

УДК 532.59

© 1999 г. И.В. СТУРОВА

ЗАДАЧИ РАДИАЦИИ И ДИФРАКЦИИ ДЛЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Методом мультипольных разложений в линейной постановке получены решения для волновых движений несжимаемой жидкости, вызванных колебаниями цилиндра (задача радиации) или рассеянием внутренней волны на неподвижном цилиндре (задача дифракции). Цилиндр имеет горизонтальную ось, которая параллельна фронту набегающей волны, и расположен под пикноклином в слое постоянной плотности. Резкий пикноклин моделируется двухслойной жидкостью, плавный – трехслойной жидкостью с линейно стратифицированным средним слоем и однородными верхним и нижним слоями. Выведены соотношения эквивалентности, связывающие решения радиационной и дифракционной задач. Выполнены расчеты коэффициентов присоединенных масс и демпфирования в радиационной задаче, возмущающих сил и коэффициентов рассеяния – в дифракционной задаче.

В линейной теории волн радиационная и дифракционная задачи достаточно хорошо изучены для однородной жидкости и в последнее время интенсивно исследуются для стратифицированной жидкости. Численные решения для эллиптического цилиндра, расположенного вблизи слоя с большим градиентом плотности (пикноклина), получены в [1–3]. Приближенные подходы реализованы для решения радиационной задачи в [4], дифракционной – в [5]. При этом в [4] тело моделируется известным распределением массовых источников, заимствованным из теории однородной безграничной жидкости, а в [5] предполагается, что тело расположено далеко от слоя переменной плотности. Для тел простой геометрии (в плоском случае – круговой цилиндр, в пространственном – сфера) решения рассматриваемых задач удобно получать с помощью метода мультипольных разложений [6–8]. Эти решения гарантируют высокую точность, позволяют относительно легко исследовать влияние различных параметров и являются тестом для численных методов, ориентированных на тела произвольной геометрии. В [9] получено явное решение дифракционной задачи для кругового цилиндра, погруженного в безграничную двухслойную жидкость. Однако это решение не удается распространить ни на случай конечной глубины, ни на пространственный случай.

Рассматривается идеальная несжимаемая жидкость, ограниченная сверху и снизу горизонтальными твердыми стенками. Течения в однородных по плотности слоях полагаются потенциальными, колебания тела, а также амплитуда набегающей волны предполагаются малыми.

1. Двухслойная жидкость. В невозмущенном состоянии верхний слой жидкости плотности ρ_1 и толщины H_1 занимает область $|x| < \infty$, $0 < y < H_1$, а нижний слой плотности $\rho_2 = \rho_1(1 + \epsilon)$ ($\epsilon > 0$) и толщины H_2 – область $|x| < \infty$, $-H_2 < y < 0$, где x – горизонтальная, а y – вертикальная координаты.

Рассмотрим вначале радиационную задачу о волновых движениях, вызванных в первоначально покоящейся жидкости вынужденными колебаниями кругового цилиндра радиуса a с частотой ω и амплитудами $\eta_{1,2}$ соответственно для горизонтальной и вертикальной степеней свободы. Считая возмущенное движение жидкост-

ти установившимся, полный потенциал скоростей волнового движения запишем в виде

$$\Phi^{(s)} = \operatorname{Re} \left[i\omega \sum_{k=1}^2 \eta_k \phi_k^{(s)}(x, y) \exp(i\omega t) \right] \quad (1.1)$$

где $\phi_{1,2}^{(s)}$ – радиационные потенциалы, верхний индекс $s = 1, 2$ введен соответственно для верхнего и нижнего слоев. Внутри жидкости

$$\Delta \phi_k^{(1)} = 0 \quad (0 < y < H_1), \quad \Delta \phi_k^{(2)} = 0 \quad (-H_2 < y < 0) \quad (1.2)$$

На границе раздела ($y = 0$) выполняются кинематическое и динамическое условия, а на верхней и нижней горизонтальных границах – условия непротекания

$$\frac{\partial \phi_k^{(1)}}{\partial y} = \frac{\partial \phi_k^{(2)}}{\partial y}, \quad (1 + \varepsilon) \phi_k^{(2)} - \phi_k^{(1)} = \varepsilon v \frac{\partial \phi_k^{(1)}}{\partial y} \quad (y = 0), \quad v = \frac{g}{\omega^2} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \phi_k^{(1)}}{\partial y} = 0 \quad (y = H_1), \quad \frac{\partial \phi_k^{(2)}}{\partial y} = 0 \quad (y = -H_2) \quad (1.4)$$

В дальнем поле следует потребовать выполнения условий излучения. На круговом контуре $S: x^2 + (y + h)^2 = a^2$, расположенном в нижнем слое, ставится условие непротекания

$$\frac{\partial \phi_k^{(2)}}{\partial n} = n_k \quad (x, y \in S) \quad (1.5)$$

Здесь g – ускорение силы тяжести, $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ – внутренняя нормаль к контуру S , h – отстояние центра цилиндра от границы раздела ($h > a$).

Радиационные силы $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$, действующие на тело, обычно записываются в матричной форме (подробнее см., например, [1])

$$F_k = \sum_{j=1}^2 \eta_j \tau_{kj} \quad (k = 1, 2)$$

$$\tau_{kj} = \rho_2 \omega^2 \int_S \phi_j^{(2)} n_k ds = \omega^2 \mu_{kj} - i\omega \lambda_{kj}$$

где μ_{kj} и λ_{kj} – коэффициенты присоединенной массы и демпфирования соответственно. Вводя полярную систему координат r, θ с началом в центре контура S $x = r \sin \theta$, $y + h = r \cos \theta$ и учитывая, что для кругового цилиндра $n_1 = -\sin \theta$, $n_2 = -\cos \theta$, получим

$$(\tau_{1j}, \tau_{2j}) = \rho_2 \omega^2 a \int_0^{2\pi} \phi_j^{(2)} (\sin \theta, \cos \theta) d\theta \quad (1.6)$$

Используя мультиполи как фундаментальные решения уравнения Лапласа, решения уравнений (1.2) с учетом граничных условий (1.3), (1.4) запишем в виде (см. подробнее [6, 8])

$$\phi_k^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} a^m (p_m D_m + q_m G_m) \quad (1.7)$$

$$\phi_k^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} a^m \left[p_m \left(\frac{\cos m\theta}{r^m} + d_m \right) + q_m \left(\frac{\sin m\theta}{r^m} + g_m \right) \right] \quad (1.8)$$

$$d_m = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^{\infty} k^{m-1} \cos kx [A_1(k) e^{k(y+h)} + B_1(k) e^{-k(y+h)}] dk \quad (1.9)$$

$$g_m = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty k^{m-1} \sin kx [A_2(k)e^{k(y+h)} + B_2(k)e^{-k(y+h)}] dk \quad (1.10)$$

$$D_m = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty k^{m-1} C_1(k) \cosh k(y-H_1) \cos kx dk \quad (1.11)$$

$$G_m = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty k^{m-1} C_2(k) \cosh k(y-H_1) \sin kx dk \quad (1.12)$$

$$A_{1,2} = \frac{Q(k)}{2Z(k) \cosh kH_2} [\mp(-1)^m e^{-kH_2} - e^{k(H_2-2h)}] \quad (1.13)$$

$$B_{1,2} = \frac{e^{-kH_2}}{2Z(k) \cosh kH_2} [\pm(-1)^m V(k)e^{2kh} - Q(k)] \quad (1.14)$$

$$C_{1,2} = \frac{(1+\epsilon)}{Z(k) \cosh kH_1 \cosh kH_2} [e^{k(H_2-h)} \pm (-1)^m e^{k(h-H_2)}]$$

$$Z = (1+\epsilon)t_1 + t_2 - \epsilon v k t_1 t_2, \quad (Q, V) = (1+\epsilon)t_1 \pm (\epsilon v k t_1 - 1)$$

$$t_1 = \tanh kH_1, \quad t_2 = \tanh kH_2$$

Подынтегральные выражения в (1.9) – (1.12) всегда имеют в точке $k = k_0$ простой полюс, являющийся корнем уравнения $Z(k_0) = 0$, что равносильно дисперсионному соотношению

$$\omega^2 = \epsilon g k_0 / [(1+\epsilon) \coth k_0 H_2 + \coth k_0 H_1]$$

Это означает, что в рассматриваемой двухслойной жидкости всегда существует одна волновая мода.

С учетом условия излучения в дальнем поле соотношения (1.9), (1.10) примут вид

$$d_m = \frac{1}{(m-1)!} \{ \text{pv} \int_0^\infty k^{m-1} \cos kx [A_1 e^{k(y+h)} + B_1 e^{-k(y+h)}] dk - \\ - i\pi k_0^{m-1} [A_1^0 e^{k_0(y+h)} + B_1^0 e^{-k_0(y+h)}] \cos k_0 x \} \quad (1.15)$$

$$g_m = \frac{1}{(m-1)!} \{ \text{pv} \int_0^\infty k^{m-1} \sin kx [A_2 e^{k(y+h)} + B_2 e^{-k(y+h)}] dk - \\ - i\pi k_0^{m-1} [A_2^0 e^{k_0(y+h)} + B_2^0 e^{-k_0(y+h)}] \sin k_0 x \} \quad (1.16)$$

где символы pv означают интеграл в смысле главного значения, верхний индекс 0 – вычет соответствующей функции в точке $k = k_0$. Построенное решение удовлетворяет уравнениям (1.2) и всем граничным условиям задачи, кроме условия непротекания на поверхности цилиндра. Для учета граничного условия (1.5) используются известные соотношения

$$\exp[k(ix \pm y \pm h)] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\pm kr)^m}{m!} \exp(\pm im\theta) \quad (1.17)$$

Тогда (1.8) примет вид

$$\Phi_k^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{r^m} (p_m \cos m\theta + q_m \sin m\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^m}{m!} \cos m\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n p_n}{(n-1)!} I_{n+m-1} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m \sin m\theta}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n q_n}{(n-1)!} J_{n+m-1} \quad (1.18)$$

$$I_{n+m-1} = \rho v \int_0^\infty k^{n+m-1} [A_1 + (-1)^m B_1] dk - i\pi k_0^{n+m-1} [A_1^0 + (-1)^m B_1^0] \quad (1.19)$$

$$J_{n+m-1} = \rho v \int_0^\infty k^{n+m-1} [A_2 - (-1)^m B_2] dk - i\pi k_0^{n+m-1} [A_2^0 - (-1)^m B_2^0] \quad (1.20)$$

При этом в выражениях (1.13), (1.14) для $A_{1,2}$, $B_{1,2}$ следует заменить m на n .

Дифференцируя (1.18) по r и учитывая (1.5), получим: при горизонтальных колебаниях цилиндра ($k = 1$)

$$p_m \equiv 0, \quad q_m - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{m+n} q_n}{m!(n-1)!} J_{n+m-1} = -a\delta_{m1} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (1.21)$$

при вертикальных колебаниях цилиндра ($k = 2$)

$$p_m - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{m+n} p_n}{m!(n-1)!} I_{n+m-1} = -a\delta_{m1}, \quad q_m \equiv 0 \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (1.22)$$

где δ_{m1} – символ Кронекера. При численном решении бесконечных систем линейных уравнений (1.21), (1.22) используется метод редукции и учитывается только конечное число членов, необходимое для достижения заданной точности.

После определения p_m и q_m можно найти все характеристики движения жидкости. Подставляя соотношения (1.21), (1.22) в (1.18), получим значение потенциала на контуре тела ($r = a$)

$$\phi_1^{(2)} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin m\theta + a \sin \theta \quad (1.23)$$

$$\phi_2^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} p_m \left[2 \cos m\theta + \frac{a^m I_{m-1}}{(m-1)!} \right] + a \cos \theta \quad (1.24)$$

Гидродинамическая нагрузка согласно (1.6) равна

$$\tau_{11} = -\pi\rho_2 a \omega^2 (2q_1 + a), \quad \tau_{22} = -\pi\rho_2 a \omega^2 (2p_1 + a), \quad \tau_{12} = \tau_{21} = 0 \quad (1.25)$$

При $H_2 \rightarrow \infty$ выполняется равенство $\tau_{11} = \tau_{22}$, так как в (1.9), (1.10) $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2 = 0$ и, следовательно, системы уравнений (1.21), (1.22) имеют одинаковые коэффициенты. Вдали от цилиндра при $x \rightarrow \pm\infty$ потенциалы верхнего и нижнего слоев согласно (1.7), (1.8) имеют вид

$$(\phi_1^{(1)}, \phi_1^{(2)}) = \pm(\phi^{(1)}, \phi^{(2)}) E_1 e^{\mp ik_0 x}, \quad (\phi_2^{(1)}, \phi_2^{(2)}) = (\phi^{(1)}, \phi^{(2)}) E_2 e^{\mp ik_0 x} \quad (1.26)$$

$$\phi^{(1)}(k_0, y) = -\frac{\cos k_0 (y - H_1)}{\sinh k_0 H_1}, \quad \phi^{(2)}(k_0, y) = \frac{\cos k_0 (y + H_2)}{\sinh k_0 H_2} \quad (1.27)$$

$$E_1 = \frac{\pi(1 + \varepsilon) \tanh k_0 H_1}{Z'(k_0) \cosh k_0 H_2} \sum_{m=1}^{\infty} a^m q_m \frac{k_0^{m-1}}{(m-1)!} [(-1)^m e^{k_0(h-H_2)} - e^{k_0(H_2-h)}]$$

$$E_2 = \frac{i\pi(1 + \varepsilon) \tanh k_0 H_1}{Z'(k_0) \cosh k_0 H_2} \sum_{m=1}^{\infty} a^m p_m \frac{k_0^{m-1}}{(m-1)!} [(-1)^m e^{k_0(h-H_2)} + e^{k_0(H_2-h)}]$$

штрих означает дифференцирование по k .

Вертикальные возвышения границы раздела $\eta(x, t)$ определяются из соотношения

$$\eta = \frac{1}{\varepsilon g} \frac{\partial}{\partial t} [\Phi^{(1)} - (1 + \varepsilon)\Phi^{(2)}]_{y=0}$$

и с использованием (1.1) могут быть представлены в виде

$$\eta = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^2 \eta_k \zeta_k(x) \exp(i\omega t) \right], \quad \zeta_k(x) = \frac{\omega^2}{\varepsilon g} [(1 + \varepsilon)\phi_k^{(2)} - \phi_k^{(1)}]_{y=0}$$

В дальнем поле с учетом (1.26) получим

$$\zeta_1 = \pm k_0 E_1 e^{\mp i k_0 x}, \quad \zeta_2 = k_0 E_2 e^{\mp i k_0 x} \quad (x \rightarrow \pm \infty)$$

Рассмотрим подробнее поведение решения в предельных случаях низких и высоких частот колебания цилиндра. При $\omega \rightarrow 0$ ($\nu \rightarrow \infty$) динамическое условие в (1.3) принимает вид $\partial \phi_k^{(2)} / \partial y = 0$ при $y = 0$ и поверхность раздела становится эквивалентна твердой крышке независимо от скачка плотности. Для высокочастотных колебаний $\omega \rightarrow \infty$ ($\nu \rightarrow 0$) силой тяжести можно пренебречь и для невесомой жидкости динамическое условие в (1.3) имеет вид $(1 + \varepsilon) \phi_k^{(2)} = \phi_k^{(1)}$ при $y = 0$. В этих предельных случаях уравнение $Z(k) = 0$ имеет только тривиальное решение, что означает отсутствие волнового движения и равенство нулю коэффициентов демпфирования. При этом в (1.15), (1.16), (1.19), (1.20) интегралы рассматриваются в обычном смысле и вторые слагаемые, обусловленные вычетами, отсутствуют.

Далее обратимся к рассмотрению дифракционной задачи. Пусть на неподвижный круговой цилиндр набегают справа внутренняя волна с амплитудой η_0 и потенциалом скоростей

$$\Psi_0^{(s)}(x, y, t) = \text{Re}[\eta_0 \psi_0^{(s)}(x, y) \exp(i\omega t)] \quad (1.28)$$

где с учетом (1.27) $\psi_0^{(s)} = (i\omega / k_0) \phi^{(s)}(k_0, y) e^{i k_0 x}$. Для нахождения дифракционного потенциала $\Psi^{(s)}(x, y, t) = \text{Re}[\eta_0 \psi^{(s)}(x, y) \exp(i\omega t)]$ следует определить функции $\psi^{(s)}$, удовлетворяющие уравнениям и граничным условиям, аналогичным (1.2)–(1.4), а также условию на контуре S

$$\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial n} = - \frac{\partial \psi_0^{(2)}}{\partial n} \quad (x, y \in S) \quad (1.29)$$

В дальнем поле должно быть выполнено условие излучения, означающее, что при рассеянии образуются только волны, уходящие от тела.

Решение дифракционной задачи можно получить двумя способами: построить его независимо от решения радиационной задачи, используя метод мультипольных разложений, либо учесть связь между решениями задач дифракции и радиации [10]. Применяя второй способ, получим

$$\psi^{(s)} = \frac{i\omega}{k_0 D} [\bar{E}_1(\phi_2^{(2)} - \bar{\phi}_2^{(2)}) + \bar{E}_2(\phi_1^{(2)} - \bar{\phi}_1^{(2)})] - \psi_0^{(s)}$$

где $D = -2E_1 E_2$. В дальнем поле

$$\psi^{(s)} = \frac{i\omega}{k_0} \phi^{(s)}(k_0, y) \begin{cases} \text{Re}^{-i k_0 x} & (x \rightarrow \infty) \\ (T-1)e^{i k_0 x} & (x \rightarrow -\infty) \end{cases}$$

$$R = (\bar{E}_1 E_2 + E_1 \bar{E}_2) / \bar{D}, \quad T = (\bar{E}_1 E_2 - E_1 \bar{E}_2) / \bar{D}$$

где R и T – коэффициенты отражения и прохождения, а черта сверху означает комплексное сопряжение. Полученные соотношения позволяют выразить дифракционные силы $\mathbf{P} = (P_1, P_2)$, где

$$P_k = i\omega \rho_2 \eta_0 a \int_0^{2\pi} (\psi_0^{(2)} + \psi^{(2)}) n_k d\theta \quad (k = 1, 2) \quad (1.30)$$

через характеристики дальнего радиационного поля и, следовательно, распространить соотношения эквивалентности, выведенные в [1] для двухслойной жидкости с

безграничным нижним слоем, на рассматриваемый случай двухслойной жидкости конечной глубины

$$(P_1, P_2) = i\rho_2\eta_0\omega^2\Lambda(k_0)(E_1, E_2)$$

$$\Lambda(k) = \frac{1}{\sinh^2 kH_2} \left[H_2 + \frac{\sinh 2kH_2}{2k} \right] + \frac{1}{(1+\varepsilon)\sinh^2 kH_1} \left[H_1 + \frac{\sinh 2kH_1}{2k} \right]$$

2. Трехслойная жидкость. Распределение плотности в невозмущенном состоянии имеет вид

$$\rho(y) = \begin{cases} \rho_1 & (H_0 < y < H_0 + H_1) \\ \rho_1[1 + \varepsilon(1 - y/H_0)] & (0 < y < H_0) \\ \rho_2 = \rho_1(1 + \varepsilon) & (-H_2 < y < 0) \end{cases} \quad (2.1)$$

где H_1, H_2 – по-прежнему толщины верхнего и нижнего слоев, а H_0 – толщина среднего слоя. Решение радиационной задачи о колебаниях цилиндра, полностью погруженного в нижнем слое, запишем аналогично разд. 1 в виде (1.1) для верхнего и нижнего слоев, где потенциалы $\phi_k^{(s)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\phi_k^{(1)} = 0 \quad (H_0 < y < H_0 + H_1), \quad \Delta\phi_k^{(2)} = 0 \quad (-H_2 < y < 0) \quad (2.2)$$

В среднем слое волновое движение жидкости можно описать распределением вертикальной скорости

$$W(x, y, t) = \text{Re}[i\omega \sum_{k=1}^2 \eta_k w_k(x, y) \exp(i\omega t)]$$

где $w_k(x, y)$ в приближении Буссинеска удовлетворяет уравнению

$$\Delta w_k = \frac{N^2 \partial^2 w_k}{\omega^2 \partial x^2} \quad (0 < y < H_0), \quad N = \sqrt{\varepsilon q / (1 + \varepsilon) H_0} \quad (2.3)$$

где N – частота Вэйсяля–Брента, при определении которой за основное значение плотности выбрано ρ_2 . Дополнительно к граничным условиям (1.4) и (1.5) следует задать условия согласования на границах среднего слоя

$$\frac{\partial \phi_k^{(1)}}{\partial y} = w_k, \quad \frac{\partial^2 \phi_k^{(1)}}{\partial y^2} = \frac{\partial w_k}{\partial y} \quad (y = H_0) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \phi_k^{(2)}}{\partial y} = w_k, \quad \frac{\partial^2 \phi_k^{(2)}}{\partial y^2} = \frac{\partial w_k}{\partial y} \quad (y = 0) \quad (2.5)$$

В дальнейшем также следует потребовать выполнения условия излучения.

Используя метод мультиполюльных разложений, решение уравнений (2.2) будем искать в виде (1.7), (1.8), а решение (2.3) – в виде

$$w_k = \sum_{m=1}^{\infty} a^m (p_m K_m + q_m U_m)$$

$$K_m = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^{\infty} k^{m-1} (X_1 \sin \gamma y + Y_1 \cos \gamma y) \cos kx dk \quad (2.6)$$

$$U_m = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^{\infty} k^{m-1} (X_2 \sin \gamma y + Y_2 \cos \gamma y) \sin kx dk \quad (2.7)$$

$$\gamma = k\chi, \quad \chi = \sqrt{N^2 / \omega^2 - 1}$$

Функции $A_{1,2}(k), B_{1,2}(k)$ в выражениях (1.9) – (1.12) и $X_{1,2}(k), Y_{1,2}(k)$ в (2.6), (2.7) теперь

определяются с учетом граничных условий (2.4), (2.5) и, например, выражения для $A_{1,2}(k)$ и $B_{1,2}(k)$ имеют вид

$$A_{1,2} = \frac{Q(k)(1+t_2)}{2Z(k)} [e^{-2kh} \pm (-1)^m e^{-2kH_2}] \quad (2.8)$$

$$B_{1,2} = \frac{(1+t_2)}{2Z(k)} [Q(k)e^{-2kH_2} \pm (-1)^m V(k)e^{2k(h-H_2)}] \quad (2.9)$$

$$Z = (\chi t_1 t_2 - 1/\chi) \tan \gamma H_0 - t_1 - t_2, \quad (Q, V) = (\chi t_1 \pm 1/\chi) \tan \gamma H_0 \pm t_1 - 1$$

Подынтегральные выражения в (1.9) – (1.12), (2.6), (2.7) при $\omega > N$ не имеют особенностей, а при $\omega < N$ имеют счетное число простых полюсов k_j ($j = 1, 2, \dots$), являющихся корнями уравнения $Z(k_j) = 0$, что равносильно дисперсионному соотношению для внутренних волн в рассматриваемой трехслойной жидкости

$$\tan \gamma H_0 = \chi(t_1 + t_2) / (\chi^2 t_1 t_2 - 1) \quad (2.10)$$

С учетом условия излучения в дальнем поле соотношения (1.9), (1.10) примут вид

$$d_m = \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \text{pv} \int_0^\infty k^{m-1} \cos kx [A_1 e^{k(y+h)} + B_1 e^{-k(y+h)}] dk - \right. \\ \left. - i\pi \sum_{j=1}^\infty k_j^{m-1} [A_1^j e^{k_j(y+h)} + B_1^j e^{-k_j(y+h)}] \cos k_j x \right\} \quad (2.11)$$

$$g_m = \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \text{pv} \int_0^\infty k^{m-1} \sin kx [A_2 e^{k(y+h)} + B_2 e^{-k(y+h)}] dk - \right. \\ \left. - i\pi \sum_{j=1}^\infty k_j^{m-1} [A_2^j e^{k_j(y+h)} + B_2^j e^{-k_j(y+h)}] \sin k_j x \right\} \quad (2.12)$$

где верхний индекс j означает вычет соответствующей функции в точке $k = k_j$. Используя соотношения (1.17), получим для потенциала в нижнем слое выражения вида (1.18), где теперь

$$I_{n+m-1} = \text{pv} \int_0^\infty k^{n+m-1} [A_1 + (-1)^m B_1] dk - i\pi \sum_{j=1}^\infty k_j^{n+m-1} [A_1^j + (-1)^m B_1^j] \quad (2.13)$$

$$J_{n+m-1} = \text{pv} \int_0^\infty k^{n+m-1} [A_2 - (-1)^m B_2] dk - i\pi \sum_{j=1}^\infty k_j^{n+m-1} [A_2^j - (-1)^m B_2^j] \quad (2.14)$$

При этом в выражениях (2.8), (2.9) для $A_{1,2}, B_{1,2}$ следует заменить m на n . При $\omega > N$ интегралы в (2.11) – (2.14) рассматриваются в обычном смысле и слагаемые со знаком суммы следует опустить. Системы линейных уравнений для определения неизвестных p_m и q_m имеют вид (1.21), (1.22) соответственно для вертикальных и горизонтальных колебаний цилиндра. Значение потенциала на контуре и радиационная нагрузка по-прежнему определяются из соотношений (1.23) – (1.25). При $H_2 \rightarrow \infty$ аналогично двухслойной жидкости $\tau_{11} = \tau_{22}$.

В отличие от двухслойной жидкости течение в дальнем поле отлично от нуля только при $\omega < N$. При этом оно представляет собой суперпозицию бесконечного числа волновых мод. Так, потенциал нижнего слоя при $x \rightarrow \pm\infty$ имеет вид с учетом (1.27)

$$\phi_1^{(2)} = \pm \sum_{j=1}^\infty T_1(k_j) \phi^{(2)}(k_j, y) e^{\mp i k_j x} \quad (2.15)$$

$$\Phi_2^{(2)} = \sum_{j=1}^{\infty} T_2(k_j) \Phi^{(2)}(k_j, y) e^{\mp i k_j x} \quad (2.16)$$

$$T_1(k) = \frac{\pi(1+t_2)(\chi^2 t_1^2 + 1)}{Z'(k)(\chi^2 t_1 t_2 - 1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m q_m}{(m-1)!} k^{m-1} [e^{-kh} - (-1)^m e^{k(h-2H_2)}]$$

$$T_2(k) = \frac{-i\pi(1+t_2)(\chi^2 t_1^2 + 1)}{Z'(k)(\chi^2 t_1 t_2 - 1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m p_m}{(m-1)!} k^{m-1} [e^{-kh} + (-1)^m e^{k(h-2H_2)}]$$

В верхних слоях волновое движение в дальнем поле можно легко восстановить из соотношений (2.15), (2.16) и вида собственных функций для вертикальной скорости при распределении плотности (2.1)

$$\xi(y, k) = \begin{cases} \sinh k(y - H_1 - H_0) / \sigma(0, k) & (H_0 < y < H_1 + H_0) \\ \sigma(y, k) / \sigma(0, k) & (0 < y < H_0) \\ \sinh k(y + H_2) / \sinh kH_2 & (-H_2 < y < 0) \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\sigma(y, k) = \cosh kH_1 \sin \gamma(y - H_0) / \chi - \sinh kH_1 \cos \gamma(y - H_0)$$

Эти собственные функции являются ортогональными

$$\int_0^{H_0} \xi(y, k_j) \xi(y, k_l) dy = \begin{cases} c_j^2 & (l = j) \\ 0 & (l \neq j) \end{cases} \quad (2.18)$$

В предельных случаях низких и высоких частот колебаний цилиндра исходная задача сводится к движению цилиндра в слое постоянной плотности, заключенном между твердыми горизонтальными стенками. При $\omega \rightarrow 0$ толщина этого слоя аналогично двухслойной жидкости равна H_2 , а при $\omega \rightarrow \infty$ благодаря использованию приближения Буссинеска составляет полную глубину жидкости $H = H_1 + H_2 + H_0$.

В отличие от жидкости с одномодовым волновым движением в случае непрерывной стратификации при многомодовом волновом движении не удастся связать решения радиационной и дифракционной задач.

Решение дифракционной задачи с помощью метода мультиполюсных разложений строится аналогично изложенному выше решению радиационной задачи. Падающей справа волной может быть любая внутренняя мода с вертикальной скоростью

$$W(x, y, t) = \text{Re}\{\eta_0 \beta(k) \xi(y, k) \exp[i(kx + \omega t)]\}$$

$$\beta(k) = i\omega / [H_0 \int_0^{H_0} \xi(y, k) dy]$$

где волновое число k удовлетворяет дисперсионному соотношению (2.10), собственные функции волновых мод – (2.17), а η_0 определяет амплитуду внутренней волны. Для сопоставления с двухслойной жидкостью удобно за η_0 принять осредненные по толщине стратифицированного слоя вертикальные возвышения в набегающей волне. При заданной вертикальной скорости $W(x, y, t)$ возвышения во внутренних волнах $\eta(x, y, t)$ определяются из соотношения $\partial \eta / \partial t = W$.

В нижнем слое потенциал падающей волны моды l представим в виде (1.28), где $\Psi_0^{(2)} = \beta(k_l) \Phi^{(2)}(k_l, y) e^{i k_l x} / k_l$, а дифракционный потенциал ищем в виде

$$\Psi^{(2)}(x, y, t) = \text{Re} \left[\frac{\eta_0 \beta(k_l)}{k_l} \Psi^{(2)}(x, y) \exp(i\omega t) \right]$$

Для определения возмущенного движения во всей жидкости следует решить урав-

нения аналогичные (2.2), (2.3) с граничным условием (1.29) и условиями на границах слоев типа (1.4), (2.4), (2.5). В дальнем поле по-прежнему должно быть выполнено условие излучения.

Решение для $\psi^{(2)}(x, y)$ строится аналогично радиационной задаче и система линейных уравнений для определения p_m и q_m имеет вид

$$p_m - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{m+n} p_n}{m!(n-1)!} I_{n+m-1} = \frac{a^m k_l^m}{2m! \sinh k_l H_2} [e^{k_l(H_2-h)} + (-1)^m e^{k_l(h-H_2)}],$$

$$q_m - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{m+n} q_n}{m!(n-1)!} J_{n+m-1} = \frac{ia^m k_l^m}{2m! \sinh k_l H_2} [e^{k_l(H_2-h)} - (-1)^m e^{k_l(h-H_2)}]$$

Дифракционные силы $P_{1,2}$ определяются аналогично (1.30)

$$P_k = i\omega\rho_2\eta_0 a \int_0^{2\pi} \left[\psi_0^{(2)} + \frac{\beta(k_l)}{k_l} \psi^{(2)} \right] n_k d\theta$$

$$(P_1, P_2) = \frac{2i\pi\rho_2\eta_0 a \omega \beta(k_l)}{k_l} (q_1, p_1)$$

В дальнем поле дифракционный потенциал нижнего слоя имеет вид

$$\psi^2 = \sum_{j=1}^{\infty} C_j^{\pm}(k_j) \phi^{(2)}(k_j, y) e^{\mp ik_j x} \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

где $C^{\pm}(k) = T_2(k) \pm T_1(k)$ и $T_{1,2}$ определены в (2.15), (2.16). В результате решения дифракционной задачи можно определить матрицы рассеяния назад ($x \rightarrow \infty$) и вперед ($x \rightarrow -\infty$) $\|Z_{lm}^{\pm}\|$, в которых для каждого элемента номер строки l отвечает номеру падающей моды, а номер столбца m – номеру рассеянной внутренней волны. Характеристики рассеянных волн удобно сравнивать с использованием энергетической нормы (2.18), при этом

$$Z_{lm}^{\pm} = \frac{k_m c_m \tanh k_m H_2 C^{\pm}(k_m)}{k_l c_l}$$

При бесконечной глубине нижнего слоя всегда отсутствуют волны, рассеянные назад, так как при $H_2 \rightarrow \infty$ $p_m = -iq_m$ и, следовательно, $Z_{lm}^+ \equiv 0$, а дифракционные силы $P_2 = -iP_1$.

3. Соотношения эквивалентности. Для рассматриваемой трехслойной жидкости можно вывести соотношения, связывающие характеристики радиационной и дифракционной задач. Подобные соотношения для двухслойной жидкости приведены в [1, 8]. Рассмотрим замкнутый контур B произвольной формы, полностью погруженный в нижнем слое. Предположим, что существуют два решения, удовлетворяющие уравнениям (2.2), (2.3) и граничным условиям (1.4), (2.4), (2.5). В нижнем слое эти решения для потенциалов обозначим $X^{(2)}(x, y)$ и $Y^{(2)}(x, y)$, которые также должны удовлетворять соответствующим граничным условиям для нормальных производных на контуре B .

Пусть в дальнем поле ($x \rightarrow \pm\infty$) эти решения имеют вид

$$X^{(2)} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(A_j^{\pm} e^{ik_j x} + B_j^{\pm} e^{-ik_j x} \right) \phi^{(2)}(k_j, y)$$

$$Y^{(2)} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(C_j^{\pm} e^{ik_j x} + D_j^{\pm} e^{-ik_j x} \right) \phi^{(2)}(k_j, y)$$

Учитывая, что в среднем слое $N = \text{const}$, и применяя теорему Грина для каждого слоя, получим

$$I(X, Y) \equiv \int_B \left(X \frac{\partial Y}{\partial y} - Y \frac{\partial X}{\partial y} \right) ds = 2i \sum_{j=1}^{\infty} k_j (A_j^+ D_j^+ - B_j C_j^+ + B_j^- C_j^- - A_j^- D_j^-) \Gamma(k_j) \quad (3.1)$$

$$\Gamma(k) = \int_{H_0}^{H_0+H_1} \Gamma_1^2(k, y) dy + \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) \int_0^{H_0} \Gamma_2^2(k, y) dy + \int_{-H_2}^0 \Gamma_3^2(k, y) dy$$

$$\Gamma_1 = \frac{\cosh k(y - H_1 - H_0)}{k \sigma(0, k)}, \quad \Gamma_3 = \frac{\cosh k(y + H_2)}{k \sinh k H_2}$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{\gamma^2 \sigma(0, k)} [k \cosh k H_1 \cos \gamma(y - H_0) + \gamma \sinh k H_1 \sin \gamma(y - H_0)]$$

Используя результаты [11], нетрудно показать, что $\Gamma(k_j) = N^2 c_g^2 c_g(k_j) / k \omega^3$, где $c_g(k_j)$ – групповая скорость внутренней волны.

Подставляя в (3.1) решения радиационной задачи для трех возможных в плоском случае степеней свободы тела, получим условие симметрии коэффициентов присоединенных масс и демпфирования $\tau_{mn} = \tau_{nm}$ ($m, n = 1, 2, 3$) и связь между коэффициентами демпфирования и характеристиками радиационных потенциалов в дальнем поле

$$\lambda_{mn} = \frac{\rho_2}{\omega} \sum_{j=1}^{\infty} k_j [B_j^+(m) \bar{B}_j^+(n) + A_j^-(m) \bar{A}_j^-(n)] \Gamma(k_j)$$

где m и n в скобках указывают номера степеней свободы, для которых взяты соответствующие потенциалы.

Используя в (3.1) решение дифракционной задачи и его комплексно-сопряженное значение, получим связь между характеристиками набегающей волны l -той моды и рассеянных волн

$$k_l |A_l^+(4)|^2 \Gamma(k_l) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \left(|B_j^+(4)|^2 + |A_j^-(4)|^2 \right) \Gamma(k_j)$$

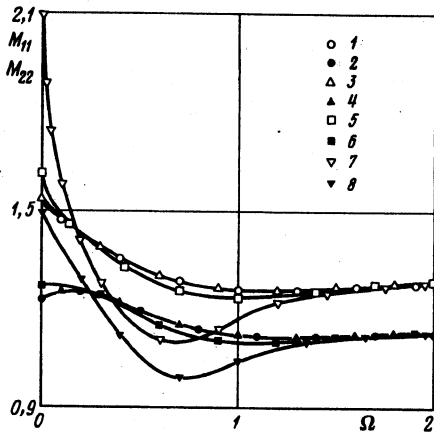
где 4 в скобках указывает, что соответствующие коэффициенты относятся к потенциалу, представляющему собой сумму падающей и рассеянных волн.

Одновременное использование решений радиационной и дифракционной задач позволяет установить соотношения эквивалентности между дифракционными характеристиками и характеристиками дальнего радиационного поля

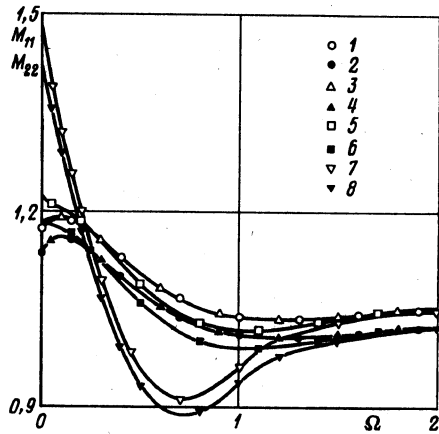
$$P_n = -2i \rho_2 k_l A_l^+(4) B_l^+(n) \Gamma(k_l) = -2i \rho_2 \sum_{j=1}^{\infty} k_j [B_j^+(4) \bar{B}_j^+(n) + A_j^-(4) \bar{A}_j^-(n)] \Gamma(k_j) \quad (n = 1, 2, 3)$$

Полученные соотношения эквивалентности несколько упрощаются для контура, симметричного относительно вертикальной оси (см. подробнее [1, 8]).

4. Численные расчеты. В опубликованных ранее исследованиях наиболее полно рассмотрен только частный случай двухслойной жидкости – однородная жидкость со свободной поверхностью как безграничной [7], так и конечной глубины [12–14]. В [13, 14] представлено сравнение теоретических и экспериментальных результатов для дифракционной задачи. При получении решения методом мультипольных разложений с высокой точностью достаточно ограничиться только небольшим числом разложений [7]. Представленные ниже численные результаты получены с использованием



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Зависимости присоединенных масс $M_{ij}(\Omega)$ для двухслойной и трехслойной жидкости при $h_3 = 5$: $(h_1, h_2, d) = (1, 4, 2)$ – кривые 1, 2; $(h_1, h_0, h_2, d) = (0,95; 0,1; 3,95; 1,95)$ – кривые 3, 4; $(0,75; 0,5; 3,75; 1,75)$ – кривые 5, 6; $(0,25; 1,5; 3,25; 1,25)$ – кривые 7, 8. Кривые 1, 3, 5, 7 соответствуют $i = 1$, кривые 2, 4, 6, 8 – $j = 2, d = h/a$

Фиг. 2. Зависимости присоединенных масс $M_{ij}(\Omega)$ для двухслойной и трехслойной жидкости при $h_3 = 11$: $(h_1, h_2, d) = (1, 10, 2)$ – кривые 1, 2; $(h_1, h_0, h_2, d) = (0,95; 0,1; 9,95; 1,95)$ – кривые 3, 4; $(0,75; 0,5; 9,75; 1,75)$ – кривые 5, 6; $(0,25; 1,5; 9,25; 1,25)$ – кривые 7, 8. Кривые 1, 3, 5, 7 соответствуют $j = 1$, кривые 2, 4, 6, 8 – $j = 2$

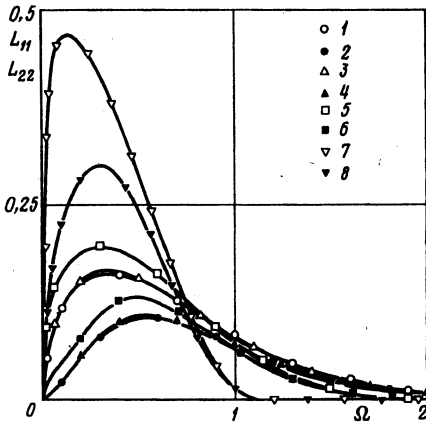
пяти членов, что гарантирует точность не менее 0,1%. Численное интегрирование выполнялось с относительной погрешностью 10^{-4} . Исходя из этой погрешности, определялось также и число учитываемых слагаемых в бесконечных суммах (2.13), (2.14).

Влияние толщины пикноклина и глубины нижнего слоя на радиационные и дифракционные характеристики изучено путем сопоставления результатов для двухслойной ($h_1 \equiv H_1/a = 1, h_2 \equiv H_2/a = 4; 10$) и трехслойной жидкости с различными значениями толщины среднего слоя $h_0 \equiv H_0/a = 0,1; 0,5; 1,5$. При этом средний горизонт пикноклина в невозмущенном состоянии занимает неизменное положение относительно верхней границы жидкости, соответствующее границе раздела в двухслойной жидкости. Отстояние центра цилиндра от верхней границы жидкости фиксировано и равно $3a$. Относительный перепад плотности для всех расчетов составляет $\epsilon = 0,03$.

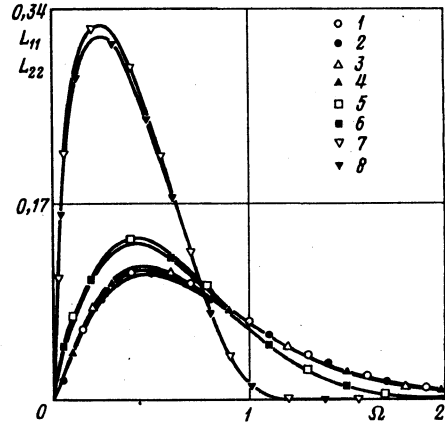
Коэффициенты присоединенных масс $M_{ij} = \mu_{ij} / \pi r_2 a^2$ и демпфирования $L_{ij} = \lambda_{ij} / \pi r_2 \omega a^2$ в зависимости от $\Omega = \omega^2 a (2 + \epsilon) / \epsilon g$ показаны на фиг. 1,3 для полной глубины $h_3 \equiv H/a = 5$ и на фиг. 2,4 – для $h_3 = 11$.

Поведение радиационной нагрузки для двухслойной жидкости и трехслойной с узким пикноклином ($h_0 = 0,1$) практически совпадает, а с утолщением пикноклина

h_2	$M_{11}^{(2)}$	$M_{22}^{(2)}$	$M_{11}^{(3)}$	$M_{22}^{(3)}$
4	1,3283	1,1646	1,3319	1,1658
10	1,0872	1,0582	1,0882	1,0596



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Зависимость коэффициентов демпфирования $L_{jj}(\Omega)$ при $h_3 = 5$. Обозначения кривых даны на фиг. 1

Фиг. 4. Зависимость коэффициентов демпфирования $L_{jj}(\Omega)$ при $h_3 = 11$. Обозначения кривых даны на фиг. 2

происходит возрастание максимальных значений присоединенных масс и коэффициентов демпфирования. При $\omega \rightarrow \infty$ предельные значения для присоединенных масс $M_{jj}^{(2)}$, $M_{jj}^{(3)}$ соответственно для двухслойной и трехслойной жидкости равны: (см. таблицу).

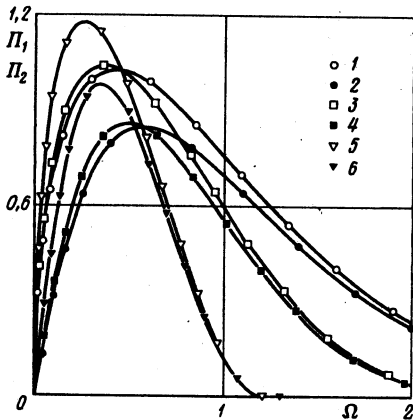
Случай двухслойной жидкости рассмотрен без приближения Буссинеска и поэтому малое расхождение этих значений для двухслойной и трехслойной жидкостей свидетельствует о справедливости использования этого приближения при данном перепаде плотности. При достаточно большой глубине нижнего слоя радиационные нагрузки для горизонтальных и вертикальных колебаний близки, особенно для коэффициентов демпфирования (фиг. 4). Однако с уменьшением толщины нижнего слоя наблюдается значительное превышение радиационной нагрузки для горизонтальных колебаний по сравнению с вертикальными.

Как указывалось выше, волновые движения в трехслойной жидкости не возбуждаются при $\omega > N$. Значения $\omega = N$ соответствуют $\Omega = 19,7; 3,94; 1,31$ для $h_0 = 0,1; 0,5; 1,5$.

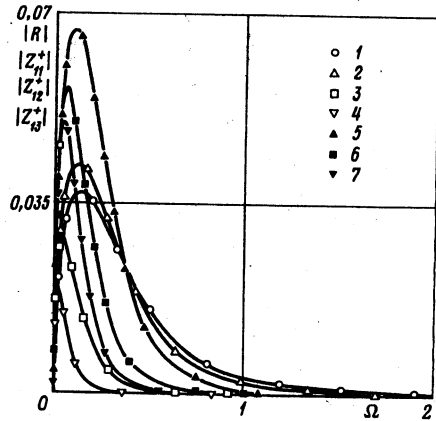
Дифракционные силы $\Pi_j = |P_j| (2 + \epsilon) / \rho_2 \eta_0 a \epsilon g$ представлены на фиг. 5 для $h_3 = 5$. В отличие от фиг. 1,3 случай трехслойной жидкости с $h_0 = 0,1$ не представлен, так как он дает результаты, практически совпадающие со случаем двухслойной жидкости. Аналогично радиационной нагрузке, особенно коэффициентам демпфирования, горизонтальные дифракционные силы больше вертикальных при относительно малой глубине нижнего слоя.

Характеристики отраженных волн показаны на фиг. 6 для $h_3 = 5$. С утолщением пикноклина возрастают амплитуды рассеянных волн как для моды, совпадающей с набегающей, так и для более высоких мод.

Заключение. Определены радиационные и дифракционные нагрузки, действующие на круговой цилиндр, расположенный под пикноклином. Показано существенное влияние толщины стратифицированного слоя на гидродинамические нагрузки. Уменьшение полной глубины жидкости приводит к диспропорции между диагональными коэффициентами радиационной нагрузки при горизонтальных и вертикальных колебаниях цилиндра и превышению горизонтальных дифракционных сил над



Фиг. 5



Фиг. 6

Фиг. 5. Дифракционные силы $P_1(\Omega)$ для набегающей волны первой моды при $h_3 = 5$: $(h_1, h_2, d) = (1, 4, 2)$ – кривые 1, 2; $(h_1, h_0, h_2, d) = (0,75; 0,5; 3,75; 1,75)$ – кривые 3, 4; $(0,25; 1,5; 3,25; 1,25)$ – кривые 5, 6. Кривые 1, 3, 5 соответствуют P_1 , кривые 2, 4, 6 – P_2

Фиг. 6. Коэффициент отражения $|R|$ (кривая 1) для двухслойной жидкости при $(h_1, h_2, d) = (1, 4, 2)$ и коэффициенты рассеяния назад в первую ($|Z_{11}^+|$), вторую ($|Z_{12}^+|$) и третью ($|Z_{13}^+|$) моды набегающей волны первой моды для трехслойной жидкости: $(h_1, h_0, h_2, d) = (0,75; 0,5; 3,75; 1,75)$ – кривые 2, 3, 4; $(0,25; 1,5; 3,25; 1,25)$ – кривые 5, 6, 7

вертикальными. Аналогичным способом может быть рассмотрен и случай, когда цилиндр находится полностью в верхнем слое, а также учтена свободная поверхность на верхней границе жидкости. Использование точечных мультиполей [6] вместо линейных позволяет распространить этот подход на пространственный случай. Предположение о погружении тела в слое постоянной плотности является принципиальным. Решение более общей задачи для тела, частично или полностью расположенного в стратифицированном слое, пока не известно.

Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта N 43 СО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стурова И.В. Плоская задача о гидродинамической качке погруженного тела без хода в двухслойной жидкости / Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 144–155.
2. Филиппов С.И. Установившиеся колебания плоского контура вблизи границы раздела сред при наличии горизонтального дна // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 2. С. 39–44.
3. Gavrilov N., Ermanyuk E., Sturova I. The forces exerted by internal waves on a restrained body submerged in a stratified fluid // 21st Symp. on Naval Hydrodynamics. Trondheim, Norway, 1996. P. 254–265.
4. Городцов В.А., Теодорович Э.В. Энергетика генераторов гармонических внутренних волн // ПМТФ. 1986. № 4. С. 53–59.
5. Стурова И.В. Влияние аномальных дисперсионных зависимостей на рассеяние и генерацию внутренних волн // ПМТФ. 1994. № 3. С. 47–55.
6. Kassem S.E. Multipole expansions for two superposed fluids, each of finite depth // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1982, V. 91. № 2. P. 323–329.
7. Eatock Taylor R., Hu C.S. Multipole expansions for wave diffraction and radiation in deep water // Ocean Engng. 1991. V. 18. № 3. P. 191–224.
8. Linton C.M., McIver M. The interaction of waves with horizontal cylinders in two-layer fluids // J. Fluid Mech. 1995. V. 304. P. 213–229.

9. Хабахнашева Т.И. Дифракция внутренних волн на цилиндре в двухслойной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29. № 4. С. 559–564.
10. McIver M. Global relationships between two-dimensional water wave potentials // J. Fluid Mech. 1996. V. 312. P. 299–309.
11. Стурова И.В. Генерация внутренних волн в стратифицированной жидкости // Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. С. 200–242.
12. Naftzger R.A., Chakrabarti S.K. Scattering of waves by two-dimensional circular obstacles in finite water depths // J. Ship. Rec. 1979. V. 23. № 1. P. 32–42.
13. Shankar N.J., Raman H., Sundar V. Wave forces on large offshore pipelines // Ocean Engng. 1985. V. 12. № 2. P. 99–115.
14. Subbiah K., Shankar N.J., Cheong H.-F. Wave forces on a large horizontal cylinder near a plane boundary // Ocean Engng. 1993. V. 20. № 1. P. 77–95.

Новосибирск

Поступила в редакцию
14.I.1998