

УДК 532.526:537.84

© 1999 г. А.Я. ВОРОНОВ

О СТРУКТУРЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ РЕКОМБИНИРУЮЩЕЙ ПЛАЗМЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО СТОЛБА ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА

Построена погранслоная асимптотика решения нелинейной краевой задачи, описывающей распределения основных физических характеристик рекомбинирующей плазмы электроположительного газа вдоль радиуса положительного столба тлеющего разряда, находящегося в стационарном диффузном состоянии. Проведен анализ структуры пристеночного погранслоя такой плазмы. Обсуждены предложения способов удержания разряда в диффузном состоянии.

В настоящей работе, ставя цели [1], в исходные дифференциальные уравнения плазмы введены члены, учитывающие роль нелинейного элементарного процесса объемной электрон-ионной рекомбинации, влияние которого с увеличением плотности плазмы растет. Исследование этого влияния может оказаться полезным не только с чисто научной, но и с практической точки зрения. Здесь имеется в виду поиск дополнительных объяснений известного физического явления, которое наблюдается в газовом разряде при тех же условиях, т.е. при увеличении тока, проходящего вдоль оси газоразрядной трубки. Как показывает эксперимент, в этом случае положительный столб тлеющего разряда становится неустойчивым и может произойти его шнурование. Считается, что переход разряда в дугу имеет тепловую природу [2, 3]. Однако это явление наблюдается и в импульсных разрядах, за время существования которых нейтральный газ не успевает даже прогреться. Последний экспериментальный факт дает основание сделать предположение, что упомянутое явление имеет более сложную природу, а не только тепловую.

1. Математическую модель изучаемого объекта запишем в безразмерных величинах [1]

$$h \frac{d}{dx} \left(x \frac{dN_e}{dx} \right) + v \frac{d}{dx} (xVN_e) + xh(\mu_e - \gamma\theta N_p)N_e = 0$$

$$h \frac{d}{dx} \left(x \frac{dN_p}{dx} \right) - \frac{d}{dx} (xVN_p) + xh(\mu_p - \theta N_p)N_e = 0$$

$$h \frac{d}{dx} (xV) = x(N_p - N_e) \tag{1.1}$$

$$N_a(1, h) = b_a(h) = \sum_{s=0}^{\infty} h^s b_s^{(a)}, \quad N_p = 1, \quad \frac{dN_e}{dx} = 0, \quad V = 0 \quad (x = 0) \tag{1.2}$$

$$0 \leq x = \frac{r}{R} \leq 1, \quad \frac{4\pi e^2 R^2}{k_0 T} c_a = AN_a, \quad R \frac{k_p}{D_p} E_r = \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dx}, \quad \theta = \frac{\alpha R^2}{D_p} c_p(0)$$

$$v = \frac{T}{T_e}, \quad A = h^{-2} = \frac{4\pi e^2 R^2}{k_0 T} c_p(0) = \frac{R^2}{r_d^2}, \quad \gamma = \frac{D_p}{D_e} = v\sigma \quad (a = e, p)$$

$$V(x, h) = h\varepsilon(x, h), \quad \mu_a = \beta \frac{R^2}{D_a}$$

Здесь β – коэффициент ионизации прямым электронным ударом, r_d – радиус Дебая для положительных ионов плазмы на оси газового разряда, c_a – концентрация заряженных компонентов плазмы сорта "а", D_a и k_a – их коэффициенты свободной диффузии и подвижности, T и T_e – температуры нейтральной среды и свободных электронов плазмы, Φ – безразмерный потенциал поля ε , α – коэффициент объемной электрон-ионной рекомбинации, R – радиус газоразрядной трубки, k_0 – постоянная Больцмана, e – элементарный заряд.

Исследования краевых задач для системы (1.1) в случае конечных трехмерных областей с гладкими границами, показали, что они имеют единственное нетривиальное решение не при любых значениях параметра $\mu_e = \gamma\mu_p$, т.е. это задачи на определение собственных значений. Физический смысл имеет только положительное и наименьшее из них. Это следует из требования неотрицательности функций c_a в области, занятой плазмой. Ниже на простых примерах этот вывод будет подтвержден для задачи (1.1), (1.2). Таким образом, неизвестными в этой задаче считаем функции $N_a(x, h)$, $V(x, h)$ и параметр μ_a . Причем функции N_a на $[0, 1]$ должны быть неотрицательными. Асимптотические приближения при малых h для этих неизвестных строятся в виде рядов по степеням h , состоящих из регулярной и двух погранслоиных частей [1, 4]

$$W(x, h) = \sum_{s=0}^{\infty} h^s [w_s(x) + \Pi_s w(x_1) + Q_s w(x_2)]$$

$$\mu_a = \sum_{s=0}^{\infty} h^s \mu_s^{(a)}, \quad x_1 = \frac{x}{h}, \quad x_2 = \frac{1-x}{h} \quad (a = e, p) \quad (1.3)$$

Здесь $W(x, h)$ обозначает совокупность неизвестных функций. При определении регулярной части разложения (1.3) находим, что решение вырожденной системы ($h = 0$) имеет вид [1] $v_0(x) \equiv 0$, $n_0^{(e)} \equiv n_0^{(p)} = \alpha_0(x)$, где $\alpha_0(x)$ – произвольная функция, определяемая на следующем шаге.

При составлении уравнений для $s = 1$ получаем систему вида

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{d\alpha_0}{dx} \right) + v \frac{d}{dx} (xv_1\alpha_0) + x\gamma(\mu_0^{(p)} - \theta\alpha_0)\alpha_0 = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{d\alpha_0}{dx} \right) - \frac{d}{dx} (xv_1\alpha_0) + x(\mu_0^{(p)} - \theta\alpha_0)\alpha_0 = 0$$

$$0 = n_1^{(p)} - n_1^{(e)}, \quad \alpha_0 = 1, \quad v_1 = 0 \quad (x = 0), \quad \alpha_0 = b_0 \quad (x = 1) \quad (1.4)$$

Новый параметр b_0 имеет тот же смысл, что и в [1].

Из (1.4) следует: $n_1^{(p)} \equiv n_1^{(e)} = \alpha_1(x)$, где $\alpha_1(x)$ – неизвестная функция, которая определяется на следующем этапе

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{d\alpha_0}{dx} \right) + x(\lambda^2 - \eta\alpha_0)\alpha_0 = 0, \quad \frac{d}{dx} (xv_1\alpha_0) = \frac{1-\gamma}{v(1+\sigma)} x(\lambda^2 - \eta\alpha_0)\alpha_0 \quad (1.5)$$

$$\alpha_0(0, \eta) = 1, \quad \alpha_0(1, \eta) = b_0, \quad v_1(0, \eta) = 0, \quad \lambda^2 = v \frac{1+\sigma}{1+v} \mu_0^{(p)}, \quad \eta = v \frac{1+\sigma}{1+v} \theta$$

Краевая задача (1.5) при $\eta = 0$, $b_0 = 0$ имеет нетривиальное решение только при строго определенных значениях параметра λ , которые являются корнями функции Бесселя $J_0(x)$. Но требование $J_0(x) \geq 0$ на $[0, 1]$ выбирает из бесконечного множества допустимых значений λ только одно – наименьший положительный корень $J_0(x)$. Аналогичные выводы справедливы и для возмущенной задачи (1.5) при $\eta = 0$, но $0 < b_0 < 1$. Только теперь допустимое значение λ будет наименьшим положительным корнем уравнения $J_0(\lambda) = b_0$. Согласно теории возмущения, это значение λ может быть представлено в виде разложения по степеням малого параметра b_0 [1]. Поскольку задача (1.5) с $\eta \neq 0$ и $b_0 \neq 0$ является двукратно возмущенной, то ее решение можно искать в виде

$$\alpha_0(x, \eta) = \sum_{m,r=0}^{\infty} \eta^m b_0^r a_{mj}^{(r)} J_0(\mu_j x) + b_0, \quad \lambda^2 = \sum_{m,r=0}^{\infty} \eta^m b_0^r \lambda_{mr} \quad (1.6)$$

Неизвестные коэффициенты $a_{mj}^{(r)}$ и λ_{mr} в разложениях (1.6) определяются стандартным способом. Отметим только некоторые свойства сходимости рядов (1.6). Ряды Фурье – Бесселя для всех $m, r \geq 0$ равномерно сходятся на $[0, 1]$ [1]. В силу того что $b_0 \ll 1$, ряды по положительным степеням этого параметра сходятся очень быстро. Ряды по положительным степеням параметра η сходятся как при $\eta \leq 1$, так и при $\eta > 1$, что устанавливается из численного анализа рекуррентных формул. Такой анализ, в частности, показывает, что $|a_{mj}^{(r)}| \rightarrow 0$ при увеличении всех индексов, причем так, что для $m \geq 15$ и $r \geq 9$ $|a_{mj}^{(r)}| < 10^{-20}$ сразу для всех $j \geq 1$. Поведение коэффициентов λ_{mr} с увеличением r и m несколько сложнее. Но достаточная малость параметра b_0 обеспечивает сходимость разложения и для λ^2 .

Решение задачи (1.5) может быть построено и в виде степенного ряда

$$\alpha_0(x, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{2(n-1)}, \quad c_{n+1} = \frac{1}{4n^2} \left[\eta \sum_{i=1}^n c_i c_{n+1-i} - \lambda^2 c_n \right], \quad n \geq 1, \quad c_1 = 1 \quad (1.7)$$

В этом случае допустимым значением λ , при котором $\alpha_0(x, \eta) \geq 0$ на $[0, 1]$, будет наименьший положительный корень уравнения $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = b_0$.

В численных расчетах удобнее использовать представление решения задачи (1.5) в виде (1.7). Оно позволяет, например, находить допустимое λ практически при любом как угодно большом значении η .

Наличие связей между задачами (1.5) и (1.1), (1.2) подтверждается еще и тем, что при $\gamma = 1$ система (1.1) переходит в уравнение задачи (1.5). Поэтому, во-первых, физический смысл сингулярной возмущенности (1.1) становится от этого еще определенной и, во-вторых, в задаче (1.1), (1.2) параметр $\mu_e = \gamma \mu_p$ надо считать неизвестным и искать его в виде (1.3).

2. Определим пограничные функции. Как и в [1], $P_0 w(x_1) \equiv 0$, а система дифференциальных уравнений для $Q_0 w(x_2)$ имеет вид

$$\frac{dQ_0 n_a}{dx_2} + G_a (b_0 + Q_0 n_a) Q_0 v = 0, \quad \frac{dQ_0 v}{dx_2} = Q_0 n_e - Q_0 n_p, \quad G_e = -v, \quad G_p = 1 \quad (2.1)$$

$$Q_0 n_a(0) = b_0^{(a)} - b_0, \quad Q_0 w(\infty) = 0 \quad (a = e, p)$$

Если учесть, что $Q_0 v(x_2) = dQ_0 \varphi / dx_2$, то первые интегралы системы (2.1) можно записать в виде

$$Q_0 n_a(x_2) = b_0 [\exp(-G_a Q_0 \varphi) - 1], \quad b_0 = b_0^{(a)} \exp[G_a Q_0 \varphi(0)] \quad (2.2)$$

поскольку $b_0 = b_0^{(a)} \exp(-G_a g)$, $g = (1 + v)^{-1} \ln(b_0^{(p)} / b_0^{(e)})$, $g = -Q_0 \varphi(0)$.

Используя (2.1) и (2.2), можно получить несколько эквивалентных дифференциальных уравнений, определяющих $Q_0\varphi(x_2)$. Краевая задача для одного из них имеет вид

$$\frac{d^2 Q_0\varphi}{dx_2^2} = b_0[\exp(vQ_0\varphi) - \exp(-Q_0\varphi)], \quad Q_0\varphi(\infty) = 0, \quad Q_0\varphi(0) = -g$$

или после однократного интегрирования

$$\left(\frac{dQ_0\varphi}{dx_2}\right)^2 = \frac{2b_0}{v}[\exp(vQ_0\varphi) + v\exp(-Q_0\varphi) - 1 - v], \quad Q_0\varphi(0) = -g$$

Это – уравнение с разделяющимися переменными. Его решение для любого значения $|g|$ численно легко табулируется в виде $x_2 = f(Q_0\varphi)$. Зная эту зависимость, можно составить таблицы для остальных функций. Таким образом, найдены все главные члены асимптотики решения задачи (1.1), (1.2).

3. На фиг. 1 и 2 представлены графики функций для N_e

$$N_e(x, \eta, h) \approx n_0^{(e)}(x, \eta) + Q_0 n_e(x_2) = \alpha_0(x, \eta) + b_0[\exp(vQ_0\varphi) - 1]$$

$$\varepsilon(x, \eta, h) \approx v_1(x, \eta) + \frac{1}{h} Q_0 \nu(x_2), \quad j_p(x, \eta, h) = -\frac{dN_p}{dx} + N_p \varepsilon$$

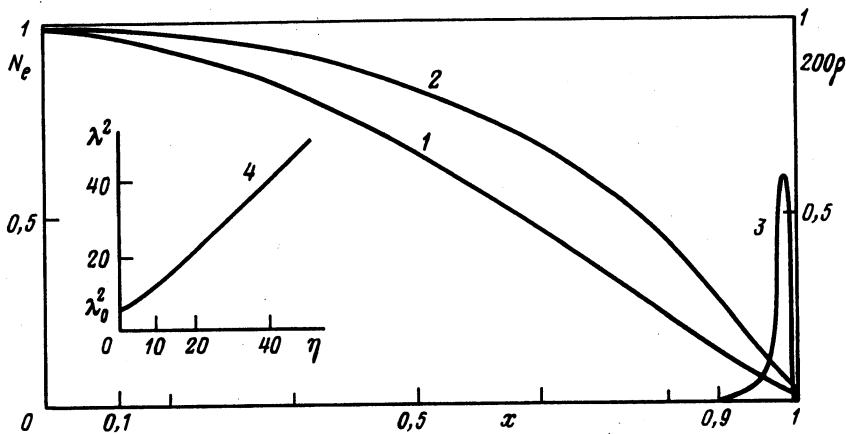
$$\rho(x, \eta, h) = N_p - N_e \approx \frac{h^2}{x} \frac{d}{dx}(xv_1) + Q_0 n_p(x_2) - Q_0 n_e(x_2)$$

$$v = 10^{-2}, \quad \sigma = 4 \cdot 10^{-4}, \quad b_0 = 0,015; \quad h = 5 \cdot 10^{-4} \eta^{-1/2} \quad (\eta \geq 4),$$

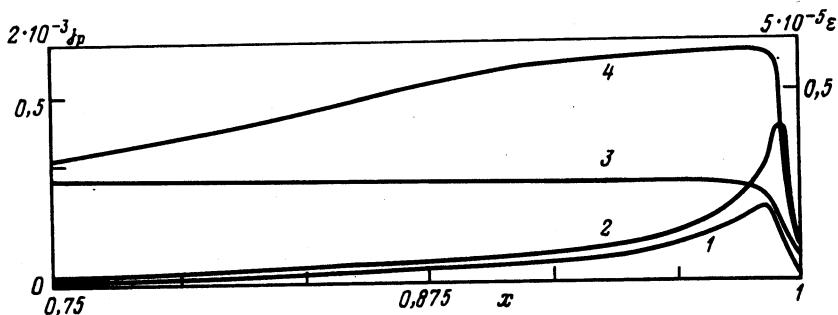
$$\alpha = 10^{-7} \text{ см}^2/\text{с}, \quad R = 1 \text{ см}, \quad p = 1 \text{ тор}, \quad T = 360 \text{ К}$$

Кривая 2 на фиг. 1, описывающая распределение заряженных компонентов плазмы положительного столба тлеющего разряда вдоль его радиуса при $\eta > 1$, свидетельствует о том, что плотность плазмы имеет вблизи оси постоянное значение, равное единице, вплоть до $x \approx 0,15$ ($\eta = 40$) или $x \approx 0,35$ ($\eta = 70$). Такой вид профиля распределений $N_a(x, \eta)$ известен (см., например, [5, 6]). Что же касается пристеночного пограничного слоя для $\eta > 1$, то по структуре он не отличается от случая $\eta = 0$ [1]. Только теперь надо иметь в виду, что при $\eta \rightarrow \infty$ $h \rightarrow 0$, следовательно, и толщина погранслоя $h|\ln n| \rightarrow 0$. При этом $\max \varepsilon$ вблизи $x = 1$ будет возрастать ($b_0 = \text{const}$). Так, при $b_0 = 0,015$ $E_r = \varepsilon D_p / R k_p = 127; 209,3; 319,4$ ($\text{в} \cdot \text{см}^{-1}$) для $x \approx 0,987; 0,992; 0,9946$ и $\eta = 4; 30; 70$. Кривые 3 и 4 на фиг. 2 определяют плотность потока заряженных частиц плазмы вдоль радиуса и свидетельствуют о том, что с ростом η она увеличивается. Причем для достаточно большого значения η у кривых $j_p(x, \eta, h)$ появляется четко выраженный максимум, расстояние от которого до стенки с ростом η уменьшается. Например, при $\eta = 60$ оно уже сравнимо со средней длиной свободного пробега частиц. Таким образом, с увеличением параметра η потери заряженных компонентов плазмы возрастают по причине роста интенсивности не только объемных, но и пристеночных процессов рекомбинации. В стационарном случае эти потери должны компенсироваться ионизационными процессами соответствующей интенсивности. Кривая 4 на вставке фиг. 1 подтверждает этот вывод.

В [7] экспериментально показано, что при росте силы тока I , проходящего вдоль оси газоразрядной камеры, когда увеличиваются параметры η и μ_p , растет плотность ионного тока на стенку. При некотором I коэффициент μ_p окажется меньше необходимого значения. В этом случае газовый разряд перейдет в иное состояние, в котором потери частиц будут полностью компенсироваться ионизационными процессами. Для того чтобы такой разряд удержать в диффузном состоянии, надо увеличить μ_p , но с



Фиг. 1. Графики функций: 1 - $F_1(x) = J_0(\lambda_0 x)$, 2 - $F_2(x) = N_e(x, \eta, h)$, 3 - $F_3(x) = 200\rho(x, \eta, h)$, 4 - $\lambda^2 = \lambda^2(\eta)$ ($\eta = 40, J_0(\lambda_0) = b_0$)



Фиг. 2. Графики функций при $\eta \leq 1, h = 3 \cdot 10^{-4}$ (кривые 1 и 3) и $\eta = 40, h = 5 \cdot 10^{-4} \eta^{-1/2}$ (кривые 2 и 4): 1, 2 - $F_{4,5}(x) = 5 \cdot 10^{-5} \epsilon(x, \eta, h)$, 3, 4 - $F_{6,7}(x) = 2 \cdot 10^{-3} j_p(x, \eta, h)$

постоянным η . Это можно сделать за счет внешнего ионизатора, например с помощью ультрафиолетового излучения, как это было выполнено в эксперименте с объемным разрядом [8].

Заметим, что утвердившийся для обозначения канального разряда термин "контрагированный" представляется не очень удачным, поскольку здесь никакого сжатия не наблюдается. Замена одного типа разряда другим происходит в силу способности плазмы во внешнем электрическом поле к самоорганизации. Поэтому для перехода разряда из диффузного состояния в дугу более подходит термин "шнурование".

Заключение. На основе анализа погранслойной асимптотики решения задачи (1.1), (1.2) установлено, что с увеличением плотности плазмы положительного столба тлеющего разряда растут потери ее заряженных компонентов по причине роста интенсивности не только объемных, но и поверхностных процессов рекомбинации. С увеличением силы газоразрядного тока это приводит к нарушению баланса между ними и процессами ионизации. В результате - шнурование, где нарушенный баланс восстанавливается. Переход газового разряда в иное состояние происходит в силу способности плазмы, находящейся во внешнем электрическом поле, к самоорганизации. Отметим, что исходная математическая модель (1.1), (1.2) с $\mu_p = \text{const}$ не имеет решений, способных описывать плазменный шнур со свободными границами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воронов А.Я.* О структуре пограничного слоя плазмы положительного столба тлеющего разряда // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 101–108.
2. *Елецкий А.В.* Механизмы сжатия тлеющего разряда // Химия плазмы / Под ред. Б.М. Смирнова. М.: Энергоиздат, 1982. Вып. 9. С. 151–178.
3. *Баранов В.Ю., Ульянов К.Н.* Контракция положительного столба. I // Журн. техн. физики. 1969. Т. 39. Вып. 2. С. 249–258.
4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
5. *Елецкий А.В., Рахимов А.Т.* Неустойчивости в плазме газового разряда // Химия плазмы / Под ред. Б.М. Смирнова. М.: Атомиздат, 1977. Вып. 4. С. 123–167.
6. *Чекмарев И.Б., Чекмарева О.М.* Обобщение решения Шоттки на случай объемной рекомбинации // Журн. техн. физики. 1987. Т. 57. Вып. 5. С. 984, 985.
7. *Захарова В.М., Каган Ю.М., Мустафин К.С., Перель В.И.* О зондовых измерениях при средних давлениях // Журн. техн. физики. 1960. Т. 30. Вып. 4. С. 442–449.
8. *Курбанисмаилов В.С., Омаров О.А.* К вопросу о характере контрагирования объемного разряда в гелии атмосферного давления // Теплофизика высоких температур. 1995. Т. 33. № 3. С. 346–350.

Саров

Поступила в редакцию
12.I.1996