

УДК 532.5.013.4:536.252

© 1999 г. С.Н. АРИСТОВ, К.Г. ШВАРЦ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ АДВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

Численно методом сеток исследуется поведение пространственных конечно-амплитудных возмущений адвективного течения, вызываемого однородным продольным градиентом температуры, во вращающемся горизонтальном слое жидкости. При фиксированном числе Прандтля ($Pr = 6,7$) получены нейтральные кривые при различных значениях числа Тейлора. Рассматривается поведение конечно-амплитудных возмущений адвективного течения за порогом устойчивости. Проведен анализ устойчивости плоских возмущений при быстром вращении.

Механизм формирования адвективного течения во вращающемся горизонтальном слое жидкости в случае, когда ось вращения совпадает с точностью до знака с направлением силы тяжести, обусловлен двумя факторами: адвекцией, возникающей под действием продольного градиента температуры, и силой Кориолиса. Адвективное течение, возникающее в плоском горизонтальном слое жидкости при отсутствии вращения, когда температура на обеих границах линейно изменяется с продольной координатой, было впервые изучено в [1]. Устойчивость этого плоскопараллельного течения для случая твердых границ и свободной верхней границы исследована в [2–4]. Было показано, что при малых числах Прандтля неустойчивость в слое с твердыми границами обусловлена гидродинамическим механизмом (неподвижные вихри на границе встречных потоков). С ростом числа Прандтля в области образования вихрей имеется устойчивая температурная стратификация, затрудняющая развитие неустойчивости этого типа. При умеренных и больших числах Прандтля неустойчивость имеет рэлеевскую природу, она связана с наличием в потоке потенциально неустойчивых зон распределения температуры. Подробный обзор работ, в которых определены различные механизмы неустойчивости плоскопараллельных адвективных течений для случая твердых, свободных границ, а также при наличии теплоотдачи с поверхности по закону Ньютона, для теплоизолированных границ представлены в монографии [5].

В [6] исследована устойчивость адвективного течения проводящей жидкости в слабом поперечном магнитном поле. Показано, что магнитное поле резко повышает устойчивость потока, не меняя характера нейтральной кривой.

В плоском вращающемся слое изотермической жидкости под действием трения на нижней твердой границе и тангенциальных напряжений внешней силы на свободной верхней границе возникает течение Экмана [7]. Среди обширного числа работ по исследованию этого течения можно выделить [8–10], в которых изучается первая волновая неустойчивость, так называемая вторичная "ребристая" неустойчивость, возникающая на основе первичной конечно-амплитудной волновой неустойчивости, и т.д.

Адвективное течение во вращающемся слое жидкости в случае линейной зависимости температуры на границах описывается аналитически. Такое решение для случая быстрого вращения при различных граничных условиях и наличия поперечного магнитного поля было получено в [11]. В дальнейшем было сформулировано

целое семейство точных решений, которое использовалось для моделирования крупномасштабной турбулентности в тонком слое вращающейся жидкости [12], адвективных течений в плоском вращающемся слое проводящей жидкости [13], моделирования крупномасштабных океанских течений [14] и моделирования мезомасштабных процессов в нижнем слое атмосферы [15].

Данная работа выполнена в связи с тем, что вопрос об устойчивости адвективного течения во вращающемся слое жидкости остается открытым. Ниже рассматривается простейший случай.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоский горизонтальный слой несжимаемой жидкости, ограниченный твердыми плоскостями $z = \pm h$ и вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω_0 . Ось вращения совпадает с вертикальной осью координат. На обеих границах задана температура, линейно меняющаяся с координатой x , условие прилипания и замкнутости потока

$$z = \pm h: T = Ax, A = \text{const}, v = 0, \int_{-1}^1 v_x dz = 0 \quad (1.1)$$

Исследование будем проводить на основе уравнений конвекции в приближении Буссинеска во вращающейся системе отсчета в декартовой системе координат [16]. Выбрав в качестве единиц измерения длины, времени, скорости, температуры и давление соответственно $h, h^2/\nu, g\beta Ah^2/\nu, Ah, \rho_0 g\beta Ah^2$ (где ν – кинематическая вязкость жидкости, g – ускорение свободного падения, β – коэффициент теплового расширения, ρ_0 – средняя плотность), получим уравнения в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \text{Gr}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \sqrt{\text{Ta}}(\mathbf{i}_z \times \mathbf{v}) &= -\nabla P + \Delta \mathbf{v} + \Pi_z \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \text{Gr } \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T \\ \text{Gr} &= \frac{g\beta Ah^4}{\nu^2}, \quad \text{Ta} = \left(\frac{2\Omega_0 h^2}{\nu} \right)^2, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\mathbf{v}(t, x, y, z) = (v_x, v_y, v_z)$ – вектор скорости, P – давление, \mathbf{i}_z – орт-вектор вертикальной оси z , Gr – число Грасгофа, Ta – число Тейлора, Pr – число Прандтля, χ – коэффициент температуропроводности.

Для граничных условий (1.1) в плоском вращающемся слое несжимаемой жидкости формируется стационарное однородное по x, y адвективное течение

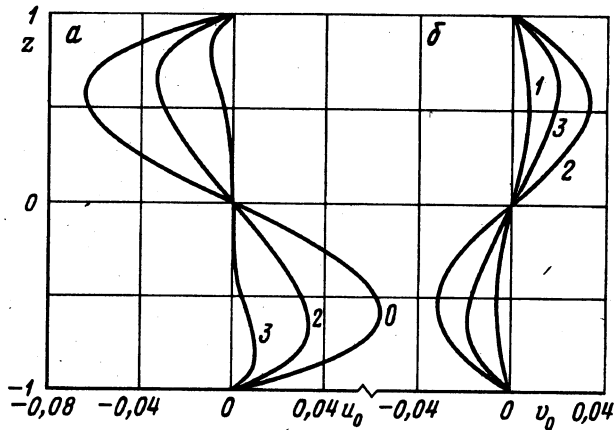
$$v_x = u_0(z), \quad v_y = v_0(z), \quad v_z = 0, \quad T = T_0(x, z) = x + \tau_0(z), \quad P = p_0(x, z) \quad (1.3)$$

которое представимо в аналитическом виде. Подставив (1.3) в систему уравнений (1.2), получим дифференциальные уравнения для распределения скорости, температуры и давления

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = x + \tau_0, \quad -\sqrt{\text{Ta}} v_0 = -\frac{\partial p_0}{\partial x} + u_0'', \quad \sqrt{\text{Ta}} u_0 = v_0'', \quad \text{Gr } u_0 = \frac{1}{\text{Pr}} \tau_0'' \quad (1.4)$$

С учетом граничных условий (1.1) получим точное решение задачи

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{\sqrt{\text{Ta}}} \text{Im } f_1(z), \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{\text{Ta}}} [z - \text{Re } f_1(z)] \\ T_0 &= x + \frac{\text{Gr } \text{Pr}}{\sqrt{\text{Ta}}} v_0(z), \quad p_0 = xz + \int_{-1}^z \frac{\text{Gr } \text{Pr}}{\sqrt{\text{Ta}}} v_0(z) dz \\ f_1(z) &= \frac{\text{sh}(\lambda z)}{\text{sh}(\lambda)}, \quad \lambda = \text{Ta}^{0.25} \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad i = \sqrt{-1} \end{aligned} \quad (1.5)$$



Фиг. 1. Профили компонент скорости u_0 (а), v_0 (б) адвективного течения при значениях $Ta = 0; 1; 100; 1000$ (кривые 0–3)

Профили компонент скорости $u_0(z)$, $v_0(z)$ и соответственно $\tau_0(z)$ являются антисимметричными относительно оси x (фиг. 1, а). Они описывают движение типа спирали Экмана. Температура представляется в виде функции, описывающей два антисимметричных тепловых потока, направленных в противоположные стороны. С ростом числа Тейлора вблизи твердых границ образуются пограничные слои скорости и температуры.

Для исследования устойчивости стационарного адвективного течения во вращающемся слое жидкости применим метод малых возмущений

$$v_x = u_0 + u, \quad v_y = v_0 + v, \quad v_z = 0, \quad T = T_0 + \theta, \quad P = p_0 + p \quad (1.6)$$

Подставим возмущенные поля (1.6) в исходную систему (1.2) и граничные условия (1.1), учитывая (1.4), получим следующую задачу:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{Gr}[(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{V} + (\nabla\nabla)\mathbf{V}] + \sqrt{Ta}(\mathbf{i}_z \times \mathbf{V}) = -\nabla p + \Delta \mathbf{V} + \theta \mathbf{i}_z, \quad \text{div } \mathbf{V} = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{Gr}[\nabla\nabla T_0 + \mathbf{v}_0\nabla\theta + \nabla\nabla\theta] = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \theta$$

$$z = \pm 1: \mathbf{V} = 0, \quad \theta = 0 \quad (1.8)$$

$$\mathbf{v}_0 = (u_0, v_0, 0), \quad \mathbf{V} = (u, v, w)$$

В силу большой сложности исследования устойчивости течения в трехмерной постановке задачи (1.7)–(1.8) будем рассматривать предельные случаи: пространственные спиральные периодические по y возмущения в виде валов с осью, параллельной оси x , и плоские периодические по x возмущения в виде валов с осью, перпендикулярной оси x . Для адвективного течения без вращения спиральные возмущения считаются наиболее опасными среди двумерных возмущений [2–4].

2. Спиральные возмущения. Уравнения спиральных возмущений выводятся из системы (1.7)–(1.8) в предположении, что производная по x у всех функций равна нулю. Имеются все три компоненты вектора возмущения скорости, которые, так же как и возмущение температуры, являются функциями времени t и двух пространственных координат y, z . Учитывая бездивергентность возмущений скорости, запишем

уравнения (1.7)–(1.8) через функцию тока возмущений Ψ

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \times$$

$$\times \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{Gr} \left[-\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \nu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \nu_0'' \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] - \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial u}{\partial z} = \Delta \Phi - \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\Delta \Psi + \Phi = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Gr} \left[-\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \nu_0 \frac{\partial u}{\partial y} + u_0' \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] + \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \Delta u$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{Gr} \left[-\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \nu_0 \frac{\partial \theta}{\partial y} + u \right] + \frac{\text{Gr}^2 \text{Pr}}{\sqrt{\text{Ta}}} \nu_0' \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \theta$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$z = \pm 1: \quad \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad u = 0, \quad \theta = 0 \tag{2.2}$$

На боковых границах заданы условия периодичности

$$\Psi(t, 0, z) = \Psi(t, L, z), \quad \Phi(t, 0, z) = \Phi(t, L, z) \tag{2.3}$$

$$u(t, 0, z) = u(t, L, z), \quad \theta(t, 0, z) = \theta(t, L, z)$$

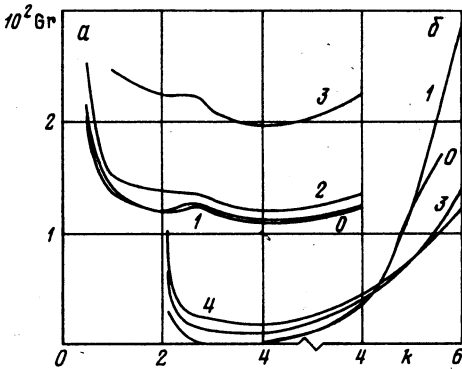
Здесь L – длина волны возмущений.

С помощью системы уравнений (2.1) с граничными условиями (2.2)–(2.3) исследовалась структура вторичных течений, возникающих в горизонтальном слое при фиксированных значениях чисел Прандтля и Тейлора, для значений числа Грасгофа выше критического. С помощью линеаризованных уравнений возмущений строились нейтральные кривые для критических чисел Грасгофа.

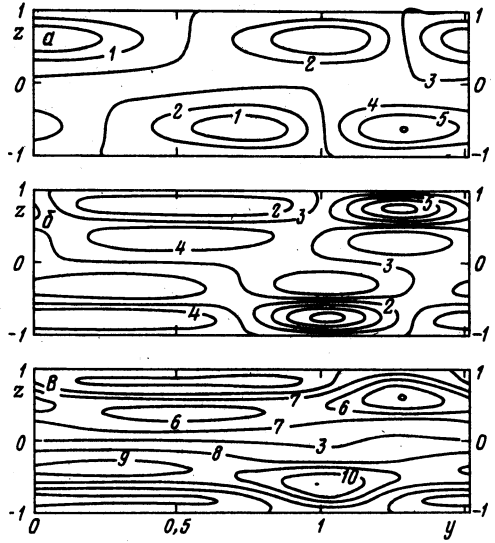
Задача решалась численно с помощью метода сеток, применялся "двухполевой" метод [17]. Использовались явные конечно-разностные схемы с центральными и направленными разностями. Уравнение Пуассона для функции тока возмущений Ψ решалось методом последовательной верхней релаксации. Основные расчеты проводились для $\text{Pr} = 6, 7$, число Тейлора варьировалось в пределах от 0 до 100, шаг сетки 21×41 . В качестве возмущений для неизвестных Ψ , u и θ бралась функция $\cos(2\pi y/L) \sin^2 \pi z$.

На фиг. 2, *a* представлены нейтральные кривые зависимости критического числа Грасгофа Gr_k от волнового числа k при различных значениях Ta . Для тестирования использовались результаты работ [2–5], полученные при $\text{Ta} = 0$. Тестирование показало, что результаты расчетов линейной задачи методом сеток отличаются от результатов, полученных с помощью решения конечно-амплитудных уравнений методом Рунге – Кутты не более чем на 3%. Расчеты показали, что вращение повышает устойчивость адвективного течения, не меняя характера нейтральных кривых. Нейтральные кривые имеют локальный минимум при $k \approx 2$, локальный максимум при $k \approx 2,6$. Минимальное критическое значение числа Грасгофа достигается при $k \approx 4,16$ для любого Ta . При $k \leq 2,6$ наиболее опасной является длинноволновая мода, а при больших значениях волнового числа – рэлеевская.

При отсутствии вращения в соответствии с результатами работ [2–4] в потенциально неустойчивых зонах распределения температуры формируются плоские ячеистые возмущения, сносимые основным потоком. При наличии слабого вращения вид возмущений температуры и скорости не меняется. На фиг. 3 представлены изолинии



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Нейтральные кривые для спиральных возмущений (а), плоских возмущений (б) при $Pr = 6,7$; для $Ta = 0; 1; 10; 100; 200$ (кривые 0–4)

Фиг. 3. Изолинии возмущения: а – функции тока Ψ , б – температуры θ , в – компоненты скорости u при $Ta = 1, Gr = 200$ и $k = 4,16$; изолинии номер 1–10 соответствуют значениям $-0,002; -0,001; 0, 0,001; 0,002; -1,8; -0,9; 0,9, 1,8; 2,7$

возмущения функции тока Ψ , возмущения температуры θ и возмущения компоненты скорости u при $Ta = 1, Gr = 200$ и $k = 4,16$ в фиксированный момент времени.

Даже слабое вращение приводит к периодическому движению потенциально неустойчивых зон возмущения температуры и соответственно ячеек возмущения вдоль горизонтального слоя: внизу – по часовой стрелке, вверх – против часовой. Период повторения картины вторичного течения и возмущения температуры уменьшается с ростом Gr . Кривая зависимости периода от числа Грасгофа подчиняется гиперболическому закону. Так, например, для $Ta = 1$ и $k = 4,16$ период $t = 583/Gr^{1,129}$.

Получены следующие зависимости амплитуды функции тока возмущений Ψ_{max} , компоненты возмущения скорости u_{max} , амплитуды возмущения скорости $V_{max} = \max \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ и числа Нуссельта Nu от Gr при $Ta = 1, k = 4,16$ вблизи порога устойчивости:

$$\Psi_{max} \approx 0,274 \cdot 10^{-3} \sqrt{Gr - Gr_k}, \quad u_{max} \approx 0,579 \cdot 10^{-3} \sqrt{Gr - Gr_k}$$

$$V_{max} \approx 0,188 \cdot 10^{-2} \sqrt{Gr - Gr_k}, \quad Nu \approx 17,847 \sqrt{Gr - Gr_k}$$

С ростом Gr увеличивается скорость вторичного течения, его температура и тепловой поток через границы.

В пределах $0 \leq Ta < 100$ характер возмущений скорости и температуры не меняется.

3. Плоские возмущения. Уравнения плоских возмущений выводятся из системы (1.7) в предположении, что производная по y у всех функций равна нулю. В отличие от случая отсутствия вращения здесь имеются все три компоненты вектора возмущения скорости, которые, так же как и возмущения температуры, являются функциями

времени t и двух пространственных координат x, z . Учитывая бездивергентность возмущений скорости, запишем задачу (1.7)–(1.8) через функцию тока возмущений ψ

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{Gr} \left[-\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} + u_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} + u_0'' \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] - \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial v}{\partial z} = \Delta \phi + \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\Delta \psi + \phi = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{Gr} \left[-\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + u_0 \frac{\partial v}{\partial x} + v_0' \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] - \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \Delta v \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{Gr} \left[-\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} + u_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] + \frac{\text{Gr}^2 \text{Pr}}{\sqrt{\text{Ta}}} v_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \theta$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$z = \pm 1: \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad v = 0, \quad \theta = 0 \quad (3.2)$$

На боковых границах ($x = 0, L$) заданы условия периодичности, аналогичные (2.3).

С помощью системы уравнений (3.1) с граничными условиями (3.2) исследовалась структура вторичных течений, возникающих в горизонтальном слое при фиксированных значениях Pr и Ta для значений Gr выше критического. С помощью линейризованных уравнений возмущений строились нейтральные кривые для критических чисел Грасгофа.

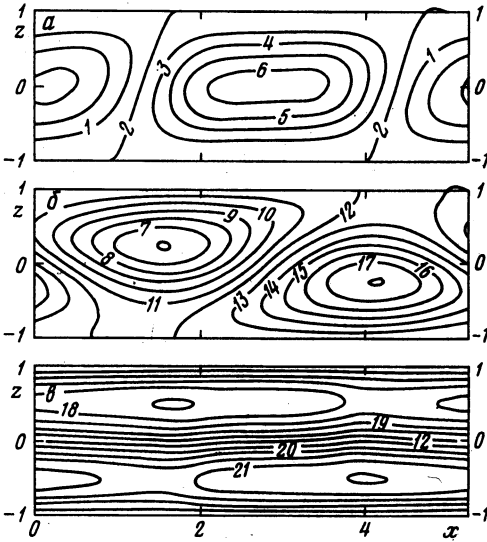
Задача решалась численно с помощью метода сеток тем же способом, что и в случае спиральных возмущений. Основные расчеты проводились для $\text{Pr} = 6,7$, число Тейлора варьировалось в пределах от 0 до 5000. В качестве начальных возмущений для неизвестных ψ, v и θ бралась функция $\cos(2\pi x/L) \sin^2 \pi z$.

На фиг. 2, б представлены нейтральные кривые зависимости критического числа Грасгофа от волнового числа k при различных значениях Ta . Для случая плоских возмущений вращение также повышает устойчивость адвективного течения. Для $\text{Ta} = 0$ минимальное критическое значение числа Грасгофа достигается при $k \approx 1,2$. С ростом числа Тейлора критическое волновое число растет. Так, при $\text{Ta} = 100$ $k \approx 2$, а при $\text{Ta} = 5000$ $k \approx 2,5$. Нейтральные кривые для волновых чисел, больших критических, растут медленнее с ростом Ta .

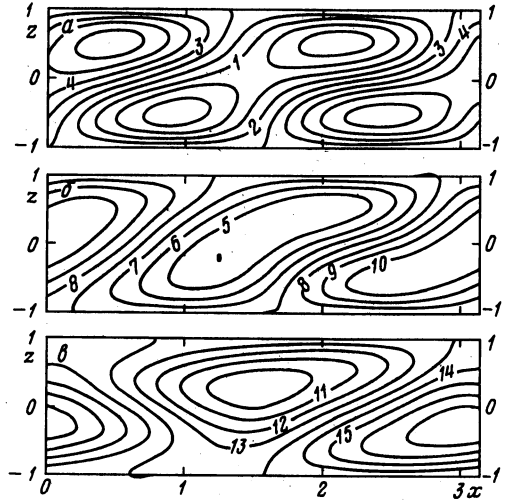
Исследовалась структура вторичных течений, возникающих в горизонтальном слое, при фиксированных значениях Pr и Ta для числа Грасгофа выше критического. Расчеты показали, что при всех рассматриваемых значениях Ta , начиная с нулевого, топология функции ψ не меняется и представляет собой систему чередующихся вихрей, расположенных вдоль слоя (фиг. 4, а).

При небольших надкритических значениях Gr возмущения температуры подобны ψ для всех значений Ta (фиг. 4, б). С ростом Gr в верхней половине слоя значения $\theta < 0$, а в нижней – положительные (фиг. 4, в). Вблизи границ формируются волны в виде тепловых пятен, с ростом числа Тейлора они прижимаются к твердым границам. В середине слоя изотермы практически прямые. При фиксированном Ta с ростом числа Грасгофа максимум возмущения температуры растет. При $\text{Ta} = 1000$, начиная с $\text{Gr} \geq 1000$, пятна у границ начинают дробиться.

При отсутствии вращения ($\text{Ta} = 0$) компонента возмущения скорости $v = 0$. Поэтому исследование ее изменения в зависимости от чисел Тейлора и Грасгофа считаем наиболее интересным пунктом изучения плоских возмущений. Численное моделирование показало, что поведение u -й компоненты возмущения скорости с ростом Gr



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 4. Изолинии возмущения: *a* – функции тока ψ при $Gr = 200$, *б* – температуры θ при $Gr = 20$, *в* – при $Gr = 200$ для $Ta = 1$, $k = 1,2$; изолинии номер 1–21 соответствуют значениям $-0,01; 0, 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; -1; -0,8, -0,6, -0,4, -0,2, 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; -1; -8; -4, 4, 8$

Фиг. 5. Изолинии возмущения компоненты скорости v : *a* – при $Gr = 50$, *б* – при $Gr = 100$ и *в* – при $Gr = 250$ для $Ta = 200$, $k = 2$; изолинии номер 1–15 соответствуют значениям $-0,008; 0,004; 0,004; -0,008; -0,021, -0,014; -0,007; 0,007; 0,014; 0,021, -0,03; -0,02; -0,01; 0,01; 0,02$

одинаково для $0 < Ta \leq 5000$. На фиг. 5 представлены изолинии функции v при $Ta = 200$, $k = 2$. С ростом числа Грасгофа возмущение скорости возрастает, при $Gr = 50$ (фиг. 5, *a*) имеется система чередующихся вихрей, затем вихри занимают весь слой (фиг. 5, *б*) и, наконец, изолинии компоненты возмущения скорости становятся подобны изотермам (фиг. 5, *в*).

4. Плоские возмущения при быстром вращении. При быстром вращении, когда $Ta \gg 1$, $u_0 \approx 0$, а $v_0 \approx z/\sqrt{Ta}$. Возникает своеобразное течение Куэтта, направленное перпендикулярно температурному градиенту на границах. Уравнения для плоских возмущений скорости и температуры в этом случае принимают простой вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} - \sqrt{Ta} v &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \Delta u \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{Cr}{\sqrt{Ta}} w + \sqrt{Ta} u &= \Delta v \\
 \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \Delta w - \theta \\
 \frac{\partial \theta}{\partial t} + Gr \left[u + \frac{Ra}{Ta} w \right] &= \frac{1}{Pr} \Delta \theta \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

где $Ra = Gr Pr$ – число Рэлея. Решение системы (4.1) представим в виде

$$u, v, w, \theta, p \sim \exp(-\lambda t + ik_x x + ik_z z), \quad k_x^2 + k_z^2 = k^2$$

Дисперсионное соотношение для системы (4.1) имеет следующий вид:

$$D(\lambda, k) = -\frac{\lambda - k^2}{Ta} [PrTa(\lambda - k^2)^2 k^2 + k_x^2 Ra^2 - k_z^2 PrTa^2] = 0$$

Откуда

$$\lambda_1 = k^2, \quad \lambda_{2,3} = k^2 \pm \frac{1}{k} \sqrt{\frac{k_x^2 Ra^2 - k_z^2 PrTa^2}{TaPr}} = k^2 \pm \sqrt{\frac{PrGr^2 + Ta^2}{Ta}} \sqrt{\cos 2\alpha - \cos 2\alpha_0}$$

$$k_x = k \cos \alpha, \quad k_z = k \sin \alpha, \quad \sin \alpha_0 = \sqrt{\frac{PrGr^2}{Ta^2 + PrGr^2}}$$

$$\cos \alpha_0 = \sqrt{\frac{Ta^2}{Ta^2 + PrGr^2}}$$

При $\cos 2\alpha \leq \cos 2\alpha_0$, возмущения температуры и скорости затухают по колебательному закону. Если это неравенство не выполняется, то монотонная неустойчивость возникает, когда $\lambda_3 < 0$

$$k^2 < \sqrt{\frac{PrGr^2 + Ta^2}{Ta}} \sqrt{\frac{\cos 2\alpha - \cos 2\alpha_0}{2}}$$

Максимум правой части неравенства достигается при $\alpha = 0$, т.е. при $k_z = 0$ и

$$k_{\max}^2 < \sqrt{\frac{PrGr^2 + Ta^2}{Ta}} \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha_0}{2}} = \sqrt{\frac{PrGr^2 + Ta^2}{Ta}} \sin \alpha_0$$

Подставив в (4.4) вместо $\sin \alpha_0$ его представление через числа Ta , Gr и Pr , получаем в результате, что для достаточно больших чисел Тейлора возникает длинноволновая монотонная неустойчивость при

$$\max(k_x^2 + k_z^2) < Gr \sqrt{Pr/Ta}$$

Так как критическое число Грасгофа, пропорционально квадратному корню от числа Тейлора и обратно пропорционально квадратному корню от числа Прандтля, устойчивость адвективного движения увеличивается с ростом угловой скорости и уменьшается с ростом Pr .

Заключение. Вращение повышает устойчивость адвективного течения, не меняя характера нейтральных кривых как в случае спиральных, так и в случае плоских возмущений. В случае спиральных возмущений даже слабое вращение приводит к возникновению нестационарных, винтообразных вихрей, расположенных в потенциально неустойчивых зонах температуры и движущихся периодически вдоль границ слоя. С ростом числа Тейлора эти вихри прижимаются к горизонтальным границам. В случае плоских возмущений возникают стационарные вихри, расположенные под углом к направлению градиента температуры на границах. В случае быстрого вращения для плоских возмущений вне тонких пограничных слоев возникает длинноволновая монотонная неустойчивость адвективного движения при любых граничных условиях для скорости.

Авторы благодарят В.М. Мызникова и Е.Л. Тарунина за ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бирих Р.В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
2. *Мызников В.М.* Конечно-амплитудные конвективные движения жидкости в горизонтальном слое с продольным градиентом температуры // Математические модели течений жидкости: Тр. 6-го Всесоюз. семинара по числ. методам механики вязкой жидкости. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1978. С. 176–186.
3. *Мызников В.М.* Конечно-амплитудные пространственные возмущения адвективного движения в горизонтальном слое со свободной границей // Конвективные течения. Пермь: Изд-во Пермск. пед. ин-та, 1981. С. 83–88.
4. *Gershuni G.Z., Laure P., Myznikov V.M. et al.* On the stability of plane-parallel advective flows in long horizontal layer // Microgravity Q. 1992. № 2. № 3. P. 141–151.
5. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319с.
6. *Аристов С.Н., Пичугин А.М.* Монотонная устойчивость адвективного течения проводящей жидкости в слабом поперечном магнитном поле // Магнит. гидродинамика. 1989. № 3. С. 127–129.
7. *Ekman V.W.* On the influence of the Earth's rotation on ocean currents // Arkiv Mat., Astr., Phys. 1906. V. 2. № 11. 52s.
8. *Spooner G.F., Criminale W.O.* The evolution of disturbances in an Ekman boundary layer // J. Fluid Mech. 1982. V. 115. P. 327–346.
9. *Leibovich S., Lele S.K.* The influence of the horizontal component of Earth's angular velocity on the instability of the Ekman layer // J. Fluid Mech. 1985. V. 150. P. 41–87.
10. *Marlatt S.W., Biringen S.* Numerical simulation of spatially evolving Ekman layer instability // Phys. Fluid. 1995. V. 7. № 2. P. 449–451.
11. *Аристов С.Н., Пичугин А.М.* Течение и теплообмен в слое вязкой проводящей жидкости между вращающимися пластинами с горизонтальными градиентами температуры в поперечном магнитном поле // ПМТФ. 1990. № 4. С. 124–127.
12. *Аристов С.Н., Фрик П.Г.* Крупномасштабная турбулентность в тонком слое неизотермической вращающейся жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 48–55.
13. *Аристов С.Н., Фрик П.Г.* Адвективные течения в плоском вращающемся слое проводящей жидкости // Магнит гидродинамика. 1988. № 1. С. 13–20.
14. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Эволюция ветровой циркуляции в неизотермическом океане // Океанология. 1990. Т. 30. Вып. 4. С. 562–566.
15. *Шварц К.Г., Шкляев В.А.* Моделирование мезомасштабных атмосферных процессов над большим городом // Метеорология и гидрология. 1994. № 9. С. 29–38.
16. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392с.
17. *Тарунин Е.Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225с.

Пермь

Поступила в редакцию
29.XII.1997