

УДК 532.529.6:533.6.011.72

© 1999 г. А.А. АГАНИН, М.А. ИЛЬГАМОВ

## КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ПУЗЫРЬКА ГАЗА В ЖИДКОСТИ С ОБРАЗОВАНИЕМ УДАРНЫХ ВОЛН

Предлагается модель сферически-симметричной динамики пузырька газа в центре сферического объема жидкости с образованием ударных волн в обеих средах. Принимается, что при малых дозвуковых скоростях газа происходит однородное разрежение-сжатие пузырька. В противном случае используются уравнения газовой динамики. Окружающая пузырек жидкость разбивается на две зоны. В ближней к пузырьку зоне, тонкой относительно размеров жидкой сферы, при малых изменениях плотности используется приближение малосжимаемой жидкости, в противном случае – уравнения динамики сжимаемой жидкости. В дальней зоне жидкость описывается уравнениями линейной акустики. Дан анализ колебаний радиуса пузырька, изменения давления и плотности в обеих средах.

Для изучения колебаний газового пузырька с дозвуковыми скоростями движения его поверхности обычно используются уравнения типа Рэлея – Плессета [1, 2]. При их получении разрежение-сжатие газа в пузырьке принимается однородным, а окружающая пузырек жидкость считается несжимаемой (модель Рэлея – Ламба – Плессета) или малосжимаемой. Одна из подобных моделей предложена недавно в [3]. В отличие от других работ занимаемая жидкостью область в [3] разбивается на две зоны. В ближней к пузырьку зоне жидкость полагается несжимаемой, а в дальней – принимается приближение линейной акустики. Сшивка зон производится через промежуточную бесконечность. Другое отличие от аналогичных моделей состоит в том, что в модели [3] учитываются волны, отраженные от внешней поверхности жидкого объема.

При интенсивных колебаниях в пузырьке и окружающей его жидкости могут возникать ударные волны. В этом случае модели типа Рэлея – Плессета дают большие погрешности. Недостаточно точными оказываются также и модели типа [4], в которых газовая среда в пузырьке описывается уравнениями газовой динамики, а движение поверхности пузырька – уравнениями типа Рэлея – Плессета. В частности, при таком подходе не учитываются ударные волны в жидкости. В общем случае для описания движения обеих сред необходимо использовать уравнения сжимаемой жидкости, решение которых можно находить численно. Вместе с тем такой подход крайне неэффективен, если применяется, как в работе [5], без учета особенностей задачи. Отметим две из них. Во-первых, ударные волны заметно влияют на динамику среды лишь в пузырьке и небольшой (относительно объема жидкой сферы) его окрестности. Во-вторых, влияние ударных волн существенно лишь на очень коротком промежутке времени по сравнению с периодом колебаний пузырька.

В настоящей работе предлагается удобная для расчетов модель динамики пузырька газа в жидкости, в которой для описания движения обеих сред используются как уравнения газовой динамики, так и их приближения, учитывающие характер зависимости задачи от времени.

1. Рассматриваются радиальные колебания сферического пузырька газа радиусом  $r_0$  в центре сферического объема жидкости радиусом  $R_F$ . Особенность задачи состоит в том, что радиус пузырька  $r_0$  намного меньше радиуса жидкой сферы  $R_F$  (их отношение

имеет порядок  $10^{-3}$ – $10^{-4}$ ). Колебания возбуждаются давлением, гармонически изменяющимся на поверхности  $r = R_F$ , где  $r$  – пространственная координата, отсчитываемая от центра пузырька. Длина волны внешнего возбуждения сравнима с  $R_F$ .

В общем случае для описания динамики газа и жидкости используется следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho r^2) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 u) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho r^2 u) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 + \rho r^2 u^2) = 2rp \\ \frac{\partial}{\partial t}(Er^2) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 u + Er^2 u) = 0, \quad p = p(\rho, \varepsilon), \quad \varepsilon = \frac{E}{\rho} - \frac{u^2}{2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $t$  – время,  $u$  – скорость,  $\rho$  – плотность,  $p$  – давление,  $E$  – удельная полная энергия. Газовая и жидкая среды различаются уравнением состояния  $p = p(\rho, \varepsilon)$ . Речь идет об обобщенном решении системы (1.1), допускающем существование ударных волн.

Граничные условия на внешней поверхности жидкой сферы  $r = R_F$ , в центре пузырька  $r = 0$  и на его поверхности  $r = r_b(t)$  имеют вид

$$p(R_F, t) = p_F(t) = p_F^\circ - \Delta p_F \sin \omega t; \quad u(0, t) = 0 \quad (1.2)$$

$$p(r_b - 0, t) = p(r_b + 0, t) = p_b, \quad u(r_b - 0, t) = u(r_b + 0, t) = u_b \quad (1.3)$$

где  $u_b, p_b$  – скорость и давление на поверхности пузырька,  $\Delta p_F, \omega$  – амплитуда и частота колебаний,  $p_F^\circ = p_F(0)$ .

При  $t = 0$  газ и жидкость находятся в покое. При этом

$$0 \leq r \leq r_b: \quad u(r, 0) = 0, \quad p(r, 0) = p^\circ, \quad \rho(r, 0) = \rho_g^\circ \quad (1.4)$$

$$r_b \leq r \leq R_F: \quad u(r, 0) = 0, \quad p(r, 0) = p^\circ, \quad \rho(r, 0) = \rho_f^\circ \quad (1.5)$$

где нижние индексы  $g$  и  $f$  указывают на отношение к газу и жидкости соответственно.

Определение решения задачи (1.1)–(1.5) связано с численным интегрированием, проведение которого, учитывая большое различие размеров пузырька и жидкой сферы, требует значительных затрат компьютерного времени даже для расчета одного периода внешнего возбуждения. Поэтому наряду с системой (1.1) в предлагаемой модели используются рассматриваемые ниже приближения. При построении приближений применяется идеология работы [3].

При отсутствии ударных волн система (1.1) эквивалентна системе

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u\rho}{r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad p = p(\rho) \quad (1.6)$$

Оценка слагаемых второго уравнения системы (1.6) в области пузырька дает

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim u \frac{\partial u}{\partial r} \sim \frac{u_b^2}{r_b}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \sim \frac{c^2}{r_b} \delta_g \left( \delta_g = \frac{\rho - \rho_g^\circ}{\rho_g^\circ} \right)$$

где  $c$  – местная скорость звука. Поэтому при  $M_g^2 \ll 1$  ( $M_g = u_b / c$ ) можно принять, что разрежение-сжатие газа в пузырьке происходит по всему объему однородно. В этом случае второе уравнение системы (1.6) заменяется равенством  $\partial p / \partial r = 0$ . Распределение параметров в области пузырька  $0 \leq r \leq r_b$  принимает вид

$$\rho(r, t) = \rho_g^\circ \left( \frac{r_b^\circ}{r_b} \right)^3, \quad p(r, t) = p(\rho), \quad u(r, t) = \frac{ru_b}{r_b} \quad (1.7)$$

Занимаемая жидкостью область  $r_b \leq r \leq R_F$  разбивается на две зоны, на границе между которыми  $r = r_*^\circ$  ( $(r_*^\circ / R_F)^2 \ll 1$ ,  $(r_b / r_*^\circ)^2 \ll 1$ ) ставятся условия равенства скоростей и давлений

$$u(r_*^\circ - 0, t) = u(r_*^\circ + 0, t) = u_*, \quad p(r_*^\circ - 0, t) = p(r_*^\circ + 0, t) = p_* \quad (1.8)$$

Принимается, что в дальней зоне жидкости  $r_*^\circ \leq r \leq R_F$  возмущения плотности  $\delta_f = (\rho - \rho_f^\circ) / \rho_f^\circ$  и скорости  $M_f = u / c_f^\circ$  малы ( $|\delta_f| \sim |M_f| \ll 1$ ), так что в дальней зоне справедливо приближение линейной акустики

$$\frac{1}{\rho_f^\circ} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_f^\circ} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad p - p^\circ = (c_f^\circ)^2 (\rho - \rho_f^\circ) \quad (1.9)$$

Из уравнений акустики (1.9) и граничных условий (1.2) на  $r = R_F$  и (1.8) на  $r = r_*^\circ$  можно получить

$$p_* = p_{ef}(t) + \frac{\rho_f^\circ}{r_*^\circ} Q_*' - \frac{\rho_f^\circ}{c_f^\circ} Q_*'', \quad Q_* = (r_*^\circ)^2 u_* \quad (1.10)$$

$$p_{ef}(t) = p_{ef} \left( t - \frac{2R_F}{c_f^\circ} \right) + \frac{2R_F}{c_f^\circ} p_F' \left( t - \frac{R_F}{c_f^\circ} \right) - \frac{2\rho_f^\circ}{c_f^\circ} Q_*' \left( t - \frac{2R_F}{c_f^\circ} \right)$$

где штрих означает производную по времени.

Физически параметр  $p_{ef}$  означает давление в центре жидкой сферы при отсутствии в ней пузырька [3].

С учетом относительной малости последнего слагаемого выражение (1.10) приводится к более удобному виду

$$p_* = p_{ef} + \frac{\rho_f^\circ}{r_*^\circ} Q_*' - \frac{r_*^\circ}{c_f^\circ} \frac{d}{dt} (p_* - p_{ef}) \quad (1.11)$$

В ближней к пузырьку зоне жидкости  $r_b \leq r \leq r_*^\circ$  оценка слагаемых системы (1.6) после деления первого уравнения на  $\rho_f^\circ$  и домножения второго уравнения на  $\rho / \rho_f^\circ$  имеют вид

$$\frac{1}{\rho_f^\circ} \frac{\partial \rho}{\partial t} \sim \frac{u}{\rho_f^\circ} \frac{\partial \rho}{\partial r} \sim \frac{u_b \delta_f}{r_b}, \quad \frac{\rho}{\rho_f^\circ} \frac{\partial u}{\partial r} \sim \frac{2u\rho}{\rho_f^\circ r} \sim (1 + \delta_f) \frac{u_b}{r_b}$$

$$\frac{\rho}{\rho_f^\circ} \frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{\rho u}{\rho_f^\circ} \frac{\partial u}{\partial r} \sim (1 + \delta_f) \frac{u_b^2}{r_b}, \quad \frac{1}{\rho_f^\circ} \frac{\partial p}{\partial r} \sim \frac{(c_f^\circ)^2}{r_b} \delta_f$$

где  $c_f^\circ$  — невозмущенная скорость звука в жидкости.

В ближней зоне жидкости из-за соседства с газовым пузырьком при малых изменениях плотности скорости и смещения частиц жидкости больше, чем в дальней зоне. Поэтому в ближней зоне при  $|\delta_f| \ll 1$  можно принять  $|\delta_f| \sim M_{fb}^2$  ( $M_{fb} = u_b / c_f^\circ$ ). Тогда при  $M_{fb}^2 \ll 1$  (или  $|\delta_f| \ll 1$ ) в силу приведенных оценок система (1.6) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho_f^\circ} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad p - p^\circ = (c_f^\circ)^2 (\rho - \rho_f^\circ) \quad (1.12)$$

Приближение (1.12) с точностью до последнего равенства совпадает с прибли-

жением несжимаемой жидкости, в котором вместо него принимается  $\rho = \rho_f^\circ$ . Из-за этого различия связь между решениями системы (1.6) и приближения (1.12) является боолее естественной, чем связь между решениями системы (1.6) и приближения несжимаемой жидкости, поскольку принятие допущения  $\rho = \rho_f^\circ$  в приближении несжимаемой жидкости означает отступление от необходимого для (1.6) соотношения  $p = p(\rho)$ .

В соответствии с (1.12) распределением параметров в ближней зоне жидкости  $r_b \leq r \leq r_*$  имеет вид

$$p(r, t) = p_b + \rho_f^\circ \left( \frac{u_b^2}{2} - \frac{Q_b'}{r_b} + \frac{Q_b'}{r} - \frac{Q_b^2}{2r^4} \right) \quad (1.13)$$

$$u(r, t) = Q_b r^{-2}, \quad \rho(r, t) = \rho_f^\circ + (p - p^\circ)(c_f^\circ)^{-2} \quad (Q_b = r_b^2 u_b)$$

Если в дальней зоне жидкости справедливо приближение линейной акустики (1.9), а в ближней – приближение малосжимаемой жидкости (1.12), то из (1.13) следует  $Q_* = Q_b$ . Подстановка выражения  $p_*$  из (1.10) в первое равенство (1.13) дает соотношение для определения  $Q_b$

$$-\frac{Q_b'}{r_b} + \frac{u_b^2}{2} + \frac{p_b - p_{ef}}{\rho_f} + \frac{Q_b''}{c_f} = 0$$

которое с учетом относительной малости последнего слагаемого приводится к виду

$$-\frac{Q_b'}{r_b} + \frac{u_b^2}{2} + \frac{p_b - p_{ef}}{\rho_f} + \frac{r_b}{\rho_f c_f} \frac{d}{dt} (p_b - p_{ef}) = 0 \quad (1.14)$$

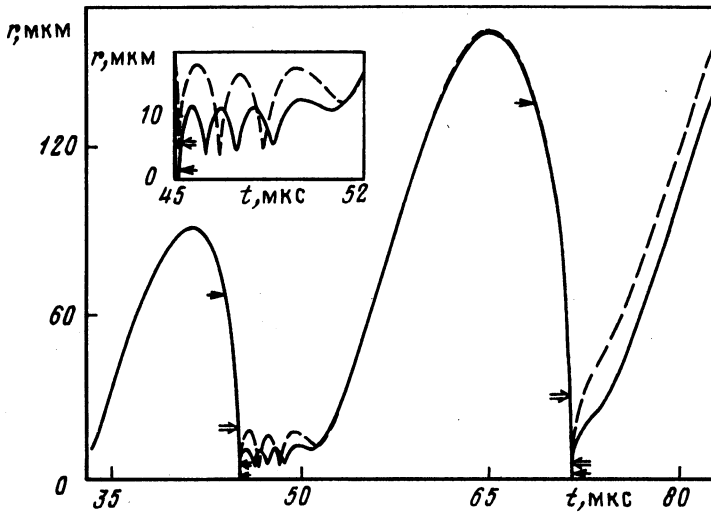
Предлагаемая модель состоит в том, что: 1) в пузырьке  $0 \leq r \leq r_b$  при малых значениях параметра  $M_g^2$  используются соотношения (1.7); в противном случае применяется система (1.1); 2) в ближней зоне жидкости  $r_b \leq r \leq r_*$  при малых значениях параметра  $\delta_f$  используется приближение (1.12); в противном случае применяется система (1.1); 3) в дальней зоне жидкости  $r_* \leq r \leq R_F$  принимается приближение линейной акустики. Поэтому дальняя зона из непосредственного рассмотрения исключается. Ее влияние учитывается через граничное условие (1.11) на поверхности  $r = r_*$ .

2. В качестве примера применения предлагаемой модели рассматривается решение задачи при следующих данных:  $\Delta p_F = 0,25$  бар,  $\omega = 2\pi(45 \text{ кГц})$ ,  $\rho_g^\circ = 1,16 \text{ кг/м}^3$ ,  $T_g^\circ = 300 \text{ К}$ ,  $c_f^\circ = 1500 \text{ м/с}$ ,  $\rho_f^\circ = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $R_F = 5 \text{ см}$ ,  $r_b^\circ = 10 \text{ мкм}$ ,  $p_F^\circ = p^\circ = 1 \text{ бар}$ . Здесь  $T_g^\circ$  – абсолютная температура газа при  $t = 0$ . При принятых значениях на фазе схлопывания пузырька возникают ударные волны. Уравнения состояния газа и жидкости имеют вид

$$p = (\gamma - 1)\rho\epsilon \quad (\gamma = 1,4),$$

$$p = (\Gamma - 1)\rho\epsilon + k_1^2(\rho - k_2) \quad (\Gamma = 7,15, \quad k_1 \approx c_f^\circ, \quad k_2 \approx \rho_f^\circ)$$

Для интегрирования системы (1.1) используется численная методика работы [6]. Расчет ведется в подвижной системе координат. Внутри пузырька применяется равномерная сетка, состоящая из 400 ячеек. В ближней зоне жидкости сетка состоит из 800 ячеек с увеличивающимся по геометрической прогрессии шагом в направлении от  $r_b$  к  $r_*$ . В каждый

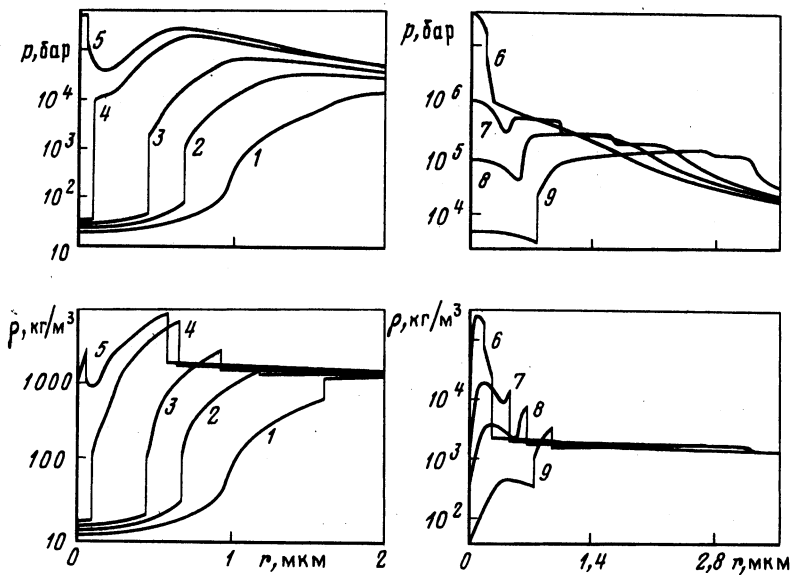


Фиг. 1. Изменение радиуса пузырька  $r_b$  во времени. Сплошные кривые – модель настоящей работы, штриховые кривые – модель [4]

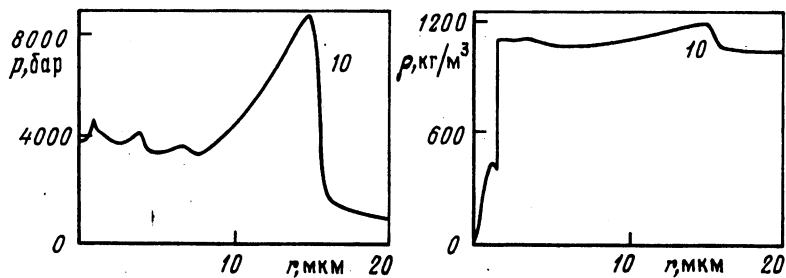
момент времени сетка перестраивается так, что размер прилегающей к пузырьку ячейки жидкости составляет  $1/4$  размера ячеек равномерной сетки в пузырьке. Принимается  $r_* = 200$  мкм.

На фиг. 1 представлено изменение радиуса пузырька  $r_b$  во времени. До конца приведенного интервала времени волны, отраженные от внешней поверхности жидкой сферы  $R_F$ , еще не достигают поверхности пузырька (что происходит при  $t \approx 3R_F/c_f$ ). Расчету по модели настоящей работы соответствует сплошная кривая. Моменты переключения от системы (1.1) к приближениям и от приближений к системе (1.1) указаны стрелками. Одинарные стрелки указывают на переключение в пузырьке, двойные стрелки – на переключение в ближней зоне жидкости. Там, где стрелки направлены вправо, происходит переключение от приближения к системе (1.1), а там, где влево, – от системы (1.1) к приближению.

На начальном отрезке времени значения параметров  $M_g^2$  и  $M_{fb}^2$  малы. Поэтому здесь используются приближения для газа в пузырьке и жидкости в ближней зоне. Решение находится интегрированием уравнения (1.14). Первое переключение к системе (1.1) производится в области пузырька при выполнении условия  $M_g^2 = 0,04$ . В этот момент  $u_b \approx -23$  м/с. (Отметим, что аналогичная по смыслу процедура, а именно интерполяция с грубой сетки на мелкую, производится в работе [4] при  $u_b = 0$ , а в работе [5] – при  $u_b = -104,68$  м/с.) После этого переключения решение определяется интегрированием системы (1.1) в пузырьке совместно с уравнением (1.14). Последнее играет роль граничного условия. Через некоторое время при  $M_{fb}^2 = 0,0225$  выполняется переключение к системе (1.1) в ближней зоне жидкости. В момент переключения  $u_b \approx -225$  м/с, максимальное значение давления в ближней зоне жидкости составляет 100 бар. Далее до следующей стрелки для моделирования динамики газа в пузырьке и жидкости в ближней зоне используется система (1.1). В качестве граничного условия на внешней границе ближней зоны применяется уравнение (1.11). На этом отрезке времени происходят наиболее динамичные процессы с образованием ударных волн. Как видно из фиг. 1, этот отрезок очень мал по сравнению со всем периодом колебаний. Обратный переход от системы (1.1) к приближениям осуществляется



Фиг. 2. Пространственные распределения давления  $p$  и плотности  $\rho$  для девяти последующих моментов времени, характеризующих наиболее интенсивную часть фазы схлопывания пузырька



Фиг. 3. Пространственные распределения давления  $p$  и плотности  $\rho$  в один из моментов времени после завершения интенсивной части фазы схлопывания пузырька

сначала в пузырьке (используется условие  $M_g^2 = 0,04$ ), а затем в ближней зоне жидкости (используется условие  $M_{fb}^2 = 0,0225$ ). Из фиг. 1 видно, что и в ходе второго более интенсивного колебания пузырька последовательность переключений остается прежней.

Динамику волн в пузырьке и ближней зоне жидкости представляют фиг. 2 и 3, на которых для 10 последующих моментов времени  $t_1, t_2, \dots, t_{10}$  (номер кривой соответствует номеру момента времени) приведены пространственные распределения давления  $p$  и плотности  $\rho$ . Положение поверхности пузырька определяет вертикальный участок в графиках плотности. В интервале времени  $t_1 < t < t_2$  в пузырьке в окрестности  $r = 0,75$  мкм образуется ударная волна, интенсивность которой по мере схождения к полюсу возрастает (фиг. 2, кривые 1-4). После ее фокусировки в центре пузырька в интервале  $t_4 < t < t_5$  возникает расходящаяся ударная волна, которая в интервале  $t_6 < t < t_7$  взаимодействует с поверхностью пузырька. В результате этого взаимодействия в пузырьке образуется сходящаяся, а в жидкости – расходящаяся волны сжатия (фиг. 2, кривые 7). С течением времени сходящаяся волна сжатия

становится ударной (фиг. 2, кривые 8, 9). Далее происходящее в интервале  $t_2 < t < t_3$  повторяется еще несколько раз. При этом интенсивность последующих волн с каждым разом падает. Через некоторое время наиболее заметной остается лишь волна сжатия, ушедшая в жидкость первой, хотя новые все более слабые волны в пузырьке продолжают появляться (фиг. 3, кривые 10).

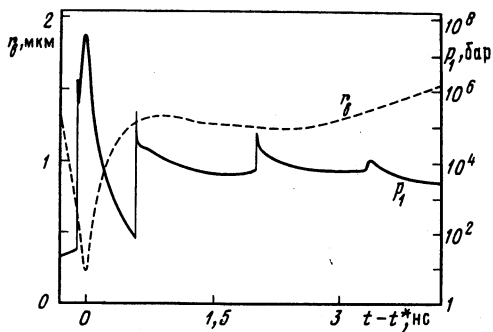
На фиг. 4 приведены зависимости давления  $p_1$  (сплошная кривая) в ячейке возле полюса и радиуса пузырька  $r_b$  (штриховая кривая) от относительного времени  $t - t^*$ , где  $t^*$  – время, при котором радиус пузырька достигает своего минимального значения. После фокусировки в центре пузырька первой ударной волны (первый скачок в графике  $p_1$ ) давление в центре пузырька продолжает нарастать адиабатически. Продолжает уменьшаться также и радиус пузырька  $r_b$ . Минимальное значение радиуса пузырька 0,229 мкм достигается в момент взаимодействия поверхности пузырька с первой расходящейся ударной волной. После этого пузырек быстро расширяется. Второй разрыв в графике  $p_1$  соответствует фокусировке в центре пузырька второй ударной волны, амплитуда которой хотя и меньше, чем у первой, но все еще значительна. Возникшая в результате фокусировки вторая расходящаяся ударная волна останавливается при  $t - t^* \approx 1,4$  нс едва начавшееся уменьшение радиуса пузырька  $r_b$ . Интенсивность третьего разрыва в полюсе заметно меньше, чем у первых двух. После взаимодействия третьей расходящейся ударной волны с поверхностью пузырька при  $t - t^* \approx 2,4$  нс возрастание радиуса пузырька происходит монотонно.

Для оценки модели типа [4], в которой газ в пузырьке описывается уравнениями газовой динамики, а скорость поверхности пузырька – уравнениями типа Рэлея – Плессета, в задачах с ударными волнами был проведен расчет рассмотренной выше задачи с применением системы (1.1) в области пузырька и граничного условия (1.14) на его поверхности. Результаты этого расчета даны на фиг. 1 (штриховые кривые) и 5 (содержание и принятые обозначения фиг. 5 те же, что у фиг. 4).

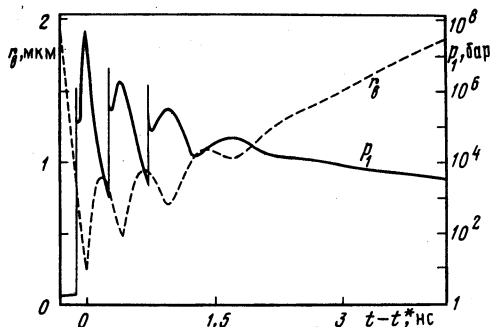
Сравнение с результатами модели настоящей работы показывает, что упрощенное описание сжимаемости жидкости в модели [4] приводит к ряду заметных расхождений как на завершающей стадии фазы схлопывания пузырька (фиг. 4, 5), так и после нее (фиг. 1). В частности, на завершающей стадии фазы схлопывания пузырька по модели настоящей работы (фиг. 4) радиус пузырька  $r_b$  после достижения минимального значения резко увеличивается до уровня  $\sim 1,2$  мкм, остается на этом уровне в течение  $\sim 2$  нс, а затем плавно возрастает. В соответствии с моделью [4] (фиг. 5) радиус пузырька после достижения минимального значения 0,246 мкм испытывает несколько колебаний быстро затухающей амплитуды, отсутствующих на фиг. 4.

Имеются различия и в графиках изменения давления  $p_1$ . Например, максимальное значение  $p_1$  на фиг. 4 составляет 37,3 Мбар, а на фиг. 5 – 47,4 Мбар. После завершающей стадии фазы схлопывания пузырька имеет место расхождение в амплитуде и количестве отскоков пузырька (вставка на фиг. 1, где более подробно представлены фрагменты кривых  $r_b(t)$  в интервале  $45 \leq t \leq 52$  мкс). При использовании модели [4] (штриховые кривые) амплитуда отскоков получается примерно в 2 раза больше, а их количество – на один меньше.

**Заключение.** Предложена удобная для расчетов модель сферически-симметричной динамики пузырька газа, расположенного в центре сферического объема жидкости. Модель основана на совместном применении уравнений газовой динамики и ее приближений, построенных в соответствии с идеологией работы [3]. В пузырьке при малых дозвуковых (относительно скорости звука в газе) скоростях движения его поверхности используется приближение однородного разрежения-сжатия, в противном случае – уравнения газовой динамики. В ближней к пузырьку зоне жидкости, тонкой относительно размеров жидкой сферы, при малых дозвуковых (относительно скорости звука в жидкости) скоростях движения поверхности пузырька используется приближение малосжимаемой жидкости, в противном случае – уравнения газовой динамики. В дальней зоне жидкости принимается приближение линейной акустики. Таким образом



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 4. Зависимости радиуса пузырька  $r_b$  и давления в центре пузырька  $p_1$  от относительного времени  $t-t^*$ , где  $t^*$  – время, при котором радиус пузырька достигает своего минимального значения

Фиг. 5. То же, что и на фиг. 4, но для модели [4]

сочетаются точность полных уравнений газовой динамики и экономичность их приближений. В задачах с ударными волнами в пузырьке и окружающей жидкости применение моделей типа [4], в которых сжимаемость жидкости трактуется упрощенно, приводит на завершающей стадии фазы схлопывания пузырька к неверному описанию характера изменения параметров не только жидкости, но и газа.

Авторы благодарны Р.И. Нигматулину и И.Ш. Ахатову за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00234).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rayleigh. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity // Philos. Mag. 1917. V. 34. № 200. P. 94–97.
2. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
3. Нигматулин Р.И., Ахатов И.Ш., Вахитова Н.К. О сжимаемости жидкости в динамике газового пузырька // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 6. С. 768–771.
4. Wu C.C., Roberts P.H. Shock-wave propagation in a sonoluminescing gas bubble // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. № 22. P. 3424–3427.
5. Moss W.C., Clarke D.B., White J.W., Young D.A. Hydrodynamic simulations of bubble collapse and picosecond sonoluminescence // Phys. Fluids. 1994. V. 6. № 9. P. 2979–2985.
6. Аганин А.А., Ильгамов М.А. Особенности расчета нелинейных сферических волн в газе и жидкости методом распада разрыва // Моделирование динамических процессов в сплошных средах. Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва, 1997. С. 109–194.

Казань

Поступила в редакцию  
27.X.1998