

УДК 532.59

© 1999 г. И.Б. БАХОЛДИН

### СКАЧКИ В МОДЕЛЯХ, ОПИСЫВАЕМЫХ ОБОБЩЕННЫМИ УРАВНЕНИЯМИ КОРТЕВЕГА – ДЕ ВРИЗА

Ранее [1] была разработана общая теория, позволяющая прогнозировать характер структур скачков в моделях без диссипации, но с дисперсией. В данной работе выводы этой теории применены к конкретным уравнениям типа уравнений Кортевега – де Вриза. Рассматривается хорошо исследованный случай обычного уравнения Кортевега – де Вриза, а затем исследуются более сложные случаи с модифицированными нелинейными и дисперсионными членами. В этих моделях в отличие от моделей с диссипацией встречаются специфические типы скачков: между однородным и периодическим состоянием, между двумя периодическими состояниями и т.д. Исследуются структуры этих скачков. Для сопоставления рассматриваются скачки, описываемые уравнениями Бюргера и Кортевега – Бюргера. Теория предполагает наличие усредненных уравнений для периодических состояний. Рассматриваются способы вывода таких уравнений и законы сохранения, позволяющие найти условия на скачках.

Наиболее простые модельные уравнения для скачков с диссипацией и дисперсией это уравнение Бюргера и уравнение Кортевега – де Вриза

$$a_t + aa_x + b_2 a_{xx} = 0, \quad b_2 < 0 \quad (0.1)$$

$$a_t + aa_x + b_3 a_{xxx} = 0 \quad (0.2)$$

Для обоих уравнений можно рассмотреть одно и то же упрощенное уравнение для процессов с медленными изменениями в пространстве

$$a_t + aa_x = 0 \quad (0.3)$$

Это нелинейное уравнение гиперболического типа, характеристическая скорость равна  $a$ .

Соотношение на скачках в случае, когда их структура описывается уравнением (0.1), можно получить, приведя это уравнение к форме закона сохранения и проинтегрировав его

$$U[a] - [a^2/2] = 0, \quad U = (a_1 + a_2)/2 \quad (0.4)$$

Уравнение (0.1) имеет решение в виде бегущей волны, которое стремится к значениям  $a_1$  при  $x \rightarrow +\infty$  и  $a_2$  при  $x \rightarrow -\infty$ ,  $a_2 > a_1$ . Это решение называется структурой скачка. С обеих сторон от скачка характеристики приходят на линию разрыва, поэтому скачок эволюционен [2].

Теперь рассмотрим дисперсионный аналог скачка для уравнения (0.2) [3–4]. У этого уравнения есть нестационарные решения, стремящиеся к  $a_1$  и  $a_2$  при  $x \rightarrow \pm \infty$ . Они представляют собой решения колебательного типа, так называемые волновые зоны. С течением времени решение для огибающей становится автомодельным, амплитуда волн зависит от  $r = x/t$ . В начале волновой зоны при  $r = r_1$  находится уединенная волна, далее по мере уменьшения величины  $r$  идут волны с плавно уменьшающейся амплитудой до нулевого значения при  $r = r_2$ . Протяженность волновой зоны линейно

растет со временем. Если применить метод усреднения Уизема [5], то для описания эволюции волновой зоны можно вывести гиперболическую систему с тремя неизвестными. Эти нестационарные решения будем называть автомодельной (расширяющейся) структурой бездиссипативного скачка, другое название – нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны [3] – связано с терминологией из физики плазмы.

Теперь можно абстрагироваться от наличия волновой зоны и рассматривать только скорость распространения уединенной волны. Амплитуда уединенной волны в 2 раза больше амплитуды скачка, а скорость уединенной волны относительно нулевого уровня равна  $1/3$  ее амплитуды [3–5]. Поэтому скорость переднего фронта (скорость уединенной волны) равна

$$U = a_1 + 2/3 (a_2 - a_1) = 2/3 a_2 + 1/3 a_1 \quad (0.5)$$

где  $a_1$  – значение у подошвы уединенной волны. Будем называть эту величину скоростью скачка. Если формально рассмотреть характеристические скорости по разные стороны от скачка  $a_1$  и  $a_2$ , то окажется, что обе характеристики, как и в случае уравнения (0.1), являются приходящими на линию разрыва. Таким образом, математическое описание обоих скачков при таком макроскопическом подходе однотипно (ср. формулу (0.4)). Скачок такого типа является аналогом обычных ударных волн в газовой динамике: число граничных условий на нем совпадает с числом уравнений упрощенной системы (в данном случае это одно уравнение).

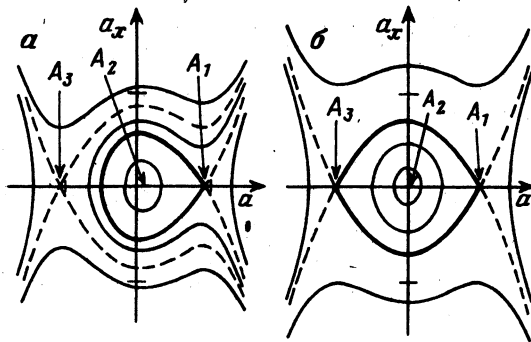
Но можно применить другой подход. В качестве скачка на границе волновой зоны можно рассматривать скачок амплитуды волны. Этот скачок (скачок солитонного типа) не обладает структурой в обычном понимании, в [1] в качестве структуры скачка формально рассматривалась уединенная волна. В общем случае при таком локальном подходе под скачками понимаются любые скачки между однородными, периодическими, квазипериодическими, стохастическими состояниями, при этом при проверке выполнения условия эволюционности анализируется расположение характеристик усредненной системы [3,6], как и в случае уравнения (0.1), имеются переходные зоны, называемые структурами скачков.

В последующих разделах анализируются обобщения для более сложных типов уравнений. Статья проиллюстрирована примерами численных решений, осуществленных с помощью трехслойной схемы с центральными разностями [7–10]. Эта схема сохраняет свойства консервативности и симметрии уравнений, что позволяет получать решения точно такого же качественного вида, какой предсказывается теорией [1]. В качестве начальных данных для этих расчетов бралась функция типа ступеньки, аппроксимируемая гиперболическим тангенсом с целью сглаживания.

**1. Влияние нелинейности высокого порядка.** Рассмотрим модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза с кубической нелинейностью

$$a_t + (-a^3)_x + b_3 a_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

Это уравнение является модельным уравнением для случаев, когда вырождается нелинейность первого порядка. Знак минус при нелинейном члене здесь выбран для определенности, его можно поменять переменной координаты  $x$  на  $-x$ . В отличие от случая обычного уравнения Кортевега – де Вриза, где знаки при различных членах не играют принципиальной роли, поскольку они могут быть изменены преобразованием переменных, здесь следует рассмотреть два случая:  $b_3 > 0$  и  $b_3 < 0$ . Уравнение с  $b_3 > 0$  можно вывести из нелинейного уравнения Шредингера со старшей производной третьего порядка, рассмотренного в [8,10]. Уравнение со знаком  $b_3 < 0$  можно вывести для альфвеновских волн в плазме [11], а также для установившихся волн в резонансном слое [12] плазмы, волн Россби в стратифицированной жидкости [13]. Имеются также приложения для ангармонических решеток для обоих случаев [14].



Фиг. 1. Типичные фазовые портреты для стационарных решений уравнения Кортевега – де Вриза с кубической нелинейностью и  $b_3 > 0$ : а – общий случай, б – при наличии кинка ( $c = 0$ )

В случае  $b_3 > 0$  имеются скачки типа кинков. В отличие от ударных волн в газовой динамике, где имеется диссипация на скачках, число граничных условий на кинках больше числа уравнений упрощенной системы (в данном случае имеется одно уравнение (0.3)).

Английское слово "kink" (поворот) первоначально ассоциировалось с уравнением синус-Гордона:  $\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin \phi = 0$ . Оно имеет решения, описывающие переходы от устойчивого состояния равновесия  $\phi = 0$  к устойчивому состоянию  $\phi = 2\pi$ , минуя состояние  $\phi = \pi$ . Если рассматривать упругую ленту с массой, сосредоточенной на одном краю, то такие решения соответствуют волне кручения этой ленты на  $360^\circ$  [15]. В данном случае за основу для использования термина "кинк" принято свойство фазового портрета для стационарных решений. Кинку соответствует фазовая кривая, соединяющая два состояния равновесия. При этом имеется промежуточное состояние равновесия, которое этой кривой обходится.

Проанализируем фазовые портреты для уравнения, описывающего стационарные решения

$$b_1 a - a^3 + b_3 a_{xx} = c$$

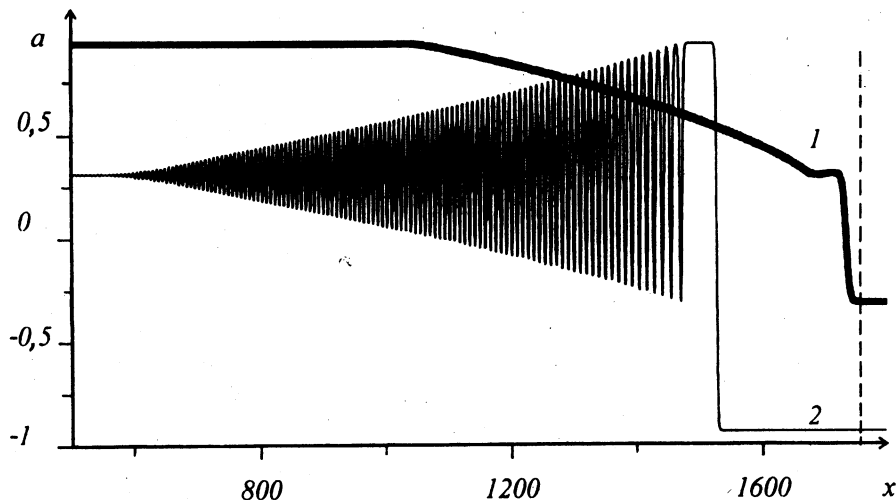
где  $b_1$  – фазовая скорость. При  $b_1 > 0$  имеется три точки равновесия (фиг. 1, а). Легко видеть, что при  $c = 0$  имеются фазовые кривые, соединяющие точки  $(\pm\sqrt{b_1}, 0)$  (фиг. 1, б). Этим решениям соответствует скачок, в котором одна характеристика приходит на линию разрыва, а другая уходит. Для этого скачка имеются два граничных условия

$$U = -(a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2) = -a_1^2 = -a_2^2, \quad a_2 = -a_1$$

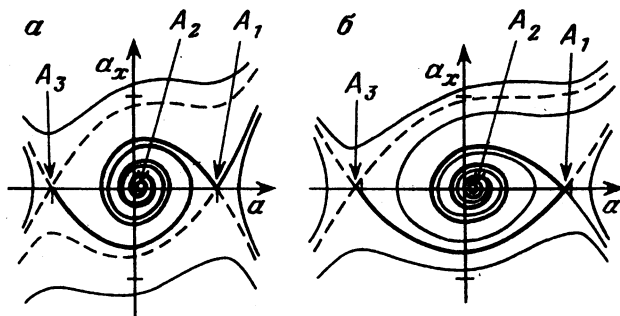
Первое условие (основное) – результат интегрирования уравнения (1.1); второе условие (дополнительное, по терминологии работ [16–17]) – условие симметрии, следует из анализа фазового портрета. Таким образом, скачок эволюционен.

Имеется фазовая кривая, проходящая из точки  $A_1$  в  $A_3$ , и симметричная ей кривая, проходящая из точки  $A_3$  в  $A_1$ . Эти кривые соответствуют кинку и антикинку (обратному скачку). Причем скорости кинка и антикинка совпадают.

Кроме того, при  $c \neq 0$  имеются уединенные волны, которые могут служить фронтом расширяющейся волновой зоны аналогично тому, как это было в случае уравнения (0.2). При  $c > 0$  уединенной волне соответствует фазовая траектория, проходящая через точку равновесия  $a > 0$  (фиг. 1, а), а в случае  $c < 0$  – через точку равновесия  $a < 0$ . Воспользовавшись преобразованием Миуры [15]  $a \rightarrow -\beta a^2 \pm (6\beta)^{1/2} a_x$ ,  $\beta = 3$ , которое связывает решения уравнения (1.1) с решениями уравнения (0.2), можно



Фиг. 2. Переход через критическое значение  $a = 0$  при  $b_3 = 1$ ; кривая 1 – решение с простой волной и кинком, кривая 2 – решение с нелокальным скачком и кинком,  $t = 400$ . Положение разрыва в начальный момент времени  $x = 1750$  (штриховая линия)



Фиг. 3. Типичные фазовые портреты для стационарных решений уравнения Кортевега – Бюргера с кубической нелинейностью:  $a$  – общий случай,  $b$  – при наличии кинка

получить скорость скачка солитонного типа уединенной волны для уравнения (1.1) из формулы (0.5)

$$U = -[3a_1^2 + 2(a_2^2 - a_1^2)] = -(2a_2^2 + a_1^2) \quad (1.2)$$

где  $a_1$  – значение у подошвы уединенной волны,  $a_2$  – значение за волновой зоной.

Рассмотрим задачу о распаде произвольного разрыва. Легко показать, что для случаев, соответствующих уравнениям (0.1) и (0.2), задача о распаде произвольного разрыва имеет простые решения. Если  $a_2 > a_1$ , то для уравнения (0.1) возникает скачок, а для уравнения (0.2) – волновая зона со скачком солитонного типа на границе (все это вместе рассматривается как один элемент – нелокальный скачок), при  $a_1 > a_2$  – центрированная простая волна. Для уравнения (1.1) то же самое имеет место, если  $a_1 < 0$  и  $a_2 < 0$ . Если  $a_2 > 0$  и  $a_1 > 0$  то, наоборот, при  $a_2 > a_1$  возникает центрированная простая волна, а при  $a_2 < a_1$  – скачок.

В случае  $a_1 a_2 < 0$  решение задачи о распаде произвольного разрыва, состоящее из одного элемента, невозможно, оно содержит кинк и нелокальный скачок или кинк и

центрированную простую волну. Пусть  $a_1 < 0$ ,  $a_2 > 0$ . При  $a_2 > -a_1$  решение состоит из центрированной простой волны и кинка (фиг. 2, кривая 1). При  $a_2 < -a_1$  решение состоит из нелокального скачка и кинка (фиг. 2, кривая 2). Если же наоборот,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 < 0$ , то в силу свойств симметрии уравнения (1.1) графики решений можно получить из рассмотренных выше графиков посредством центрально-симметричного отображения относительно некоторой точки на линии  $a = 0$ .

Аналогичные типы решений имеются и у уравнения типа Кортевега – Бюргерса

$$a_t + (-a^3)_x + b_2 a_{xx} + b_3 a_{xxx} = 0, \quad b_2 < 0, \quad b_3 > 0 \quad (1.3)$$

Анализируя фазовые портреты для этого уравнения (фиг. 3), можно обнаружить, что наряду с обычными аналогами ударных волн в газовой динамике у этого уравнения имеются диссипативные аналоги рассмотренных выше кинков, которые также являются скачками с одним дополнительным условием. Для краткости здесь их тоже будем именовать кинками. Отличие в том, что здесь кинк расположен несимметрично относительно уровня  $a = 0$ ,  $0 < a_2 < -a_1$  для кинка и  $0 > a_2 > -a_1$  для антикинка. Скорость всех скачков, а не только кинков, в данном случае определяется формулой

$$U = -(a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2) \quad (1.4)$$

получаемой интегрированием уравнения (1.3). Если кинк и антикинк имеют общее однородное состояние, то, согласно (1.4) и указанной выше несимметрии относительно уровня  $a = 0$ , эти скачки сближаются друг с другом.

В качестве дополнительного условия можно использовать соотношение  $|a_2/a_1| = s$ . В случае уравнения (1.1)  $s = 1$ , поскольку  $a_2 = -a_1$ . Значение  $s$  для уравнения (1.3) можно получить из решения задачи о структуре (фиг. 3, б).

При увеличении амплитуды усиливается влияние дисперсионного члена в уравнении (1.3), а при уменьшении – диссипативного. Структура обычных скачков (не кинков) носит осциллирующий характер, поскольку одна из точек равновесия фокус (фиг. 3, а), т.е. автомодельные волновые зоны заменяются затухающими колебаниями.

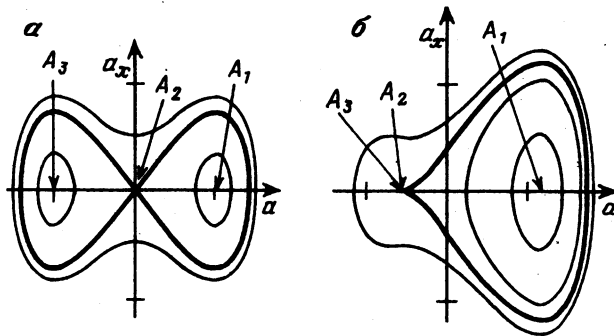
В случае, когда в (1.3)  $b_2 \rightarrow 0$  (малая диссипация или же скачки большой амплитуды), можно считать, что  $s \rightarrow 1$ , как и для чистого уравнения Кортевега – де Вриза с кубической нелинейностью. При  $b_2 \rightarrow -\infty$  (большая диссипация или же скачки малой амплитуды)  $s \rightarrow 1/2$  для кинка и  $s \rightarrow 2$  для антикинка (такие значения принимает эта величина для чистого уравнения Бюргерса с кубической нелинейностью). При этом две точки равновесия сливаются в одну. Это равносильно условию Жуге, поскольку характеристическая скорость, соответствующая слившимся, в системе координат, связанной со скачком, равна нулю.

Граничные условия на кинке для (1.1) можно получить и не исследуя фазовый портрет, т.е. структуру скачка, а непосредственно из законов сохранения. Само уравнение носит вид закона сохранения, который можно назвать законом сохранения импульса. Кроме того, умножив это уравнение на  $a$ , можно получить закон сохранения энергии. Из него можно получить другую формулу для скорости

$$U = -(a_1^2 + a_2^2)/2 \quad (1.5)$$

В результате исключения скорости из формул (1.4) и (1.5) получим соотношение  $s = 1$ . Нахождение этого соотношения посредством исследования структуры разрыва для скачка типа кинка легко осуществимо. Для сложных моделей со многими неизвестными исследование стационарных решений затруднено, а найти дополнительный закон сохранения значительно проще.

У уравнения (1.1), как и у уравнения (0.2), имеется бесконечно много законов сохранения [15] (полностью интегрируемые модели). Однако в силу симметричного



Фиг. 4. Типичные фазовые портреты для стационарных решений уравнения Кортевега – де Вриза с кубической нелинейностью и  $b_3 < 0$ :  $a$  – общий случай,  $б$  – при наличии скачка Жуге

расположения кинка и полиномиального вида этих законов все они будут выполнены для кинка автоматически. Один из таких высших законов сохранения справедлив и для обобщенных уравнений Кортевега – де Вриза с производными более высокого порядка и рассматривается в разд. 3.

Рассмотрим уравнение (1.1) с  $b_3 < 0$ . Фазовый портрет в данном случае содержит две устойчивые и одну неустойчивую точки равновесия при  $c = 0$  и две фазовые кривые, соответствующие уединенным волнам (фиг. 4, а). Здесь нет кинков, но есть уединенные волны. К этому уравнению нельзя применить преобразование Миуры в действительных переменных. Однако численные исследования показывают, что формула (1.2) остается верна. Если же увеличивать или, наоборот, уменьшать значение  $c$ , то будут сохраняться также две уединенные волны, но при этом средняя точка неустойчивого равновесия будет приближаться к точке устойчивого равновесия и наступит момент, когда эти точки сольются (фиг. 4, б). Соответствующий нелокальный скачок является аналогом скачка Жуге в газовой динамике, поскольку для слившихся точек характеристическая скорость совпадает со скоростью скачка. Приравняв значение скорости из (1.2) к характеристической скорости, найдем  $s = 1$  (здесь  $s$  – модуль отношения величины  $a$  у подошвы уединенной волны и по другую сторону от волновой зоны). Этот факт был, в частности, использован для численной проверки гипотезы о том, что формула (1.2) остается верна и для этого случая.

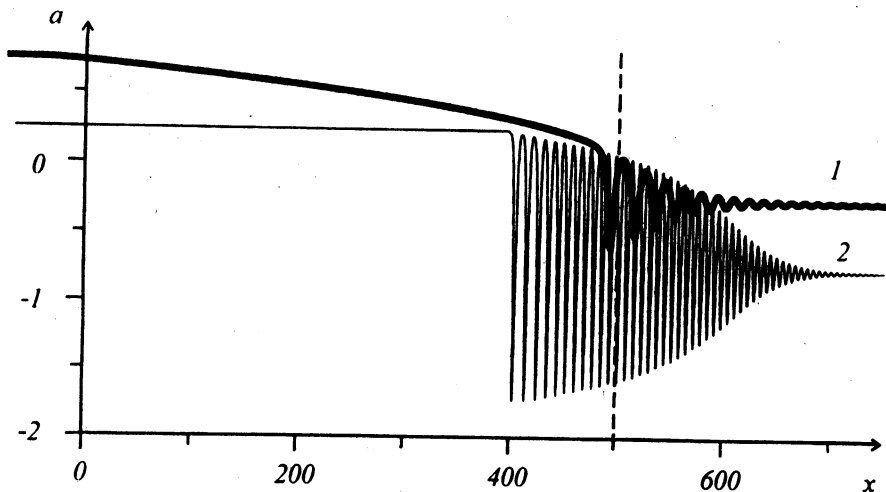
Данный тип скачка играет при переходе через критическое значение  $a = 0$  в задаче о распаде произвольного разрыва ту же роль, что и кинк в предыдущем случае. При  $a_2 > -a_1, a_1 < 0$  решение содержит центрированную простую волну и нелокальный скачок Жуге (фиг. 5, кривая 1), при  $a_2 < -a_1$  – обычный скачок солитонного типа (кривая 2).

Для аналогичного случая уравнения Кортевега – Бюргерса нелокальный скачок заменяется обычным скачком Жуге. Получаем те же решения с тем отличием, что здесь скорость скачка определяется формулой (1.4) и соответственно  $s = 1/2$ .

## 2. Влияние дисперсии высокого порядка. Рассмотрим уравнение

$$a_t + aa_x + b_3 a_{xxx} + b_5 a_{xxxx} = 0 \quad (2.1)$$

Это уравнение описывает волны на мелкой воде с ледовым или иным упругим покрытием [18]. В этих моделях дисперсия высокого порядка порождает поверхностными эффектами. В [11] для магнитозвуковой ветви холодной плазмы для значений параметров, приводящих к вырождению дисперсии низкого порядка, выведен более простой вариант этого уравнения без производной третьего порядка. Однако при некотором удалении от точки вырождения следует ожидать появления



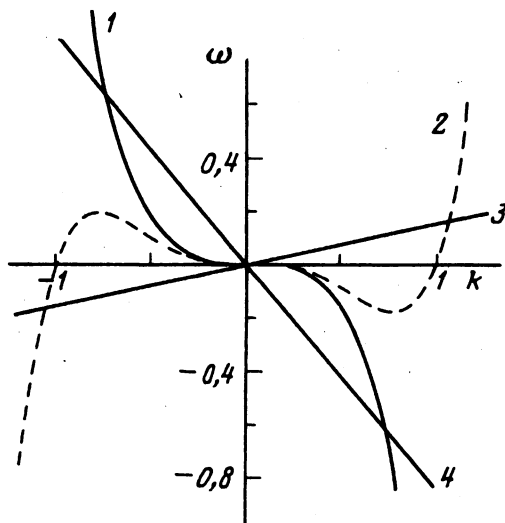
Фиг. 5. Переход через критическое значение  $a = 0$  при  $b_3 = -1$ ; кривая 1 – решение с простой волной и нелокальным аналогом скачка Жуге,  $t = 300$ ; кривая 2 – решение с обычным нелокальным скачком,  $t = 100$ . Положение разрыва в начальный момент времени  $x = 500$

тех же качественных эффектов, что и для уравнения (2.1). Это подтверждается численными экспериментами по распаду уединенной волны в плазме [9]. В настоящее время этот факт подтвержден непосредственным численным решением задачи о распаде начального разрыва в холодной плазме и плазме с горячими электронами.

Ранее [1,10] была разработана общая теория, утверждающая, что если существует стационарная структура скачка, то ее тип можно определить по виду дисперсионной кривой. Предполагается, что исходная система имеет консервативный вид. После ее однократного интегрирования возникает динамическая система, описывающая стационарные решения. Основным условием применения этой теории является симметрия динамической системы  $u_{qx} = F_q(u)$ : система должна быть инвариантна при преобразовании  $x \rightarrow -x$ ,  $u_q \rightarrow u_q$  при  $q = 1, \dots, 2n - 1$ ,  $u_q \rightarrow -u_q$  при  $q = 2, \dots, 2n$ . Рассматривается число пересечений прямой  $U = \omega/k$  и дисперсионной кривой при  $k > 0$  для состояний равновесия динамической системы по разные стороны от скачка. Скачок между последовательностью уединенных волн и однородным состоянием (скачок солитонного типа) может существовать, если дисперсионная кривая, соответствующая этому состоянию, не пересекает дисперсионную ветвь,  $n \geq 1$ . Скачок типа кинка может существовать, если для обеих сторон от скачка пересечений нет,  $n \geq 1$ . Обычный скачок с одной излучаемой волной может существовать, если для стороны, где нет волны, нет пересечения, а для другой стороны имеется одно пересечение,  $n \geq 2$ . Скачок типа кинка с одной излучаемой волной может существовать, если с обеих сторон от скачка имеется одно пересечение,  $n \geq 2$ . Обычный скачок с двумя излучаемыми волнами по обе стороны от скачка может существовать, если с одной стороны два пересечения, а с другой одно,  $n \geq 3$ . Скачок типа кинка с двумя излучаемыми волнами может существовать, если с обеих сторон от скачка имеется по два пересечения,  $n \geq 3$ .

Все граничные условия на скачке были разделены на основные, получаемые интегрированием исходной консервативной системы, и дополнительные, получаемые в результате анализа структуры разрыва. Существование структуры разрыва обеспечивает и ее эволюционность, т.е. все дополнительные граничные условия на скачке могут быть получены при решении задачи о структуре (обобщение результатов работ [16–17], где аналогичное утверждение было доказано для широкого класса систем с диссипацией).

Предполагается, что для описания эволюции волновых зон может быть выведена система усредненных уравнений гиперболического типа, способы вывода таких систем обсуждаются в разд. 3. Для анализа эволюционности этих скачков все характеристики этой системы были разделены на основные, сходные с характеристиками упрощенной системы для однородного



Фиг. 6. Два варианта дисперсионной кривой для уравнения Кортевега – де Вриза с производной пятого порядка при  $a_0 = 0$ ,  $b_3 = 1$ ,  $b_5 = -1$  (кривая 1) и  $b_5 = +1$  (кривая 2)

состояния, и дополнительные, порожденные излучаемыми волнами. Каждая излучаемая волна порождает две дополнительные уходящие характеристики. Для скачков типа кинков число основных уходящих характеристик совпадает с числом основных входящих характеристик и равно числу неизвестных в упрощенной системе. Для обычных скачков число основных уходящих характеристик на единицу меньше. Поэтому если  $j$  – число излучаемых волн, то число дополнительных граничных условий равно  $2j$  для обычных скачков и  $2j + 1$  для кинков.

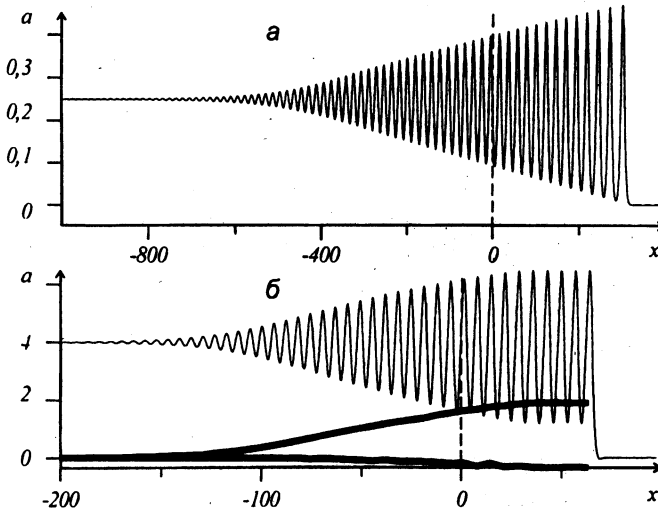
Проверить фактическое существование стационарных скачков можно при помощи численного эксперимента с задачей о распаде произвольного разрыва. Для получения достоверных результатов была разработана специальная вычислительная методика [10], основанная на идее сохранения в численном решении всех основных свойств консервативности и симметрии, использованных в данной теории.

В случае уравнения (2.1) динамическая система для стационарных решений возникает после однократного его интегрирования, набор неизвестных  $(a, a_x, a_{xx}, a_{xxx})$ ,  $n = 2$ . Дисперсионное соотношение для линеаризованного уравнения (2.1) имеет вид

$$\omega - a^0 k + b_3 k^3 - b_5 k^5 = 0$$

При  $b_3 b_5 < 0$  дисперсионная кривая не имеет точек перегиба (фиг. 6, кривая 1), кроме  $k = 0$  (в дальнейшем при упоминании точек перегиба эта точка в расчет не берется), а при  $b_3 b_5 > 0$  имеет одну такую точку (кривая 2). Удобно зафиксировать дисперсионную кривую для состояния  $a^0 = 0$ , а вместо прямой  $U = \omega/k$  рассматривать прямые  $U - a_{1,2} = \omega/k$ . Исходя из вида дисперсионной кривой и квадратичного характера нелинейности в рассматриваемом уравнении, можно заключить, что при  $b_3 b_5 < 0$ ,  $U > 0$ ,  $a_1 = 0$  могут существовать скачки солитонного типа (прямая 3 на фиг. 6 соответствует  $a^0 = a_1$ ) и скачки одной излучаемой волной, если при этом еще и  $a_2 > U > 0$  (прямая 4 соответствует  $a^0 = a_2$ ). При  $b_3 b_5 > 0$  могут существовать скачки с одной излучаемой волной, если для состояния 2 нет пересечения, а для состояния 1 пересечение есть (невозможность существования скачка солитонного типа при отсутствии пересечения для состояния 2 разъясняется ниже). При этом теория не исключает существования скачков с нестационарной структурой и большим числом излучаемых волн.





Фиг. 7. Скачок солитонного типа при  $t = 2000$  (а) и скачок с излучением при  $t = 30$  (б);  $b_5 = -1$

Остановимся на анализе задачи об эволюции начального разрыва для уравнения (2.1), которая может быть интерпретирована как задача о боре в шельфовой зоне при наличии ледового покрытия. Изменением масштабов для величин  $t$ ,  $x$ ,  $a$  и преобразованием  $x \rightarrow -x$ ,  $a \rightarrow -a$  уравнение (2.1) можно привести к нормированному виду  $b_3 = 1$ ,  $b_5 = \pm 1$  и рассматривать амплитуду начального разрыва  $a_2$  как единственный независимый параметр, положив  $a_1 = 0$ .

Для  $b_5 = -1$  при малой амплитуде начального скачка решение содержит скачок солитонного типа (фиг. 7, а,  $a_2 = 0,25$ ), при большой амплитуде – скачок с излучаемой волной (фиг. 7, б,  $a_2 = 4$ ).

Для  $b_5 = 1$  при малой амплитуде начального скачка наблюдается решение с локальным скачком с нестационарной структурой (фиг. 8, а,  $a_2 = 0,25$ ). При умеренной амплитуде хаотические свойства решений усиливаются. Согласно теории, в этих случаях локальных стационарных скачков солитонного типа или с двумя и более излучаемыми волнами быть не может. Этим и объясняется нестационарность, наблюдаемая в расчетах. При большой амплитуде начального скачка, как и предсказывает теория, возникает скачок с излучением (фиг. 8, б,  $a_2 = 4$ ).

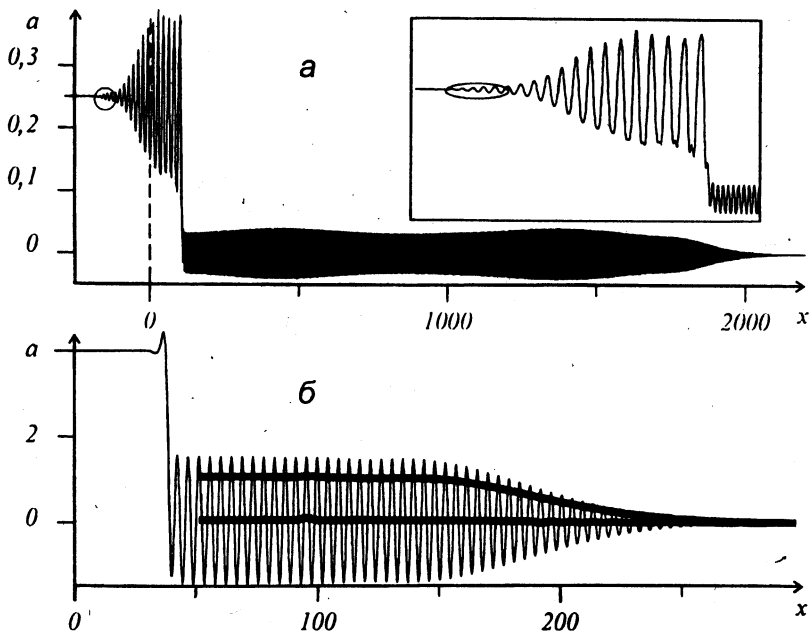
В результате расчетов определяется зависимость скорости локального скачка от амплитуды начального разрыва (фиг. 9, кривые 1 и 2). В случае скачков с нестационарной структурой подразумевается средняя скорость. При  $a_2 \rightarrow 0$  кривые 1 и 2 асимптотически стремятся к прямой  $U = 2/3a_2$  (штриховая линия), соответствующей формуле (0.5).

При  $a_2 \rightarrow +\infty$  структура скачка асимптотически стремится к структуре скачка для уравнения с  $b_3 = 0$ ,  $b_5 = \pm 1$ , а графики зависимости  $U(a_2)$  стремятся к некоторым прямым линиям.

Найдем теперь точные количественные критерии для определения типа скачка по его интенсивности. Рассмотрим волновые числа для волн малых возмущений, движущихся со скоростью скачка. Для этого подставим в дисперсионное соотношение  $\omega = Uk$

$$U - a^0 + b_3 k^2 - b_5 k^4 = 0 \quad (2.2)$$

Согласно приведенной выше теории, в случае, когда пересечения нет, возможны

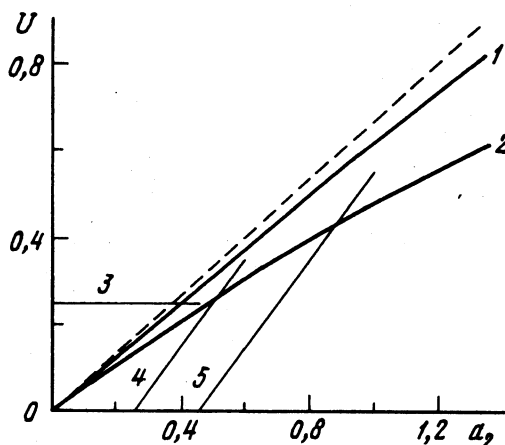


Фиг. 8. Скачок с нестационарной структурой при  $t = 800$  (а) и скачок с излучением при  $t = 20$  (б);  $b_5 = -1$

скачки как солитонного типа, так и с излучаемой волной. Этому случаю соответствует отсутствие действительных корней у уравнения (2.2). Эти корни могут быть комплексными или чисто мнимыми. Однако случаю комплексных корней соответствует так называемый 1 : 1 солитон [7] (солитон огибающей, скорость которого совпадает со скоростью периодической волны). Это решение не может рассматриваться в качестве структуры скачка. Поэтому логично предположить, что если для начального состояния все корни комплексны (на фиг. 7, б и фиг. 8, б видны затухающие в пространстве колебания в области, где отсутствует волновая зона), то имеет место скачок типа скачка с излучением. При  $b_3 = 1$ ,  $b_5 = -1$ ,  $a^0 = a_1 = 0$  корни для начального состояния комплексны, если  $U > 1/4$  (см. фиг. 9, прямая 3).

Для  $b_3 = 1$ ,  $b_5 = 1$ ,  $a^0 = a_2$  критерий комплексности корней в области за скачком совпадает с условием отсутствия пересечения дисперсионной кривой и прямой  $U = \omega/k$ :  $U < c_g(k_*)$ ,  $\omega/k_* = d\omega/dk(k_*)$ , следовательно,  $U < a_2 - 1/4$  (см. фиг. 9, прямая 4). Однако здесь существует другой критерий, который гарантирует отсутствие решений с нестационарной структурой и накладывает более сильное ограничение на  $U$ . В решении, показанном на фиг. 8, а, слева от скачка волновая зона ограничена каустикой (область формирования каустики обведена кружком). Для того чтобы слева от скачка не могло быть никаких волн, необходимо, чтобы скорость скачка была меньше скорости каустики:  $U < \min(c_g(k))$ , минимум достигается при  $k = k_{**} = \sqrt{3/10}$ ,  $d^2\omega/dk^2(k_{**}) = 0$ , следовательно  $U < a_2 - 9/20$  (см. фиг. 9, прямая 5). Ранее аналогичный критерий был установлен для нелинейного уравнения Шредингера с производной третьего порядка [10]. В расчетах на участке  $a_2 - 1/4 > U > a_2 - 9/20$  наблюдались как решения со скачком с одной излучаемой волной, так и решения со скачком с нестационарной структурой.

Из фиг. 9 видно, что кривые 1 и 2 лежат ниже прямой  $U = a_2$  (характеристическая скорость для однородного состояния 2), но выше прямой  $U = 0$  (характеристическая



Фиг. 9. Зависимость скорости скачка от амплитуды начального разрыва при  $b_3 = 1$ ; кривая 1 -  $b_5 = -1$ , 2 -  $b_5 = 1$ , штриховая линия -  $b_5 = 0$ . Прямые 3, 4, 5 соответствуют уравнениям  $U = 1/4$ ,  $U = a_2 - 1/4$ ,  $U = a_2 - 9/20$

скорость для однородного состояния 1). Поэтому эти характеристики являются подходящими и приведенные выше условия существования структур скачков солитонного типа и скачков с излучением выполнены при всех значениях  $a_2$  при макроскопическом подходе. В [1] эти условия существования структуры скачка были сформулированы в терминах локального подхода. Разница между значениями  $a$  в состоянии равновесия (локальный подход) и при удалении на бесконечность (макроскопический подход) мала по сравнению с интенсивностью скачка, поэтому качественно эти подходы дают одинаковые результаты.

Наибольший интерес представляют скачки с излучаемой волной. Рассмотрим пример, показанный на фиг. 8, б. Обозначим индексом 1 величины справа от скачка, а индексом 2 - слева. Для описания скачка можно использовать усредненный закон сохранения импульса

$$U(a_2 - a_1 - \langle a - a_1 \rangle) - (a_2^2/2 - a_1^2/2 - a_1 \langle a - a_1 \rangle - \langle (a - a_1)^2 \rangle / 2 - b_3 \langle a_{xx} \rangle - b_5 \langle a_{xxxx} \rangle) = 0$$

где  $\langle \rangle$  - усредненное по периоду значение величины в волновой зоне. Если значения усредненных величин известны из расчета, то из этого соотношения можно найти скорость волны.

На фиг. 7, б и 8, б для скачков со стационарной структурой с излучаемой волной показаны жирными линиями графики величин  $\langle a - a_{1,2} \rangle$  и  $\sqrt{\langle (a - a_{1,2})^2 \rangle}$  в области волновой зоны, усредненные по периоду, определяемому численно как расстояние между двумя локальными максимумами. Численные эксперименты показывают, что при больших амплитудах скачка величинами  $\langle a - a_{1,2} \rangle$ ,  $\langle a_{xx} \rangle$ ,  $\langle a_{xxxx} \rangle$  можно пренебречь. Так, для решений, показанных на фиг. 7 и 8, величина  $\langle a - a_1 \rangle$  оказывается меньше ее флуктуаций, вызванных погрешностью выбранного способа расчета усредненных величин. Таким образом, имеется только один неизвестный параметр - среднеквадратическое отклонение, которое можно определить из численного решения.

Огибающая излучаемой волны должна описываться системой гиперболического типа [1], о чем свидетельствуют графики решений с наличием централизованной простой волны огибающей на фиг. 7 и 8.

В [5] для описания волн конечной амплитуды в случае уравнения Кортевега - де Вриза выведена усредненная гиперболическая система с тремя характеристиками. При этом две из них порождены волнами и могут рассматриваться как результат расщепления бихарактеристики в линейной лучевой теории. Третью характеристику

можно рассматривать как характеристику, описывающую течение. Ниже будем предполагать, что, как и в случае обычного уравнения Кортевега – де Вриза, имеется характеристика, связанная с течением, характеристическую скорость для нее можно оценивать как  $\lim_{k \rightarrow 0} d\omega/dk$  (для области, где нет волновой зоны, это соотношение является точным), и еще две характеристики, связанные с волной.

Для данных типов скачков характеристики, связанные с течением, являются уходящими, поскольку прямая  $U = \omega/k$  расположена в окрестности начала координат по разные стороны от дисперсионной кривой для состояния до скачка и за скачком. Для того чтобы замкнуть систему соотношений на скачке, помимо закона сохранения импульса требуется еще два граничных условия, поскольку излучаемая волна порождает две уходящие характеристики. Такими условиями могут быть значения амплитуды и длины волны в волновой зоне, которые можно определить из решения задачи о структуре разрыва. Альтернативные способы получения дополнительных граничных условий рассматриваются в следующем разделе.

**3. Усредненные уравнения и законы сохранения.** Условием применения описанной выше теории является наличие усредненных уравнений гиперболического типа, описывающих эволюцию огибающей периодических волн. В [1] вопрос, при каких условиях существуют такие уравнения, не обсуждался. Поэтому в данном разделе на примере уравнения (2.1) рассматриваются способы вывода таких уравнений в общем случае. Тесно связанным с этой проблематикой является анализ числа законов сохранения. Эти законы сохранения могут быть использованы при выводе усредненных уравнений, а также для получения дополнительных граничных условий на скачках.

Следуя работе [5], запишем исходное уравнение в виде вариационного принципа

$$\delta \int L dx = 0, \quad L = 1/2 \varphi_t \varphi_x + \varphi^3/3 - b_2 \varphi_{xxx}^2 + b_3 \varphi_{xxx}^2, \quad a = \varphi_x$$

Делаем подстановку

$$\varphi = \psi(X, T) + \Phi(\theta), \quad \theta = k_n(X, T)x - \omega_n(X, T)t$$

где  $x, t$  – быстрые переменные, а  $X, T$  – медленные,  $\Phi$  – некоторая периодическая функция, которую можно определить, решив уравнение

$$-Ua + b_1 a + a^2/2 + b_3 k_n^2 a_{\theta\theta} + b_5 k_n^4 a_{\theta\theta\theta\theta} = c$$

Далее вычисляется усредненный по периоду лагранжиан  $\langle L \rangle$  и записываются вариационные уравнения для усредненных переменных стандартным образом.

Кроме того, можно получить усредненные уравнения и непосредственно усреднением законов сохранения импульса и энергии

$$a_t + (a^2/2 + b_3 a_{xx} + b_5 a_{xxx})_x = 0 \tag{3.1}$$

$$(a^2/2)_t + [a^3/3 + b_3(aa_{xx} - a_x^2/2) + b_5(aa_{xxx} - a_x a_{xxx} + a_{xx}^2/2)]_x = 0 \tag{3.2}$$

Для этого нужно подставить в эти законы сохранения выражение для  $a$ , описывающее бегущую периодическую волну и зависящее от трех параметров, которые при этом предполагаются зависящими от  $X$  и  $T$ . Это может быть среднее течение, волновое число и амплитуда волны. Неявное выражение с тремя параметрами, описывающее периодические волны уравнения (2.1), приведено в [18]. Затем нужно воспользоваться тем, что операция осреднения перестановочна с операцией дифференцирования:  $\langle f_t \rangle \rightarrow \langle f \rangle_T, \langle f_x \rangle \rightarrow \langle f \rangle_X$ . Замкнуть систему уравнений для трех неизвестных позволяет условие совместности

$$\frac{\partial}{\partial T} k_n + \frac{\partial}{\partial X} \omega_n = 0 \tag{3.3}$$

Здесь предполагается, что известно нелинейное дисперсионное соотношение

$\omega_n = \omega(k_n)$ , которое можно получить, например, вариацией усредненного лагранжиана по амплитуде волны [5]. В общем случае число неизвестных для усредненных уравнений на два превышает число уравнений исходной системы, поэтому если в модели имеется один дополнительный закон сохранения (для моделей гидродинамического типа это закон сохранения энергии), то усредненные уравнения можно вывести.

Поскольку усредненные уравнения не содержат высших производных, то после линеаризации и подстановки всех усредненных неизвестных  $\{a_i\}$  в виде  $a_i = a_{i0} = a_{i0} \exp [i(kx - \omega t)]$  получаем дисперсионное соотношение  $P(\omega/k) = 0$ , где  $P$  – некоторый полином с действительными коэффициентами, в данном случае это полином третьего порядка, его корни  $\{c_i\}$  являются характеристическими скоростями. В случае, когда его корни действительны, система усредненных уравнений является гиперболической. Если же имеется комплексный корень, то всегда найдется и комплексно-сопряженный ему. Это означает модуляционную неустойчивость, поскольку один из этих корней соответствует волнам, растущим со временем. При численных расчетах картина огибающей в первом и втором случаях оказывается резко различной, что позволяет безошибочно различать их.

Для уравнения (2.1), обобщая известный результат для обычного уравнения Кортевега – де Вриза [19], можно вывести еще один дополнительный закон сохранения, который можно использовать как еще одно, альтернативное соотношение при выводе усредненных уравнений

$$\begin{aligned} & (a^3/3 - b_3 a_x^2 + b_5 a_{xx}^2)_t + \{a^4/4 + b_3 [a^2 a_{xx} - (a^2)_x a_x] + \\ & + b_5 [a^2 a_{xxx} - (a^2)_x a_{xx} + (a^2)_{xx} a_{xx}] - 2b_3^2 (a_x a_{xxx} - a_{xx}^2/2) - \\ & - 2b_3 b_5 (a_x a_{xxxx} - a_{xx} a_{xxx} + a_{xxx}^2/2) + 2b_3 b_5 (a_{xx} a_{xxxx} - a_{xxx}^2/2) + \\ & + 2b_5^2 (a_{xx} a_{xxxx} - a_{xxx} a_{xxxx} + a_{xxxx}^2/2)\}_x = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

С физической точки зрения это также закон сохранения энергии, но для членов более высокого порядка малости. Наличие двух законов сохранения энергии (в линейном и нелинейном приближении) характерно для всех нелинейных гидродинамических моделей с асимптотически малой амплитудой волн, и в этом смысле рассматриваемое уравнение является типичным. Это связано с тем, что в полных моделях кинетическая энергия системы пропорциональна  $\rho v^2$ , здесь  $\rho$  – плотность,  $v$  – скорость среды (или  $h v^2$  для слоя несжимаемой жидкости глубины  $h$ ), т.е. включает в себя члены как второго, так и третьего порядка малости по амплитуде волны. Это позволяет, имея один точный закон сохранения энергии, вывести два асимптотических закона сохранения.

Аналогичными свойствами обладает и рассматривавшееся ранее [10] нелинейное уравнение Шредингера с производной третьего порядка, которое описывает огибающую волн малой амплитуды с волновым числом, близким к значению в точке перегиба дисперсионной кривой

$$A_t + i b_2 A_{xx} + b_3 A_{xxx} + i |A|^2 A = 0 \quad (3.5)$$

Это уравнение может быть выведено из уравнения (2.1) [20], что позволяет выяснить, каким образом его законы сохранения связаны с рассмотренными выше законами сохранения. После перехода от комплексной переменной  $A$  к действительным переменным  $a$ ,  $W$ , где  $A = a \exp(i\psi)$ ,  $W = \psi_x$ , получаем два уравнения в виде законов сохранения с плотностями  $W$  (условие совместности, аналог соотношения (3.3)) и  $A^* A = E = a^2$  (импульс, энергия в линейном приближении, аналог соотношений (3.1) и (3.2)). Напомним, что в теории законов сохранения величина, от которой берется производная по времени, называется плотностью, а величина, от которой берется производная по пространству, – потоком. Кроме того, имеются еще два дополнительных закона сохранения с плотностями  $\text{Re}(-i A^* A_x) = EW$  (новый закон сохранения,

связанный с асимптотическим методом, применяемым при выводе уравнения (3.5)) и  $\text{Re}(a^4/2 - b_2 A^{**} A_{xx} + ib_3 A^* A_{xxx})$  (энергия в нелинейном приближении, аналог соотношения (3.4)). Данные плотности являются обобщением комплексных плотностей, приведенных в [21] для обычного нелинейного уравнения Шредингера.

Для обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза с кубической нелинейностью выполняются законы сохранения, аналогичные выявленным для случая обычной, квадратичной нелинейности. Плотность меняется только в последнем законе сохранения. Она становится сходной с соответствующей плотностью для кубического уравнения Шредингера и имеет вид  $a^4/4 + \dots$ . Выражения для плотности и потока содержат только четные степени от величины  $a$ , поэтому для кинка этот закон сохранения выполняется вследствие того, что  $a_1 = -a_2$  (см. раздел 1).

Как в случае уравнения Кортевега – де Вриза, так и уравнения Шредингера при наличии производных более высокого порядка все законы сохранения остаются справедливыми, нужно только по индукции изменить плотность в последнем из них.

Наличие одного (для полных моделей) или двух (для асимптотических моделей) дополнительных законов сохранения и нелинейного дисперсионного соотношения позволяет найти дополнительные граничные условия для некоторых типов скачков, не обращаясь к анализу их структуры. Кинк – требуется одно граничное условие, которое можно получить из одного дополнительного закона сохранения; скачок с излучаемой волной, – требуется два дополнительных граничных условия, их можно получить из двух дополнительных законов сохранения, проинтегрировав и осреднив их, или одного закона сохранения и условия  $U = \omega_n/k_n$ ; кинк с излучаемой волной – требуется три дополнительных граничных условия, можно воспользоваться соотношением  $U = \omega_n/k_n$  и двумя дополнительными законами сохранения; скачок с двумя излучаемыми волнами – требуется четыре дополнительных граничных условия, можно воспользоваться соотношениями  $U = \omega_{n1}/k_{n1}$  и  $U = \omega_{n2}/k_{n2}$  и двумя дополнительными законами сохранения.

**Заключение.** Решения задачи о распаде произвольного разрыва для обобщенных уравнений Кортевега – де Вриза с кубической нелинейностью или с производной пятого порядка в соответствии с общей теорией структур скачков, основанной на идее эволюционности и свойствах симметрии уравнений могут иметь скачки со стационарной структурой. Эти уравнения используются для описания распространения волн в плазме и в несжимаемой тяжелой жидкости подо льдом. Выявлены скачки солитонного типа, скачки типа кинков и скачки с одной излучаемой волной. Имеющихся законов сохранения достаточно для вывода усредненных уравнений, необходимых для применения теории. Все необходимые граничные условия на скачках типа кинков и скачках с излучаемой волной также можно получить из законов сохранения. Полученные результаты применимы для широкого круга задач механики сплошной среды, поскольку рассмотренные уравнения являются модельными уравнениями с типичными нелинейными и дисперсионными свойствами.

Автор благодарит А.Г. Куликовского и А.А. Бармина, прочитавших статью и сделавших ценные замечания.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00991).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахолдин И.Б. Структуры эволюционных скачков в бездиссипативных системах / ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 52–62.
2. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998. 412 с.
3. Гуревич А.В., Питаевский Л.П. Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № 2. С. 590–604.

4. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
6. *Бахолдин И.Б.* Трехволновый резонанс и усредненные уравнения взаимодействия двух волн в средах, описываемых кубическим уравнением Шредингера // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 1. С. 107–116.
7. *Bakholdin I., Il'ichev A.* Radiation and modulational instability described by the fifth-order Korteweg-de Vries equation // Contemporary Mathematics. 1996. V. 200. P. 1–15.
8. *Бахолдин И.Б.* Волновые скачки в средах, описываемых модифицированным уравнением Шредингера // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 4. С. 111–124.
9. *Бахолдин И.Б.* Моделирование нестационарной эволюции уединенных волн: Препринт № 61. М.: Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша РАН, 1997. 26 с.
10. *Бахолдин И.Б.* Волновые скачки, описываемые модифицированным уравнением Шредингера // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 8. С. 1329–1348.
11. *Kakutani T., Ono H.* Weak non-linear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 26. № 5. P. 1305–1318.
12. *Sanuki H., Ogino T.* Nonlinear distortion of propagation cones of lower hybrid wave in an inhomogeneous plasma // Phys. Fluids. 1977. V. 20. № 9. P. 1510–1515.
13. *Redekopp L.G.* On the theory of solitary Rossby waves // J. Fluid Mech. 1977. V. 82. Pt. 4. P. 725–745.
14. *Zabusky N.J.* A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction // Nonlinear Partial Differential Equations / Ed. W. Ames. N.Y.: Acad. Press, 1967. P. 223–258.
15. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
16. *Куликовский А.Г.* О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с различными свойствами. Волны рекомбинации в магнитной гидродинамике // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 6. С. 1125–1131.
17. *Куликовский А.Г.* Сильные разрывы в течениях сплошных сред и их структура // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1988. Т. 182. С. 261–291.
18. *Ильичев А.Т., Марченко А.В.* О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 88–95.
19. *Калоджеро Ф., Дегасперис А.* Спектральные преобразования и солитоны. М.: Мир, 1985. 469 с.
20. *Grimshaw R., Malomed B., Benilov E.* Solitary waves with damped oscillatory tails: an analysis of the fifth-order Korteweg – de Vries equation // Physica D. 1994. V. 77. № 4. P. 473–485.
21. *Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986. 528 с.

Москва

Поступила в редакцию  
15.V.1998