МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1999

УДК 532.59.013

© 1999 г. Е.А. КАРАБУТ

ПРИМЕР ТЕЧЕНИЯ ТЯЖЕЛОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Найдено решение уравнений Эйлера, описывающее плоское стационарное потенциальное течение несжимаемой жидкости в поле сил тяжести. На свободной поверхности выполнено условие постоянства давления, поверхностное натяжение не учитывается.

Не много известно примеров точного решения задач о плоском потенциальном течении тяжелой жидкости со свободной границей. Самые известные примеры – это угловое течение Стокса [1], течение Жуковского [2] и течение Ричардсона [3]. Интересные решения о течении жидкости над неровным дном определенной формы найдены в [4]. Дополнительные примеры точных решений (их общее число не превышает 10) можно найти в [5, 6].

Недавно в [7–9] найдено целое семейство точных решений задачи о течениях тяжелой жидкости. Оно описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида. В общем виде эта нелинейная система не решается и было найдено только частное подмножество решений, близкое к уединенным волнам на воде. Новое решение этой системы, соответствующее движению жидкости над неровным дном, получено в данной заметке.

Ось X декартовой системы координат пустим горизонтально слева направо, а ось Y – вертикально вверх. Считаем, что движение жидкости происходит над дном, имеющим ровный горизонтальный участок, простирающийся от некоторой точки $X = X^*$ до $X = -\infty$. При $X > X^*$ дно, вообще говоря, может искривляться. Поместим начало декартовой системы координат на ровном участке дна. Пусть при $X \to -\infty$ жидкость движется слева направо с горизонтальной скоростью u_0 в слое глубины h_0, т.е. считаем, что свободная поверхность там – горизонтальная линия. Течение определяется числом Фруда $\mathrm{Fr} = u_0/\sqrt{gh_0} > 1$ (g – ускорение свободного падения) либо параметром Стокса θ ($0 \leqslant \theta < \pi/2$), определяемым из уравнения $\mathrm{tg}\theta/\theta = \mathrm{Fr}^2$.

Обозначим через Φ, Ψ соответственно потенциал скорости и функцию тока. В плоскости безразмерного комплексного потенциала

$$\chi = \varphi + i\psi = \frac{\theta}{h_0 u_0}(\Phi + i\Psi)$$

жидкости соответствует полоса $-\infty < \varphi < \infty$, $0 < \psi < \theta$. Задача будет решена, если найдем конформное отображение этой полосы на область течения

$$Z = X + iY = \frac{h_0}{\theta}(\chi + W(\chi))$$

Неизвестная функция $W(\chi)$ определяется из решения краевой задачи

$$\left|\frac{d(W+\chi)}{d\chi}\right|^2 = \frac{1}{1 - 2\nu \operatorname{Im} W}, \quad \nu = \operatorname{ctg}\theta \quad (\psi = \theta, \ \varphi < \varphi^*) \tag{1}$$

$$\operatorname{Im} W = 0 \quad (\psi = 0, \varphi < \varphi^*)$$
$$\lim_{\varphi \to -\infty} \operatorname{Im} W = 0$$

Первое уравнение – условие постоянства давления на свободной поверхности (интеграл Бернулли). Второе – условие ровного дна. Решение этой задачи не единственно, поскольку ничего не известно о поведении решения при $\varphi > \varphi^*$.

Линеаризация (1) на тривиальном решении $W \equiv 0$ дает линейную краевую задачу

$$B_\psi = \nu B \;\; (\psi = \theta, \varphi < \varphi^*), \quad B = 0 \;\; (\psi = 0, \varphi < \varphi^*), \quad B = \operatorname{Im} W \tag{2}$$

Решение задачи (2), исчезающее при $\varphi \to -\infty$, имеет вид $B = e^\varphi \sin\psi$. Такая линеаризация локально справедлива при $X \to -\infty$, так как там свободная поверхность жидкости близка к невозмущенной горизонтальной линии $Y = h_0$. Таким образом, в главном члене имеем $W \sim e^\chi$. Поэтому решение краевой задачи (1) естественно искать в виде степенного ряда

$$W = \sum_{j=1}^{\infty} E_j(\theta)\zeta^j, \quad \operatorname{Im} E_j = 0 \quad (\zeta = e^\chi) \tag{3}$$

Это асимптотическое разложение при $\varphi \to -\infty$ было предложено в [10] для исследования уединенных волн большой амплитуды. Если его подставить в граничное условие (1) и приравнять члены при одинаковых степенях exp φ, то получим рекуррентные формулы для нахождения коэффициентов E_j

$$E_2 = E_1^2\left(-\frac{3}{4}\nu^2 + \frac{1}{4}\right), \quad E_3 = E_1^3\left(\frac{9}{16}\nu^4 - \frac{7}{8}\nu^2 + \frac{1}{16}\right), \dots$$

$$E_j(\theta, E_1) = E_1^j \tilde{E}_j(\nu) \quad (j \geqslant 2)$$

В [10] численно найдено 200 членов разложения (3) для $\theta = \pi/3$ и $\pi/4$. Обнаружилось, что ряд (3) можно использовать для приближенного изучения уединенных волн вплоть до максимальной амплитуды.

Первый коэффициент E_1 остается не определенным. В [9, 10] показано, что его изменение приводит лишь к сдвигу решения вдоль полосы. Однако утверждение о том, что при фиксированном θ существует единственное решение – не совсем точно. Правильное утверждение состоит в следующем: при изменении E_1 течение, даваемое рядом (3), не меняется, если E_1 не меняет знака. Ранее рассматривался случай $E_1 > 0$. В этом случае свободная поверхность расположена выше невозмущенного уровня $Y = h_0$. Это течение похоже на уединенную волну. При $E_1 < 0$ существует второе течение, для которого глубина жидкости при $X \to -\infty$ меньше h_0. Ниже будет построено такое течение для $\theta = \pi/3$.

Преобразуем сначала краевую задачу (1) в бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Введем новые функции $P_1(\chi)$, $P_2(\chi)$, $P_3(\chi)$, ..., которые с неизвестной функцией $W(\chi)$ связаны соотношениями

$$P_j(\chi) = W(\chi + i\theta(2j-2)) \tag{4}$$

Перепишем условие постоянства давления (1) в виде

$$\left(\frac{dW(\varphi + i\theta)}{d\varphi} + 1\right)\left(\overline{\frac{dW(\varphi + i\theta)}{d\varphi}} + 1\right) = \frac{1}{1 + i\nu(W(\varphi + i\theta) - \overline{W(\varphi + i\theta)})} \tag{5}$$

Условие ровного дна позволяет применить принцип симметрии и аналитически продолжить функцию $W(\chi)$, определенную в верхней полуплоскости, в нижнюю полуплоскость: $\overline{W(\varphi+i\theta)} = W(\varphi-i\theta)$. Принимая это во внимание, получим из (4)

$$P_j(\varphi+i\theta(1-2j)) = \overline{W(\varphi+i\theta)},\quad P_{j+1}(\varphi+i\theta(1-2j)) = W(\varphi+i\theta)$$

Таким образом, (5) может быть переписано

$$\left(\frac{dP_{j+1}(\varphi+i\theta(1-2j))}{d\varphi}+1\right)\left(\frac{dP_j(\varphi+i\theta(1-2j))}{d\varphi}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{1+i\nu[P_{j+1}(\varphi+i\theta(1-2j))-P_j(\varphi+i\theta(1-2j))]}$$

Учитывая аналитичность функций P_{j+1}, P_j, заменим производные $d/d\varphi$ на $d/d\chi$ и получим в результате следующую бесконечную систему уравнений:

$$\left(\frac{dP_2}{d\chi}+1\right)\left(\frac{dP_1}{d\chi}+1\right)=\frac{1}{1+i\nu(P_2-P_1)} \tag{6}$$

$$\left(\frac{dP_3}{d\chi}+1\right)\left(\frac{dP_2}{d\chi}+1\right)=\frac{1}{1+i\nu(P_3-P_2)},\ldots$$

для неизвестных функций $P_1, P_2, P_3,\ldots$

Если разыскивается решение задачи (1), периодическое по ψ, и одновременно отношение периода к θ является рациональным числом, то система (6) становится конечной. Решение $W(\chi)$, даваемое рядом (3), является периодической функцией по ψ с периодом 2π. Поэтому, если $\theta=\pi m/n$, где m, n – целые, система (6) конечна, потому что множество функций $P_j(\chi)$ будет содержать периодически повторяющееся подмножество, состоящее только из n различных функций. В самом деле, учитывая периодичность и (4), имеем

$$P_{n+1}(\chi)=W(\chi+i2n\theta)=W(\chi+i2\pi m)=W(\chi)=P_1(\chi)$$

Следовательно, для рациональных чисел θ/π решение, даваемое рядом (3), определяется равенством $W=P_1$, где функции $P_1, P_2, \ldots, P_n$ удовлетворяют системе из n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{dP_{j+1}}{d\chi}+1\right)\left(\frac{dP_j}{d\chi}+1\right)=\frac{1}{1+i\nu(P_{j+1}-P_j)} \tag{7}$$

$$P_{n+1}=P_1 \quad (1\leqslant j\leqslant n)$$

Отметим, что эта система имеет интеграл

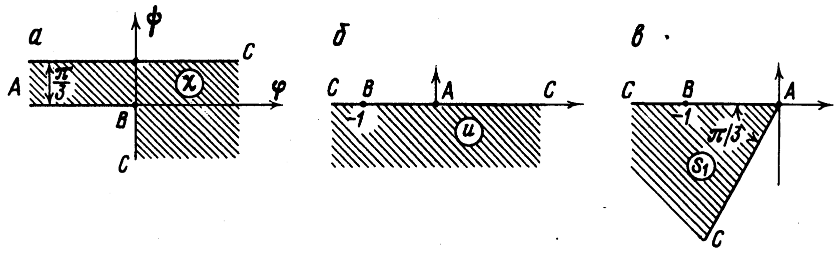
$$(P_1-P_2)^2+(P_2-P_3)^2+\ldots+(P_{n-1}-P_n)^2+(P_n-P_1)^2=\text{const} \tag{8}$$

Для периодических гравитационных волн не существует асимптотического разложения, подобного (3). Однако из условия периодичности по ψ можно получить систему уравнений, аналогичную (7). Ее решения дают течения, похожие на волны на воде [11, 12].

Пусть теперь $\theta=\pi/3$. В этом случае система (7) содержит минимальное количество – три уравнения. Разрешая их относительно производных, получим

$$P_1'+1=\frac{f_2}{\sqrt{f_1f_2f_3}},\quad P_2'+1=\frac{f_3}{\sqrt{f_1f_2f_3}},\quad P_3'+1=\frac{f_1}{\sqrt{f_1f_2f_3}}$$

$$f_1=1+\frac{i}{\sqrt3}(P_2-P_1),\quad f_2=1+\frac{i}{\sqrt3}(P_3-P_2),\quad f_3=1+\frac{i}{\sqrt3}(P_1-P_3)$$



Фиг. 1. Схема течения на плоскостях χ (*а*), u (*б*) и S (*в*)

Система будет проще для новых неизвестных

$$S_l = \sum_{k=0}^{\infty} E_{l+3k}\zeta^{l+3k} \quad (l = 1, 2, 3) \tag{9}$$

$$P_1 = S_1 + S_2 + S_3, \quad P_2 = e^{2i\pi/3}S_1 + e^{4i\pi/3}S_2 + S_3, \quad P_3 = e^{4i\pi/3}S_1 + e^{2i\pi/3}S_2 + S_3$$

Можно оставить только два уравнения

$$\frac{dS_1}{d\chi} = \frac{S_1}{\sqrt{1+S_1^3}}, \quad \frac{d(S_3+\chi)}{d\chi} = \frac{1}{\sqrt{1+S_1^3}} \tag{10}$$

поскольку в новых переменных интеграл (8) будет иметь вид $S_2 = 0$. Если функции $S_1(\chi)$, $S_3(\chi)$ найдены, то решение дается формулой $W = S_1 + S_3$.

Из (9) следует, что $S_1 \approx E_1 e^{\chi}$ при $\varphi \to -\infty$. Пусть $E_1 < 0$, тогда S_1 на дне $\chi = \varphi$ также является отрицательной. Тогда, как следует из первого уравнения (10), при увеличении φ величина S_1 убывает. Убывание продолжается, пока не будет выполнено равенство $S_1 = -1$. Далее при увеличении φ функция S_1 уже не может оставаться вещественной. Точка $\chi = \varphi^*$, где это происходит, является особой – здесь происходит излом формы дна.

Найдем эту точку. Сделаем в первом уравнении (10) замену $u = S_1^3$

$$d\chi = \frac{1}{3} du \frac{\sqrt{1+u}}{u} \tag{11}$$

Проинтегрируем (11) при вещественных χ

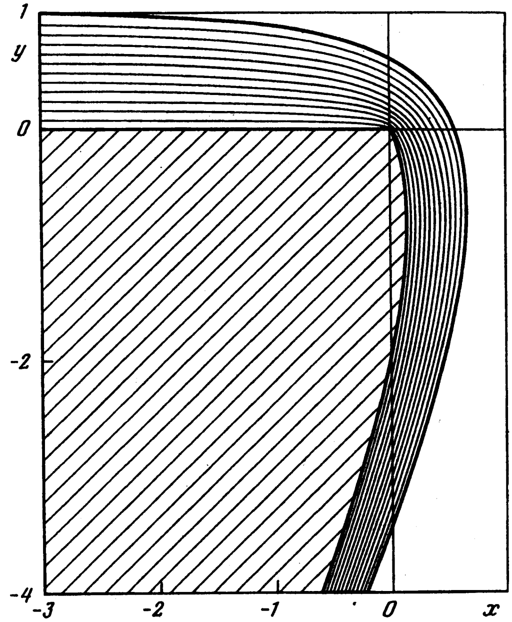
$$\frac{1}{3}\left(2\sqrt{1+u} + \ln\frac{1-\sqrt{1+u}}{1+\sqrt{1+u}}\right) = \varphi + c, \quad c = \frac{1}{3}\left[2 + \ln\frac{(-E_1^3)}{4}\right]$$

Константа интегрирования найдена из асимптотики при $\varphi \to -\infty$. Точка излома соответствует особой точке $u = -1$, следовательно, $\varphi^* = -c$. Далее положим $E_1 = -(2/e)^{2/3} \approx -0{,}815$, в результате будем иметь $\varphi^* = 0$.

Построенное решение имеет простую геометрическую интерпретацию. Уравнение (11) дает формулу Кристофеля – Шварца

$$\chi = \frac{1}{3}\int_{-1}^{u} d\xi \frac{\sqrt{1+\xi}}{\xi} \tag{12}$$

осуществляющую конформное отображение нижней полуплоскости u на многоугольник в плоскости χ, изображенный на фиг. 1. Формула $u = S_1^3$ осуществляет конформное отображение клина в плоскости S_1 (см. фиг. 1, *в*) на нижнюю полуплоскость u.



Фиг. 2. Форма свободной поверхности и линии тока при стекании жидкости на криволинейной стенке

Интегрируя следствие из (10) $d(S_3 + \chi) = d\ln S_1$ и учитывая условия на левой бесконечности, получим $S_3 + \chi = \ln(S_1/E_1)$. Следовательно, искомое конформное отображение находится по формуле

$$\chi + W = S_1 + \ln(S_1 / E_1) \tag{13}$$

Формулы (12), (13) и $u = S_1^3$ в неявном виде дают зависимость $W(\chi)$.

Найдем, например, форму свободной поверхности. Видно из рисунков, что на свободной поверхности AC $S_1 = -Qe^{i\pi/3}$, где Q – положительный вещественный параметр, меняющийся от 0 до ∞. Подставив это значение S_1 в (13) и взяв затем реальную и мнимую части, получим параметрическую запись уравнения свободной поверхности

$$x = \left[-\frac{3}{2\pi}Q + \frac{3}{\pi}\ln\frac{Q}{(-E_1)}\right],\quad y = \left[1 - Q\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right]\quad (Q \geqslant 0)$$

Здесь $x = X/h_0$, $y = Y/h_0$. Форма свободной поверхности, даваемая этими формулами, а также линии тока изображены на фиг. 2.

Получили решение, соответствующее стеканию жидкости по криволинейной стенке. Простых явных формул для формы стенки не существует. Первоначально при $\varphi < \varphi^*$ стенка прямолинейна и горизонтальна. В окрестности особой точки (поместим ее в начало координат $Z = 0$) решение имеет вид: $Z \sim \chi^{4/3}e^{-i\pi/3}$ (с положительным коэффициентом). Следовательно, стенка имеет излом с внутренним углом 120°. Далее при увеличении φ стенка уже криволинейна, хотя при $\varphi \to \infty$ она опять становится прямолинейной и наклоненной к вертикали под углом 30°.

Заключение. Найдено однопараметрическое семейство течений, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Для числа Фруда $3^{3/4}\pi^{-1/2}$ =

= 1,2861 система состоит из трех уравнений и решается в квадратурах. В результате получается течение, которое может использоваться для приближенного описания задачи о водопаде. Для других чисел Фруда система уравнений состоит из большего количества уравнений и было бы весьма полезным исследовать ее в этом случае.

Работа выполнена в рамках интеграционного проекта СО РАН № 43 "Исследование поверхностных и внутренних гравитационных волн в жидкости".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // Math. and Phys. Papers. Cambridge: Univ. Press, 1880. V. 1. P. 197–229.
2. *Жуковский Н.Е.* Определение движения жидкости при каком-нибудь условии, данном на линии тока // Журн. Русск. физ.-хим. о-ва. 1891. Т. 23. Вып. 2. С. 89–100.
3. *Richardson A.R.* Stationary waves in water // Phil. Mag. 1920. V. 40. № 6. P. 97–110.
4. *Villat H.* Sur l'écoulement des fluides resants // Ann. Sci. École Norm. supér. 1915. V. 32. № 3. P. 177–214.
5. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
6. *Daboussy D., Dias F., Vanden-Broeck J.-M.* On explicit solutions of the free-surface Euler equations in the presence of gravity // Phys. Fluids. 1997. V. 9. № 10. P. 2828–2834.
7. *Карабут Е.А.* К задаче об уединенной волне на поверхности жидкости // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 3. С. 339–341.
8. *Карабут Е.А.* Суммирование ряда Вайтинга в задаче об уединенной волне // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36. № 2. С. 328–347.
9. *Karabut E.A.* Asymptotic expansions in the problem of a solitary wave // J. Fluid Mech. 1996. V. 319. P. 109–123.
10. *Witting J.* On the highest and other solitary waves // SIAM J. Appl. Math. 1975. V. 28. № 3. P. 700–719.
11. *Карабут Е.А.* Семейство точных решений, близких к гравитационным волнам максимальной амплитуды // Докл. РАН. 1995. Т. 344. № 5. С. 623–626.
12. *Karabut E.A.* An approximation for the highest gravity waves on water of finite depth // J. Fluid Mech. 1998. V. 372. P. 45–70.

Новосибирск

Поступила в редакцию
18.III.1998