как два луча, идущих от каждой из кромок (фиг. 2, б). В профилях огибающих волновых смещений четко выделяются два максимума для поперечного пучка даже на расстоянии 5 см (фиг. 4, в). Различие между значениями максимумов и минимумов значительно больше, чем в предыдущем случае, а плоский участок между максимумами — шире. Таким образом, лучи от краев пластины еще не достигли переходной зоны, где бимодальный луч перестраивается в одномодальный. Расстояние между центрами максимумов бимодального пучка в эксперименте 5 см , что несколько меньше ширины пластины. Центральная часть широкой пластины волны практически не излучает, заполнение промежутка между лучами происходит вследствие вязкого уширения волновых пучков [9]. В целом характер изменения формы огибающей волновых смещений в пучке согласуется с расчетами. Удовлетворительное соответствие расчетов измерениям достигается при $k = 1,7$.

Результаты измерений амплитуды колебаний частиц на оси продольного луча (совпадает по направлению с плоскостью колебаний пластины) для пластин обрабатывались методом наименьших квадратов. Во всех случаях амплитуда — степенная функция, показатель которой зависит от отношения ширины излучателя к вязкому волновому масштабу. Наиболее быстрое затухание наблюдается вдоль центра пучка, излучаемого короткой пластиной ($a/L_v = 0,4$) $A = 0,05q^{-0,9}$, $[A], [q] = \text{см}$. При ширине пластины, сравнимой с вязким волновым масштабом ($a/L_v = 1,1$), закон спадаения типичен для дипольного излучателя ($q^{-2/3}$, [2,6]) $A = 0,06q^{-0,7}$. Для продольного луча широкого излучателя ($a/L_v = 2,3$) $A = 0,06q^{-0,5}$.

4. Обсуждение результатов. Одной из основных проблем в задаче генерации волн в стратифицированной жидкости является нахождение преобразования координат, позволяющего разделить переменные как в самих уравнениях, так и в граничных условиях. Теория, развитая в [9], позволяет находить точное решение задачи излучения внутренних волн периодически колеблющимся телом с учетом вязкости ввиду согласованности симметрии уравнения и граничных условий.

В силу особенности постановки задачи (граничные условия заданы на всей наклонной плоскости, часть которой совершает колебания вдоль своей поверхности) примененный в [9] метод не позволяет получать регулярные асимптотические решения при $\theta = \pm\varphi$ и теория не описывает пучки распространяющиеся вдоль плоскости колебаний тела (продольные пучки). На практике пучки всегда присутствуют. Несмотря на использование в опытах пластин с остро заточенными краями, экспериментальные

измерения показывают, что профили огибающих амплитуд продольного пучка на различных расстояниях q от источника имеют один максимум для всех значений ширины пластин (продольный пучок всегда одномадальный), а абсолютные значения амплитуд – одного порядка с амплитудами поперечного пучка. Это означает, что для продольных пучков эффект вытеснения жидкости (поршневой эффект) является доминирующим над вязким увлечением. Законы спадания волновых амплитуд продольного луча всегда степенные, причем показатель убывает по модулю с ростом ширины пластины.

В случае поперечного пучка теория удовлетворительно описывает его фазовые и амплитудные характеристики. Различие между теоретическими и экспериментальными данными не превышает 50%, что свидетельствует о существенном вкладе вязких напряжений в волновые возмущения поперечного пучка. С увеличением расстояния q от источника максимумы в профилях амплитуд смещаются к центру, а минимум вытягивается вверх, сравниваясь по абсолютному значению с максимумами при $q \approx L_m$. Сопоставление расчетов с экспериментальными данными показывает, что структура волнового поля удовлетворительно описывается при произвольном соотношении между шириной пластины и вязким волновым масштабом.

Согласно [9], пластина, помещенная в стратифицированную жидкость, порождает пограничные течения, в которых происходит горизонтальное движение жидкости. Сообщение пластине колебательного движения усиливает это течение до величины, поддающейся наблюдению и измерению с помощью имеющихся методик.

Заключение. Экстраполяция методики [9] на осесимметричные трехмерные задачи позволяет самосогласованно рассчитать две формы движения: внутренние волны и пограничные течения, создаваемые осциллирующим телом, без дополнительных предположений и феноменологических коэффициентов. Решения для внутренних волн и пограничного течения в случае цилиндрической оболочки отличаются от аналогичных решений для пластины только геометрическим фактором. Расчеты картины течения согласуются с лабораторными наблюдениями.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства науки и технологий Российской Федерации (программа поддержания уникальных стендов и установок Российской Федерации), Министерства общего и профессионального образования (ФЦП "Интеграция", проект 2.1–304), Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов, 96-05-64004, 99-05-64980).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
2. *Thomas N.H., Stevenson T.N.* A similarity solution for viscous internal waves // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 54. Pt. 3. P. 495–506.
3. *Appleby J.C., Crighton D.G.* Non-boussinesq effects in the diffraction of internal waves from an oscillating cylinder // *Quart. J. Mech. and appl. Math.* 1986. V. 39. Pt 2. P. 209–231.
4. *Sarma L.V.K.V., Krishna D.V.* Oscillation of axisymmetric bodies in a stratified fluid // *Zastosow. Mat.* 1972. V. 13. № 1. P. 109–121.
5. *Maas L.R.M.* Observation of an internal wave attractor in a confined stably stratified fluid // *Nature.* 1997. V. 388. № 6642. P. 557–561.
6. *Макаров С.А., Неклюдов В.И., Чашечкин Ю.Д.* Пространственная структура пучков двумерных монохроматических внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 1990. Т. 26. № 7. С. 744–754.
7. *Степаняц Ю.А., Стурова И.В., Теодорович Э.В.* Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // *Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа.* М.: ВИНТИ, 1987. Т. 21. С. 93–179.
8. *Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д.* Генерация, распространение и нелинейное взаимодействие внутренних волн // *Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа.* М.: ВИНТИ, 1990. Т. 24. С. 77–149.

9. *Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д.* Задача генерации монохроматических внутренних волн: точное решение и модель силовых источников // Доклады РАН. 1997. Т. 355. № 1. С. 54–57.
10. *Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д.* Структура нестационарного пограничного течения на наклонной плоскости в непрерывно стратифицированной среде // Доклады РАН. 1992. Т. 325. № 4. С. 833–837.
11. *Байдулов В.Г., Чашечкин Ю.Г.* Пограничное течение, индуцированное диффузией около неподвижного цилиндра в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1996. Т. 32. № 6. С. 818–823.

Москва

Поступила в редакцию
25.XII.1997