

УДК 532.529

© 1999 г. ВАН БО-И, А.Н. ОСИПЦОВ

## ПРИСТЕНОЧНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ЗА УДАРНОЙ ВОЛНОЙ В ЗАПЫЛЕННОМ ГАЗЕ

Исследуется ламинарная область газопылевого пограничного слоя за ударной волной, движущейся с постоянной скоростью вдоль плоской поверхности. Рассмотрены два типа граничных условий: дисперсные частицы попадают в пограничный слой после прохождения ударной волны, что соответствует движению волны вдоль твердой стенки в запыленном газе; частицы вводятся в пограничный слой с поверхности, что соответствует движению волны над эродирующим слоем осадка. Двухконтинуальная модель газопылевого пограничного слоя модифицирована с учетом пересечений траекторий частиц, возникающих из-за сдвиговых подъемных сил, выражение для которых учитывает конечность чисел Рейнольдса обтекания частиц. Дана общая асимптотическая постановка задачи для пограничного приближения при конечных массовых концентрациях пыли. Для малых массовых концентраций частиц на основе численных расчетов исследованы структура течения и профили концентрации дисперсной фазы, формирующиеся в приповерхностной зоне за ударной волной.

Исследование подъема пыли за ударными волнами весьма важно для обеспечения пожаровзрывобезопасности угольных шахт и пневмотранспортных установок. Экспериментально установлено, что за ударными и детонационными волнами пыль может выноситься из пристеночной зоны [1–5], что приводит к повышению ее концентрации во внешнем потоке и увеличивает опасность возгорания. В связи с этим представляет интерес моделирование процесса формирования двухфазной смеси в приповерхностной зоне течения за ударной волной. Ранее в ряде работ обсуждались возможные механизмы подъема пыли, доминирующие при различных условиях течения: дифракция ударной волны внутри слоя дисперсного осадка, находящегося на твердой подложке [1], неустойчивость поверхности плотного слоя осадка [2], искривление фронта волны при значительных массовых концентрациях пыли и при наличии вертикально неоднородного распределения частиц перед волной [6–7], турбулентная диффузия частиц из пристеночной зоны [5].

В [8] подъем пыли объясняется возникновением вращения частиц и действием силы Магнуса, однако известно [9], что при угловых скоростях вращения частиц порядка градиента продольной скорости несущей фазы подъемная сила Сэфмана, вызванная локальной сдвиговостью потока в пограничном слое, значительно превосходит силу Магнуса. Важность учета силы Сэфмана отмечалась в [4, 10, 11], в которых рассчитывались траектории одиночной сферы, первоначально лежащей на плоской поверхности и вовлекаемой в движение ударной волной. Расчеты параметров дисперсной фазы в ламинарном пограничном слое за ударной волной, движущейся по однородно запыленному газу [12–14], проведенные в рамках двухконтинуальной модели запыленного газа [15], показали, что за счет силы Сэфмана частицы выносятся из пристеночной зоны и аккумуляруются вблизи внешней границы пограничного слоя. Внутри пограничного слоя возникают области многократного пересечения траекторий частиц, что существенно усложняет задачу расчета концентрации дисперсной фазы.

В указанных работах использовалось полученное Сэфманом [16] выражение для

подъемной силы с постоянным поправочным множителем [4]. Выражение Сэфмана применимо, когда все три числа Рейнольдса обтекания частицы (посчитанные по относительной скорости, скорости сдвига потока и угловой скорости частицы) малы. Это предположение не выполняется непосредственно вблизи ударной волны даже для частиц микронного размера. В настоящее время имеются расчеты подъемной силы сферы, обтекаемой сдвиговым потоком при конечных числах Рейнольдса ( $Re_s < 100$ ) [17]. На основе этих расчетов в [18] предложены аппроксимационные формулы, которые используются в настоящей работе.

Ниже исследуются ламинарный двухфазный пограничный слой за ударной волной, движущейся вдоль стенки по однородно и неоднородно запыленному газу, а также пограничный слой, формирующийся за ударной волной над эродирующим слоем дисперсного осадка. С использованием вычислительного алгоритма [19], позволяющего рассчитывать течения с зонами пересечения траекторий частиц, получены профили скоростей, температур и концентрации частиц в пристеночной области, примыкающей к ударной волне.

### 1. Общая постановка задачи о двухфазном пограничном слое за ударной волной.

Примем обычные предположения модели запыленного газа [15]: частицы – сферы одинакового радиуса  $\sigma$ , массы  $m$ . Их броуновским движением, столкновениями и объемной концентрацией пренебрегается.

Рассматривается движение запыленного газа в пограничном слое за ударной волной, движущейся справа налево с постоянной скоростью  $U^*$  вдоль плоскости, имеющей постоянную температуру  $T_w^*$ , равную температуре смеси перед ударной волной. Введем декартову систему координат, связанную с ударной волной (ось  $x^*$  направлена вдоль стенки,  $y^*$  – вдоль поверхности волны). В этой системе координат имеем стационарную задачу движения запыленного газа в пограничном слое над подвижной стенкой (скорость стенки равна скорости волны). Безразмерные переменные введем следующим образом:

$$x = \frac{x^*}{l}, \quad y = \frac{y^*}{l}, \quad V = \frac{V^*}{u_+^*}, \quad V_s = \frac{V_s^*}{u_+^*}$$

$$\rho = \frac{\rho^*}{\rho_+^*}, \quad n_s = \frac{n_s^*}{n_{s+}^*}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_+^* u_+^{*2}}$$

$$T = \frac{T^*(U^* - u_+^*) + u_+^* T_w^* - U^* T_+^*}{(T_w^* - T_+^*) u_+^*}, \quad l = \frac{m u_+^*}{6 \pi \sigma \mu_+^*}$$

$$T_s = \frac{T_s^*(U^* - u_+^*) + u_+^* T_w^* - U^* T_+^*}{(T_w^* - T_+^*) u_+^*}$$

Здесь и далее (где необходимо) звездочкой отмечены размерные величины,  $n_s^*$  – числовая концентрация частиц,  $T_s^*$  – температура вещества частиц. В качестве масштаба длины принята длина релаксации скоростей фаз при стоксовском законе сопротивления  $l$  [15],  $u_+^*$  – продольная компонента скорости, остальные обозначения общепринятые. Индекс  $s$  относится к параметрам среды частиц, индекс плюс отмечает параметры в невязкой области непосредственно за фронтом ударной волны, а индекс  $w$  относится к параметрам на стенке. Для несущей фазы параметры до и после фронта волны связаны обычными соотношениями Рэнкина – Гюгонно. Параметры дисперсной фазы на волне непрерывны [15]. Зависимость вязкости и теплопроводности газа от температуры принята линейной ( $K$  – константа):  $\mu^* / \mu_+^* = \lambda^* / \lambda_+^* = KT^* / T_+^*$ .

Для описания межфазного взаимодействия примем, что на частицу действует сумма

силы аэродинамического сопротивления, силы тяжести и подъемной силы, вызванной сдвиговостью потока [18]

$$\mathbf{f}_s = 6\pi\sigma\mu^*(\mathbf{V}^* - \mathbf{V}_s^*)G + mg + 6,46\sigma^2 \left( \rho^*\mu^* \left| \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right| \right)^{1/2} H(u_s^* - u^*)\mathbf{j}$$

$$G = \left( 1 + \frac{1}{6} \text{Re}_s^{2/3} \right) \left( 1 + \exp\left( -\frac{0,427}{M_s^{4,63}} \right) \right)$$

$$H = 0,23434(1 - \exp(-0,1 \text{Re}_s)) \frac{\text{Re}_g}{\text{Re}_s} + \exp(-0,1 \text{Re}_s) \quad (\text{Re}_s < 40)$$

$$H = 0,0371 \text{Re}_g^{1/2} \quad (\text{Re}_s \geq 40)$$

$$\text{Re}_s = \frac{2\sigma\rho^* |V^* - V_s^*|}{\mu^*}, \quad \text{Re}_g = \left| \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right| \frac{\sigma^2 \rho^*}{\mu^*}$$

Здесь  $\mathbf{j}$  – орт оси ординат, направленной перпендикулярно стенке, функция  $G$  учитывает отклонение закона сопротивления частиц от стоксовского [20],  $\text{Re}_s$  и  $M_s$  – числа Рейнольдса и Маха обтекания частиц, функция  $H$  учитывает поправку [18] к силе Сэфмана при конечных числах Рейнольдса частиц,  $\text{Re}_g$  – сдвиговое число Рейнольдса обтекания частиц.

Для описания теплового потока к частице используется формула [21]

$$q_s^* = 4\pi\sigma\lambda^*(T^* - T_s^*)D, \quad D = (1 + 0,3 \text{Pr}^{1/3} \text{Re}_s^{1/2})$$

Здесь  $\text{Pr} = c_p\mu^*/\lambda^*$  – число Прандтля газа,  $c_p$  – теплоемкость газа при постоянном давлении.

Учет силы Сэфмана приводит к возникновению в пограничном слое областей пересекающихся траекторий частиц [13], поэтому запишем уравнения запыленного газа [15] в выбранных переменных с учетом возможных пересечений траекторий частиц. Для этого введем в неизвестных заранее зонах пересечения столько односкоростных континуумов частиц (обозначаемых индексом  $i$ ), сколько траекторий пересекается в рассматриваемой точке (столкновениями различных континуумов частиц пренебрегаем)

$$\text{div } \rho \mathbf{V} = 0, \quad \rho(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla p + K\varepsilon\nabla_j(g\tau^j) - \alpha \sum_i n_{si} \mathbf{f}_{si} \quad (1.1)$$

$$\rho(\mathbf{V}\nabla)T = \frac{K\varepsilon}{\text{Pr}} \text{div}(g\nabla T) + (a-1) \text{Ec} \left[ (\mathbf{V}\nabla)p + \varepsilon K g \Phi + \alpha \sum_i n_{si} \mathbf{f}_{si} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_{si}) \right] - \alpha \sum_i n_{si} q_{si}$$

$$p = \frac{\rho g}{\gamma M_+^2}, \quad g = \frac{(d-1)T + a - d}{a-1}$$

$$d = \frac{T_w^*}{T_+^*}, \quad a = \frac{U^*}{u_+^*}, \quad \text{Ec} = \frac{u_+^{*2}}{c_p(T_w^* - T_+^*)} = \frac{(\gamma-1)M_+^2}{d-1}$$

$$\text{div } n_{si} \mathbf{V}_{si} = 0, \quad (\mathbf{V}_{si}\nabla)\mathbf{V}_{si} = \mathbf{f}_{si}, \quad (\mathbf{V}_{si}\nabla)T_{si} = \chi q_{si}$$

$$\tau_{kj} = \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \delta_{kj} \text{div } \mathbf{V} \quad (k=1,2, j=1,2)$$

$$\Phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

$$\mathbf{f}_{si} = Kg(\mathbf{V} - \mathbf{V}_{si})G - \frac{6,46\sigma}{6\pi\epsilon^{1/2}} \left( Kgp \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right)^{1/2} H(u - u_{si})\mathbf{j} - \frac{1}{Fr^2} \mathbf{j}$$

$$q_{si} = \frac{2Kg}{3Pr} (T - T_{si})D$$

Здесь  $\delta_{ij}$  – символы Кронекера,  $Ec$  – число Эккерта,  $M_+$  – число Маха газа за скачком,  $Fr$  – число Фруда. Индекс  $i$  пробегает столько значений, сколько траекторий частиц пересекается в данной точке пространства. Связь между размерной и безразмерной температурами выбрана таким образом, чтобы на стенке  $T = u$ .

Система (1.1) зависит от следующих независимых безразмерных параметров:

$$\epsilon = \frac{\mu_+^*}{\rho_+^* u_+^* l}, \quad \alpha = \frac{m n_{s+}^*}{\rho_+^*}, \quad \chi = \frac{c_p}{c_s}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

$$M_+ = \frac{u_+^*}{a_+}, \quad Pr = \frac{c_p \mu_+^*}{\lambda_+^*}, \quad K, \quad \frac{\sigma}{l}, \quad Fr = \frac{u_+^*}{(gl)^{1/2}}$$

Здесь  $a_+^*$  – скорость звука за скачком,  $\alpha$  – отношение "размазанных" плотностей фаз,  $c_v$  – теплоемкость газа при постоянном объеме,  $c_s$  – теплоемкость вещества частиц. В силу условий Рэнкина – Гюгонио параметры  $d$ ,  $a$  и  $M_+$  являются известными функциями числа Маха волны  $M$ .

Граничные условия для параметров несущей фазы на волне и на стенке имеют вид

$$x = 0, y > 0: u = T = 1, v = 0, p = 1/\gamma M_+^2 \quad (1.2)$$

$$x \geq 0, y = 0: u = T = a, v = 0$$

Для параметров частиц рассмотрим два типа граничных условий. Первый тип соответствует движению волны по запыленному газу (в общем случае предполагается вертикальная стратификация частиц перед волной  $n_0(y)$ )

$$x = 0: v_s = 0, u_s = T_s = a, n_s = n_0(y) \quad (1.3)$$

В случае неоднородной концентрации частиц в качестве масштаба при обезразмеривании  $n_s^*$  следует взять концентрацию на некоторой фиксированной высоте. Второй тип граничных условий соответствует вводу частиц в поток с разрушающейся поверхности

$$x > 0, y \rightarrow 0: v_s \rightarrow 0, u_s \rightarrow a, n_s v_s \rightarrow 1 \quad (1.4)$$

Условие (1.4) означает, что частицы покидают поверхность (остающуюся плоской) с исчезающе малой нормальной скоростью, однако при этом поток массы частиц является заданной конечной величиной. В данном случае в качестве масштаба концентрации частиц при обезразмеривании принято отношение размерного потока массы частиц на стенке к  $u_+^*$ .

Построим асимптотическое решение (1.1) при  $\epsilon \rightarrow 0$ , считая, что число Рейнольдса, определенного по длине релаксации скоростей фаз, велико. Числа Фруда также предполагаются большими. В соответствии с обычной асимптотической процедурой построения уравнений двухфазного пограничного слоя [9] разобьем все поле течения на "внешнее" невязкое течение и "внутреннее" течение в пограничном слое. Внешнее течение ( $\epsilon \rightarrow 0$ ;  $x, y$  – фиксированы) очевидно:  $v = v_s = 0$ , а остальные параметры (в дальнейшем обозначаемые индексом  $e$ ) следует находить из одномерной задачи о структуре зоны релаксации за ударной волной в запыленном газе [15]. Чтобы

получить уравнения пограничного слоя, вводим "растянутую" координату  $\eta = y/\sqrt{\varepsilon}$  и ищем внутреннее решение в виде

$$u_0(x, \eta) + \dots, \sqrt{\varepsilon} v_0(x, \eta) + \dots, u_{s0i}(x, \eta) + \dots, \sqrt{\varepsilon} v_{s0i}(x, \eta) + \dots, \\ \rho_0(x, \eta) + \dots, \rho_{s0i}(x, \eta) + \dots, T_0(x, \eta) + \dots, T_{s0i}(x, \eta) + \dots, p_0(x, \eta) + \dots$$

Чтобы преодолеть трудности, связанные с пересечением траекторий частиц, запишем уравнения дисперсной фазы в переменных Лагранжа  $t, \eta_+$  (в случае граничных условий (1.3)) или  $t, x^\circ$  (в случае граничных условий (1.4)). Здесь  $t = t^* u_+^* / l$  – безразмерное время движения частицы вдоль фиксированной траектории от плоскости  $x = 0$  (1.3) либо плоскости  $\eta = 0$  (1.4),  $\eta_+$  – ордината начала траектории частиц на ударной волне  $x = 0$  (1.3),  $x^\circ$  – абсцисса начала траектории на плоскости  $\eta = 0$  (1.4). Для главных членов внутреннего разложения из (1.1) получаем уравнения двухфазного пограничного слоя в виде (индекс ноль опущен, индекс  $e$  относится к параметрам внешнего потока)

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \quad \rho g = \gamma M_+^2 p_e \quad (1.5)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = K \frac{\partial}{\partial \eta} \left( g \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{dp_e}{dx} - \alpha K g \sum_i n_{si} (u - u_{si}) G_i$$

$$\rho \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) = \frac{K}{Pr} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( g \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + (a-1) Ec \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + u \frac{dp_e}{dx} + \right.$$

$$\left. + \alpha K g \sum_i n_{si} (u - u_{si})^2 G_i \right] - \alpha \sum_i n_{si} q_{si}$$

$$\frac{dx_s}{dt} = u_s, \quad \frac{d\eta_s}{dt} = v_s, \quad \frac{du_s}{dt} = K g (u - u_s) G$$

$$\frac{dv_s}{dt} = K g (v - v_s) G - \kappa (u - u_s) H \left( K g \rho \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right| \right)^{1/2} - \omega$$

$$\frac{dT_s}{dt} = \chi q_s, \quad q_s = \frac{2K}{3Pr} g (T - T_s) D, \quad \omega = \frac{1}{Fr^2 \varepsilon^{1/2}}$$

Числа Рейнольдса и Маха обтекания частиц, входящие в  $G$  и  $H$ , могут быть вычислены по формулам

$$Re_s = \frac{Re_0 \rho |u - u_s|}{K g}, \quad Re_g = -\frac{Re_0}{K} \left( \frac{9\rho_+^*}{8\rho_s^\circ} \right)^{1/2} \frac{\rho}{g} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad M_s = \frac{|u - u_s|}{(\gamma p / \rho)^{1/2}}, \quad Re_0 = \frac{2u_+^* \rho_+^* \sigma}{\mu_+^*}$$

Здесь  $\rho_s^\circ$  – плотность вещества частиц. Параметр  $\kappa$ , характеризующий вклад силы Сэфмана, вычисляется по формуле

$$\kappa = \frac{6,46}{12\pi\sqrt{6}} \left( \frac{2\rho_s^\circ}{\rho_+^*} \right)^{1/4} Re_0^{3/2}$$

При вычислении указанных выше параметров помимо  $\gamma$  и  $K$  достаточно задавать два независимых безразмерных параметра, в качестве которых в дальнейшем выбраны  $Re_0$  и  $\kappa$ . Уравнения дисперсной фазы записаны для фиксированной траекто-

рии частиц. Переход к лагранжевым переменным при записи уравнений дисперсной фазы позволяет избежать проблем, связанных с пересечением траекторий частиц в эйлеровых координатах, так как пересекающимся траекториям соответствуют различные значения лагранжевых координат. Кроме того, переход к лагранжевым переменным позволяет при численных расчетах легко определять границы областей пересекающихся траекторий – на этих границах правая часть записанного ниже уравнения неразрывности среды частиц (якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым) обращается в ноль.

Уравнение неразрывности дисперсной фазы в лагранжевых переменных для граничных условий (1.3) и (1.4) соответственно имеет вид

$$\frac{an_0(\eta_+)}{n_s(t, \eta_+)} = |J|, \quad J = u_s \frac{\partial \eta_s(t, \eta_+)}{\partial \eta_+} - v_s \frac{\partial x_s(t, \eta_+)}{\partial \eta_+} \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{n_s(t, x^\circ)} = |J|, \quad J = u_s \frac{\partial \eta_s(t, x^\circ)}{\partial x^\circ} - v_s \frac{\partial x_s(t, x^\circ)}{\partial x^\circ}$$

Здесь  $|J|$  – модуль якобиана преобразования от эйлеровых к лагранжевым переменным. На границе зон пересекающихся траекторий  $J$  меняет знак.

Граничные условия для несущей фазы таковы

$$\eta = 0, x \geq 0: u = T = a, v = 0$$

$$x = 0, \eta > 0; x > 0, \eta \rightarrow \infty: u = u_e, T = T_e$$

Граничные условия (1.3) и (1.4) для среды частиц принимают вид

$$t = 0: x_s = 0, \eta_s = \eta_+, v_s = 0, n_s = n_0(\eta_+), u_s = T_s = a$$

$$t = 0: x_s \rightarrow x^\circ, \eta_s \rightarrow 0, v_s \rightarrow 0, n_s v_s \rightarrow 1, u_s \rightarrow a, T_s \rightarrow a$$

Приведем для примера несколько значений масштаба релаксационной зоны и определяющих параметров для типичных размеров частиц,  $\mu_+^*/\rho_+^* = 0,104 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $u_+^* = 2,5 \cdot 10^4 \text{ см/с}$ ,  $\rho_s^\circ/\rho_+^* = 10^3$  (см. таблицу)

$2\sigma$ , см	$l$ , см	$\epsilon$	$Re_0$	$\kappa$	$\omega$
$10^{-4}$	$1,33 \cdot 10^{-1}$	$3,1 \cdot 10^{-5}$	24	$5,5 \cdot 10^1$	$3,74 \cdot 10^{-5}$
$10^{-3}$	$1,33 \cdot 10^1$	$3,1 \cdot 10^{-7}$	240	$1,74 \cdot 10^3$	$3,74 \cdot 10^{-2}$
$10^{-2}$	$1,33 \cdot 10^3$	$3,1 \cdot 10^{-9}$	2400	$5,5 \cdot 10^4$	37,4

Роль силы Сэфмана велика даже для микронных частиц, причем параметр  $\kappa$  быстро возрастает с ростом  $\sigma$ . Так же быстро растет и длина релаксационной зоны за ударной волной.

Предположение о ламинарном характере течения в пограничном слое справедливо лишь в непосредственной окрестности ударной волны. Поэтому решения, полученные в рамках принятой модели для частиц размером несколько микрон и более, имеют физический смысл для небольших значений  $x$ , где влияние частиц на несущую фазу даже при конечных массовых концентрациях не успевает проявиться [9]. Поэтому ниже подробно исследуем решение в пренебрежении влиянием частиц на несущую фазу ( $\alpha \rightarrow 0$ ), имея в виду, что для малых расстояний от ударной волны в силу сказанного выше результаты для достаточно крупных частиц будут применимы и при конечных  $\alpha$ .

**2. Решение для малых  $\alpha$ .** При малых  $\alpha$  можно пренебречь влиянием частиц на параметры пограничного слоя несущей фазы, что значительно упрощает процедуру нахождения решения. Примем также  $Pr = 1$ , что позволяет представить решение для

несущей фазы в наиболее простом виде. Внешнее решение для газа принимает вид

$$v_e = 0, p_e = 1/\gamma M_+^2, u_e = T_e = \rho_e = 1$$

Решение уравнений сжимаемого пограничного слоя газа за ударной волной является автомодельным и сводится в переменных Дородницына к краевой задаче для функции Блазиуса  $\varphi(\xi)$  [22]

$$2\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0 \quad (2.1)$$

$$\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = a, \varphi'(\infty) = 1$$

В принятых обозначениях скорость и температура газа в пограничном слое выражаются через  $\varphi$

$$u = \varphi'(\xi), v = -g \left[ \frac{\varphi}{2\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_1} \varphi' \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \right] \quad (2.2)$$

$$T = \left[ \frac{Ec}{2}(1-a^2) - 1 \right] (1-\varphi') + \frac{Ec}{2}(a-1)(1-\varphi'^2) + 1$$

Здесь введены новые независимые переменные

$$x_1 = \frac{x}{K}, \eta_1 = \frac{\eta}{K}, \xi = \frac{1}{\sqrt{x_1}} \int_0^{\eta_1} \rho d\eta_1$$

Удобно ввести вспомогательную функцию  $\psi$ , для которой имеют место соотношения

$$\psi(\xi) = \frac{\eta_1}{\sqrt{x_1}} = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\rho} = \int_0^{\xi} g d\xi, \frac{\partial \xi}{\partial x_1} = -\frac{1}{2x_1} \frac{\psi}{\psi'} = -\frac{\psi}{2x_1 g}$$

Для нахождения полей скоростей и температур газа необходимо из (2.1) найти функцию  $\varphi(\xi)$ . Затем из (2.2) находятся распределение температуры  $T(\xi)$ , функция  $g(\xi)$ , а следовательно, и функция  $\psi(\xi)$ , через которую выражается связь между переменными  $\eta_1, x_1$  и  $\xi, x_1$ . Таким образом, численное решение (2.1) при различных значениях числа Маха волны позволяет найти  $u, v, T$  как функции  $x, \eta$ .

Для нахождения  $n_s$  из (1.6) на фиксированной траектории частиц необходимо знать значения производных  $\partial x_s / \partial \eta_+ = e, \partial \eta_s / \partial \eta_+ = h$  (ниже подробно рассматривается случай граничных условий (1.3); в случае (1.4) вместо производных по  $\eta_+$  берутся производные по  $x^\circ$ ). Аналогично [19] выведем уравнения для указанных производных, для чего продифференцируем уравнения дисперсной фазы из (1.3) по  $\eta_+$ . В результате получим

$$\frac{de}{dt} = r, \frac{dh}{dt} = s \quad (2.3)$$

$$\frac{dr}{dt} = K(u - u_s)G \frac{\partial g}{\partial \eta_+} + KgG \left( \frac{\partial u}{\partial \eta_+} - r \right) + Kg(u - u_s) \frac{\partial G}{\partial \eta_+}$$

$$\frac{ds}{dt} = K(v - v_s)G \frac{\partial g}{\partial \eta_+} + KgG \left( \frac{\partial v}{\partial \eta_+} - s \right) + Kg(v - v_s) \frac{\partial G}{\partial \eta_+} -$$

$$- \kappa(u - u_s) \frac{\partial}{\partial \eta_+} \left( K \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^{1/2} H \right) - \kappa K \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^{1/2} H \left( \frac{\partial u}{\partial \eta_+} - r \right)$$

$$r = \partial u_s / \partial \eta_+, s = \partial v_s / \partial \eta_+$$

Начальные условия для введенных производных таковы

$$t = 0: \frac{\partial x_s}{\partial \eta_+} = \frac{\partial u_s}{\partial \eta_+} = \frac{\partial v_s}{\partial \eta_+} = 0, \quad \frac{\partial \eta_s}{\partial \eta_+} = 1$$

$$t = 0: \frac{\partial \eta_s}{\partial x^\circ} = \frac{\partial u_s}{\partial x^\circ} = \frac{\partial v_s}{\partial x^\circ} = 0, \quad \frac{\partial x_s}{\partial x^\circ} = 1$$

На фиксированной траектории для параметров частиц имеем замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (последние пять уравнений (1.5) и уравнения (2.3)) и конечное соотношение для  $n_s$  (1.6). Выражения для производных по  $\eta_+$  от  $G$  и  $H$  не приводятся из-за громоздкости. Производные по  $\eta_+$  от функций  $u$ ,  $v$ ,  $g$ ,  $du/d\eta$ , входящие в правые части уравнений, находятся из расчетов параметров несущей фазы, т.е. из решения системы (2.1), (2.2). При этом при пересчете производных используется соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \eta_+} = \frac{1}{K} \frac{\partial x_s}{\partial \eta_+} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} - \left( \frac{\psi}{2x_1 g} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{Kg\sqrt{x_1}} \frac{\partial \eta_s}{\partial \eta_+} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

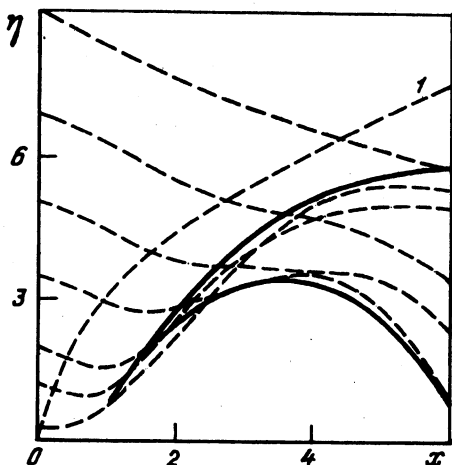
Ввиду возможности расчета  $n_s$  вдоль фиксированной траектории частиц использованный метод расчета обладает явными преимуществами перед широко используемым в литературе методом [23], требующим наличия большого числа лагранжевых траекторий частиц, приходящихся на одну эйлерову ячейку.

Поля скоростей и температур газа рассчитывались численно на равномерной по  $\xi$  сетке. Краевая задача (2.1) сводилась к задаче Коши методом "стрельбы". При интегрировании систем уравнений для среды частиц параметры газа и соответствующие производные по лагранжевой координате находились с использованием квадратичной интерполяции сеточных значений. Система обыкновенных дифференциальных уравнений для параметров частиц решалась для различных  $\eta_+$  в случае (1.3) и  $x^\circ$  (1.4) методом Рунге – Кутты.

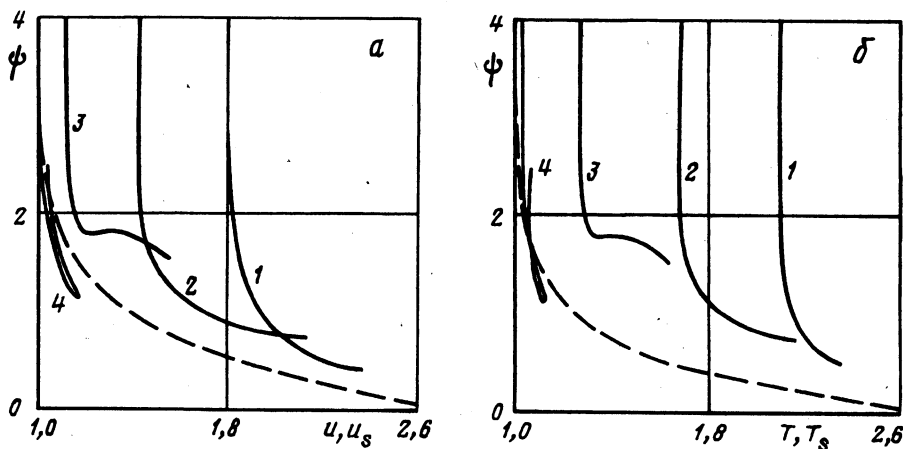
**3. Результаты расчетов.** Поскольку главной целью работы было изучение влияния подъемной силы на распределение частиц в пограничном слое за ударной волной, приведем результаты численных расчетов для нескольких значений параметров  $\kappa$ ,  $Re_0$ ,  $\omega$  и фиксированных остальных параметрах:  $\gamma = 1,4$ ,  $\chi = K = Pr = 1$ ,  $M = 2$ . Рассмотрим вначале случай граничных условий (1.3). Без учета силы Сэфмана ( $\kappa = 0$ ) траектории частиц отклоняются в сторону стенки, скорость которой выше скорости газа во внешнем потоке. На части поверхности вблизи волны происходит осаждение частиц. Для случая однородной концентрации частиц перед волной в начальной области пограничного слоя формируется профиль концентрации с максимумом на стенке, а затем, с завершением релаксации скоростей фаз, формируется профиль  $n_s$  с наибольшим максимумом на конечном расстоянии от стенки и минимумом на поверхности стенки.

Учет подъемной силы приводит к отклонению траекторий частиц в пограничном слое в сторону внешнего потока. Реализуется течение с перехлестом траекторий частиц и возникновением зон многозначности скоростей и температур дисперсной фазы. Типичное поведение траекторий частиц (штриховые линии) показано на фиг. 1. Вблизи поверхности возникает область, свободная от частиц. Над ней формируется область пересекающихся траекторий частиц, в каждой точке которой пересекаются две траектории. Огибающие траекторий показаны сплошными линиями. Штриховой линией  $l$  показана условная толщина пограничного слоя, на которой  $u = 1,01$ . На фиг. 2 для тех же значений определяющих параметров показано развитие профилей продольной скорости и температуры частиц по продольной координате. Штриховыми линиями показаны соответствующие параметры газа,  $\psi = \eta/x^{1/2}$  – автомодельная





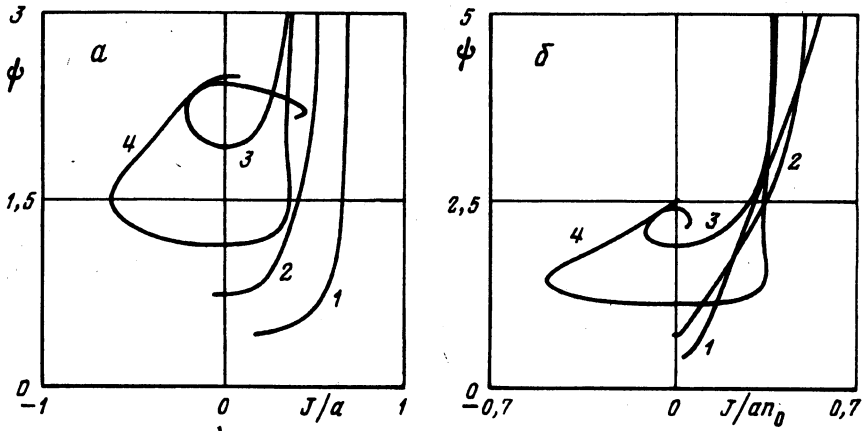
Фиг. 1. Траектории частиц при  $\kappa = 100$ ,  $Re_0 = 30$ ,  $\omega = 10^{-4}$ . Огибающие траекторий – сплошные линии; штриховая линия 1 – граница пограничного слоя



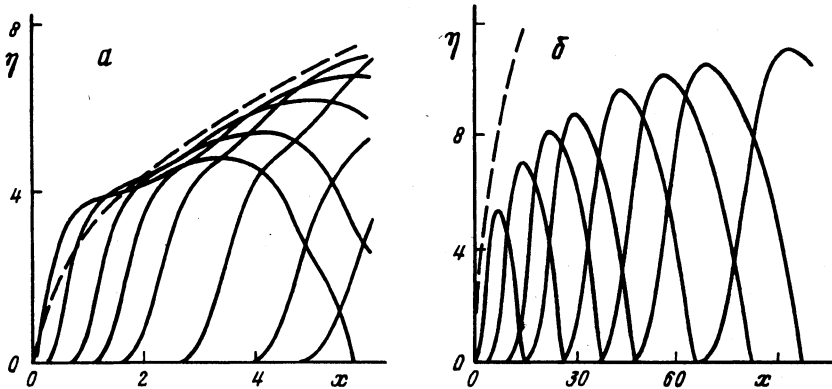
Фиг. 2. Развитие профилей продольной скорости (а) и температуры (б) частиц по продольной координате при  $\kappa = 100$ ,  $Re_0 = 30$ ,  $\omega = 10^{-4}$ . Кривые 1–4 соответствуют  $x = 0,5, 1, 2, 5$ . Штриховой линией показаны профили соответствующих параметров газа

координата. Вблизи верхней ветви огибающей траекторий частиц имеется очень узкая область, в каждой точке которой пересекаются три траектории частиц. Это наиболее заметно на распределениях параметров частиц при  $x = 2$ . Однако эта область образована траекториями, начинающимися на очень малых расстояниях от стенки (порядка размера частиц), поэтому структура указанной области подробно не использовалась.

В пристеночной области за ударной волной формируется течение с резко выраженной вертикальной стратификацией концентрации частиц. Развитие профилей концентрации частиц по продольной координате при тех же значениях определяющих параметров, что и на фиг. 1, проиллюстрировано на фиг. 3, где по горизонтальной оси отложены величины, модуль которых равен  $1/n_s$ . Фигура 3, а соответствует случаю однородной концентрации частиц перед волной ( $\eta_0 = 1$ ), а фиг. 3, б – неоднородной. Для примера рассмотрена экспоненциальная неоднородность  $\eta_0 = 1 + 9 \exp(-n_s)$ .



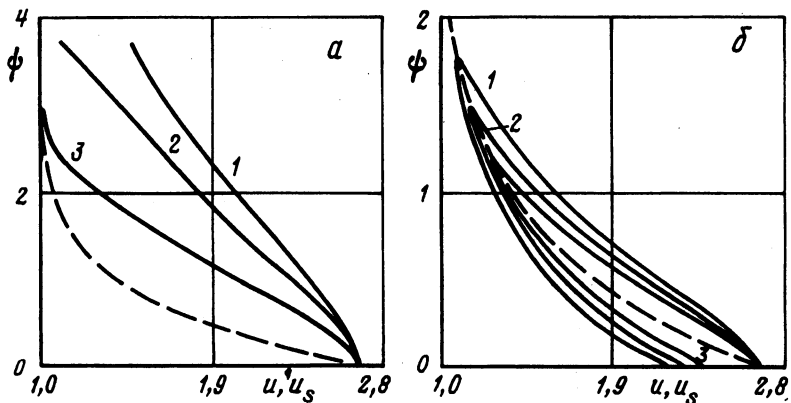
Фиг. 3. Распределение концентрации частиц в пограничном слое при  $\kappa = 100$ ,  $Re_0 = 30$ ,  $\omega = 10^{-4}$  для однородного (а) и неоднородного (б) профиля концентрации перед ударной волной ( $n_0 = 1 + 9 \exp(-\eta_+)$ ). Величина  $1/n_s$  равна абсолютному значению величин, отложенных по оси абсцисс. Кривые 1-4 соответствуют  $x = 0,5, 1, 3, 5$



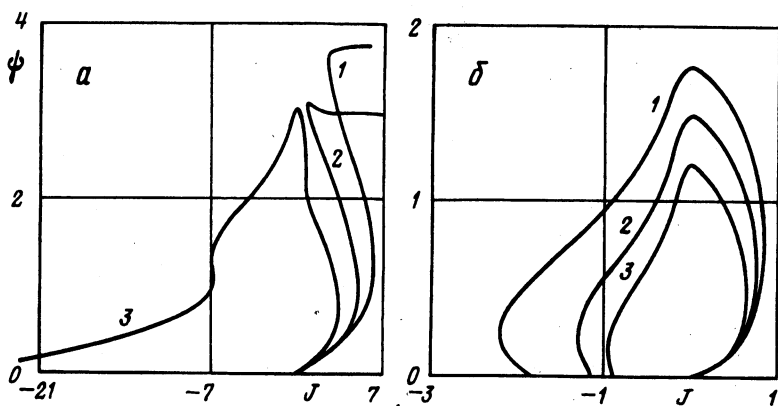
Фиг. 4. Траектории крупных (а -  $\kappa = 1740$ ,  $Re_0 = 240$ ,  $\omega = 0,037$ ) и мелких (б -  $\kappa = 55$ ,  $Re_0 = 24$ ,  $\omega = 0$ ) частиц в пограничном слое над эродирующим слоем осадка. Штриховая линия - граница пограничного слоя

Из (1.6) видно, что распределения концентрации при произвольном исходном профиле  $\eta_0$  могут быть найдены из распределений, представленных на фиг. 3, а, простым пересчетом. Увеличение концентрации в направлении стенки перед волной приводит к усилению эффекта накопления частиц вблизи верхней границы пограничного слоя за волной. Двухзначность профилей параметров частиц соответствует зонам пересекающихся траекторий. Вблизи огибающих семейства траекторий, совпадающих с границами двухзначности параметров частиц, числовая концентрация частиц неограниченно возрастает, однако возникающая особенность концентрации интегрируема. Нарушение применимости модели невзаимодействующих частиц в таких случаях, как правило, не происходит [24]. С увеличением размера частиц (параметра  $\kappa$ ) область пересекающихся траекторий становится тоньше и локализуется вблизи внешней границы пограничного слоя, где происходит значительное накопление частиц.

Для случаев движения волны над слоем осадка (граничные условия (1.4)) поведение траекторий крупных и мелких частиц показано соответственно на фиг. 4, а и б. Мелкие частицы перемещаются скачкообразно. Частицами, "отраженными" от поверхности после осаждения, пренебрегалось.



Фиг. 5. Развитие профилей  $u_s$  по продольной координате в пограничном слое над эродирующим слоем осадка;  $a - \kappa = 1740, Re_0 = 240, \omega = 0,037$ ;  $b - \kappa = 55, Re_0 = 24, \omega = 0$ . Кривые 1–3 на фиг.  $a$  соответствуют  $x = 0,5, 1, 4$ , на фиг.  $b - x = 20, 40, 80$ . Штриховая линия – профиль скорости газа



Фиг. 6. Распределение концентрации частиц в пограничном слое над эродирующим слоем осадка:  $|l| = 1/n_s$ ;  $a - \kappa = 1740, Re_0 = 240, \omega = 0,037$ ;  $b - \kappa = 55, Re_0 = 24, \omega = 0$ . Кривые 1–3 на фиг.  $a$  соответствуют  $x = 1, 2, 6$ , на фиг.  $b - x = 20, 40, 80$

Для тех же значений безразмерных параметров развитие профилей  $u_s$  по продольной координате показано на фиг. 5. Штриховой линией показан профиль скорости несущей фазы. Распределение температуры частиц качественно близко распределению скорости. Развитие профиля концентрации частиц в пограничном слое проиллюстрировано на фиг. 6; значения  $\kappa, Re_0, \omega$  те же, что на фиг. 4. По оси абсцисс отложена величина  $J, |l| = 1/n_s$ . Правая ветвь значений  $J$  соответствует частицам, движущимся вверх, а левая – опускающимся частицам. Как видно, максимальная концентрация дисперсной фазы достигается на разрушающейся поверхности и на границе слоя взвешенных частиц, где числовая концентрация  $n_s$  имеет интегрируемую сингулярность.

Обнаруженные эффекты резкой стратификации дисперсной фазы и формирование локальных зон накопления частиц в пограничном слое за ударной волной следует учитывать при оценке концентрационных пределов взрывобезопасности пылегазовых смесей.

**Заключение.** Разработаны модели ламинарного пограничного слоя за ударной волной, движущейся вдоль плоской стенки в однородно и неоднородно запыленном газе, и двухфазного пограничного слоя за ударной волной, движущейся над эродирующим слоем дисперсного осадка. Модели учитывают возможность пересечений траекторий частиц под действием сдвиговых подъемных сил. Использованное выражение для подъемной силы учитывает конечность чисел Рейнольдса обтекания частиц. На основе численных расчетов для малых массовых концентраций частиц исследованы структура пограничного слоя и профили концентрации пыли за ударной волной. Показано, что наличие подъемных сил приводит к отклонению траекторий частиц в сторону внешнего потока и резкому увеличению концентрации дисперсной фазы вблизи внешней границы пограничного слоя, при этом сразу за фронтом волны возникает тонкая приповерхностная зона, свободная от частиц. Для неоднородного распределения концентрации пыли перед ударной волной (с максимумом концентрации на стенке) отмеченный эффект еще более выражен. В пограничном слое над эродирующим слоем осадка определена высота подъема пыли. Показано, что мелкие частицы переносятся путем сальтации. В распределениях концентрации взвешенных частиц имеется два выраженных максимума: на внешней границе взвешенного слоя и на эродирующей поверхности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00313), а также Государственного фонда естественных наук КНР (совместный грант РФФИ-ГФЕН КНР 96-01-00017с).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gerrard J.H.* An experimental investigation of the initial stages of the dispersion of dust by shock waves // *Brit. J. Appl. Phys.* 1963. V. 14. P. 186–192.
2. *Борисов А.А., Любимов А.В., Козарко С.М., Козенко В.П.* О неустойчивости поверхности сыпучей среды при скольжении по ней ударных и детонационных волн // *Физика горения и взрыва*. 1967. Т. 3. № 1. С. 149–151.
3. *Fletcher B.* The interaction of a shock with a dust deposit // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1976. V. 9. № 2. P. 197–202.
4. *Merzkirch W., Bracht K.* The erosion of dust by a shock wave in air: initial stage with laminar flow // *Intern. J. Multiphase Flow*. 1978. V. 4. № 1. P. 89–95.
5. *Bracht K., Merzkirch W.* Dust entrainment in a shock-induced, turbulent air flow // *Intern. J. Multiphase Flow*. 1979. V. 5. № 15. P. 301–312.
6. *Коробейников В.П., Марков В.В., Меньшов И.С.* Численное моделирование нестационарных двумерных течений пылегазовой смеси в плоских каналах // *Book Pap. 1st Intern. Colloq. Explosive Dusts, Baranow. Warszawa, 1984. Pt 1. P. 191–200.*
7. *Hishida M., Hayashi A.K.* Numerical simulation of a shock wave-solid particle layer interaction // *Proc. Intern. Symp. Comp. Fluid Dyn. Nagoya, Japan, 1989. P. 1055–1060.*
8. *Бойко В.М., Папырин А.Н.* О динамике образования газозвеси за ударной волной, скользящей вдоль поверхности сыпучей среды // *Физика горения и взрыва*. 1987. Т. 23. № 2. С. 122–126.
9. *Osiptsov A.N.* Mathematical modeling of dusty-gas boundary layers // *Appl. Mech. Rev.* 1997. V. 50. № 6. P. 357–370.
10. *Hwang C.C.* Initial stages of the interaction of a shock wave with a dust deposit // *Intern. J. Multiphase Flow*. 1986. V. 12. № 4. P. 655–666.
11. *Wu Q., Wang B.Y.* Numerical analysis of dust particle entrainment induced by shock waves // *Proc. Intern. Symp. Intense Dyn. Loading and Its Effects. Chengdu, China, 1992. P. 167–170.*
12. *Веселый С.Л., Куликовский В.А., Осипцов А.Н.* О роли силы Сэфмена в двухфазных течениях типа пограничного слоя // *Турбулентные течения и техника эксперимента*. Таллинн: Изд-во АН ЭССР, 1989. С. 189–191.
13. *Osiptsov A.N., Veselyi S.L., Kulikovskii V.A., Wang B.Y.* Flow structure of dilute gas-particle suspensions behind a shock wave moving along a flat surface // *Appl. Math. Mech.* 1991. V. 12. № 6. P. 531–538 (Engl. Edition); P. 501–507 (Chinese Edition).

14. *Ota I., Tajima K., Kabayashi M., Miura S.* Boundary layer of non-equilibrium gas-particle mixture modified by particle lifting motion behind a shock front // Proc. 17th Intern. Symp. Shock Waves and Shock Tubes. Bethlehem, USA, 1989. P. 770–775.
15. *Marble F.E.* Dynamics of dusty gases // Annu. Rev. Fluid Mech. 1970. V. 2. P. 397–446.
16. *Saffman P.G.* Lift on a small sphere in a slow shear flow // J. Fluid. Mech. 1965. V. 22. Pt 2. P. 385–400. Corrigendum: 1968. V. 31. P. 628.
17. *Dandy D.S., Dwyer H.A.* Sphere in shear flow at finite Reynolds number: Effect of shear on particle lift, drag, and heat transfer // J. Fluid Mech. 1990. V. 216. P. 381–410.
18. *Mei R.* An approximate expression for the shear lift force on a spherical particle at finite Reynolds number // Intern. J. Multiphase Flow. 1992. V. 18. № 1. P. 145–147.
19. *Осипцов А.Н., Твердовский М.А.* Гиперзвуковое обтекание сверхзвукового двухфазного источника // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 3. С. 134–147.
20. *Carlson D.J., Hoglund R.F.* Particle drag and heat transfer in rocket nozzles // AIAA Journal. 1964. V. 2. № 11. P. 1980–1984.
21. *Ranz W.E., Marshall W.R.* Evaporation from drops // Chem. Eng. Prog. 1952. V. 48. Pt 1. P. 141–146; Pt 2. P. 173–180.
22. *Шлухтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
23. *Crowe C.T.* Review – numerical models for dilute gas-particle flows // ASME J. Fluid Eng. 1982. V. 104. № 3. P. 297–303.
24. *Осипцов А.Н.* Исследование зон неограниченного роста концентрации частиц в дисперсных потоках // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 46–52.

Москва

Поступила в редакцию  
22.IV.1998