

УДК 532.529.2:536.25

© 1999 г. П.Т. ЗУБКОВ, В.Г. КЛИМИН

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ЧИСТОЙ ВОДЫ ВБЛИЗИ ТОЧКИ ИНВЕРСИИ ПЛОТНОСТИ

Изучено поведение чистой воды в квадратной ячейке. Проанализированы стационарные решения и их количество в зависимости от числа Gr при постоянном числе Pr, зависимость тепловых потоков на верхней и нижней границах от времени Fo при постоянных числах Gr и Pr, эволюционное развитие конвективного движения в зависимости от начальных условий.

Одними из первых численных исследований по изучению естественной конвекции в холодной воде были работы [1, 2], в которых численно решена задача естественной конвекции в квадратной ячейке, подогреваемой снизу. Было установлено, что при фиксированном числе Грасгофа существует либо симметричное, либо несимметричное движение воды. Впоследствии в [3] показано, что возможно существование еще одного симметричного движения, но не рассмотрены области существования каждого из типов движения жидкости. В [1, 3] использовалась квадратичная зависимость плотности воды вблизи максимума плотности.

1. Постановка задачи. Численно исследуем конвективное движение чистой воды в квадратной ячейке при температуре, близкой к $T_m = 4$ °С. При этой температуре воды имеет максимум плотности. Вертикальные стенки ячейки теплоизолированы, нижняя и верхняя стенка поддерживаются при постоянных температурах $T_1 = T_m - T_0$ и $T_2 = T_m + T_0$ соответственно ($|T_0| \leq 4$ °С). Таким образом, одновременно решаются две задачи с симметричными граничными условиями. Конвективное движение изучается в приближении Буссинеска. Зависимость плотности воды от температуры аппроксимируется формулой Гебхарта – Моллендорфа [4]

$$\rho(T) = \rho_m(1 - \gamma |T - T_m|^b), \quad \gamma = 0,793953 \cdot 10^{-5} ((^\circ\text{C})^{-b}), \quad b = 1,894816$$

где ρ_m – плотность воды при температуре T_m , γ – коэффициент температурного расширения.

В декартовой системе координат обезразмеренную систему уравнений представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial Fo} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial V}{\partial Fo} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \text{Gr} | \Theta |^b \\ \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$X = \frac{x}{L}, \quad U = \frac{uL}{\nu}, \quad \text{Fo} = \frac{t\nu}{L^2}, \quad \Theta = \frac{T - T_m}{T_2 - T_1}$$

$$P = \frac{(p + \rho_m gLY)L^2}{\rho_m \nu^2}, \quad \text{Gr} = g\gamma L^3 \frac{|T_2 - T_1|^b}{\nu^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = 11,59$$

где Gr и Pr – безразмерные числа Грасгофа и Прандтля, L – размер стороны ячейки, g – ускорение свободного падения, ν – кинематическая вязкость, α – коэффициент температуропроводности, (U, V) – безразмерные компоненты вектора скорости, (X, Y) – безразмерные координаты, Θ – безразмерная температура, P – безразмерное давление.

Граничные условия

$$U = V = 0, \quad Y = 0; \quad Y = 1; \quad X = 0; \quad X = 1$$

$$Y = 0: \quad \Theta = 0,5; \quad Y = 1: \quad \Theta = -0,5 \quad (1.2)$$

$$X = 0, \quad X = 1: \quad \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0$$

Рассматриваем четыре типа начальных условий для $\Theta(U_0 = V_0 = 0)$

$$\Theta_0 = -0,5 + X; \quad \Theta_0 = 0,5 - X; \quad \Theta_0 = -0,5; \quad \Theta_0 = 0 \quad (1.3)$$

Система уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2) допускает аналитическое стационарное решение

$$U = V = 0, \quad \Theta = 0,5 - Y, \quad P = \text{Gr} \int |\Theta|^b dY + \text{const} \quad (1.4)$$

Это решение при достаточно больших числах Gr неустойчиво.

Заметим, что если $\Theta = \Theta(X, Y)$, $U = U(X, Y)$, $V = V(X, Y)$, $P = P(X, Y)$ является решением системы уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2), то и $\Theta = -\Theta(X, Y)$, $U = U(X, Y)$, $V = V(X, Y)$, $P = P(X, Y)$ будет решением рассматриваемой системы с граничными условиями на горизонтальных стенках

$$Y = 0: \quad \Theta = -0,5; \quad Y = 1: \quad \Theta = 0,5$$

в чем можно убедиться непосредственной подстановкой в систему (1.1).

При этом тепловой поток будет передаваться не снизу вверх, а сверху вниз.

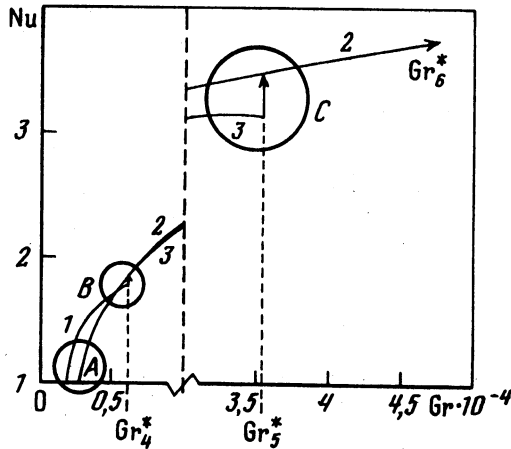
Безразмерные средние тепловые потоки на горизонтальных границах рассматриваемой ячейки определяются как локальные и интегральные безразмерные числа Нуссельта Nu

$$Y = 0: \quad \text{Nu}_{\text{bx}} = \frac{\partial \Theta}{\partial Y}; \quad Y = 1: \quad \text{Nu}_{\text{tx}} = \frac{\partial \Theta}{\partial Y}$$

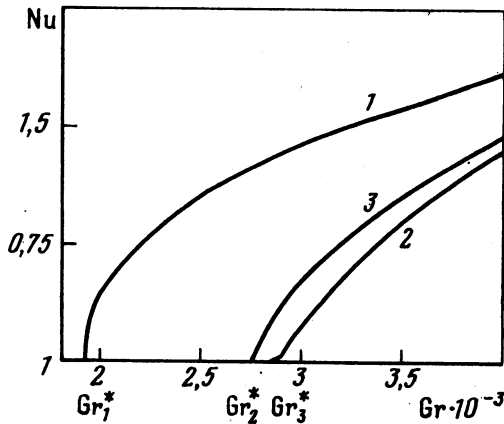
$$\text{Nu}_i = \int_0^1 \text{Nu}_{\text{ix}} dx, \quad i = b, t$$

Исходя из поставленных граничных условий и отсутствия тепловых источников, должно выполняться следующее соотношение: $\text{Nu}_t = \text{Nu}_b = \text{Nu}$. Это условие используется в расчетах как один из критериев выхода на стационарный режим. Расчеты получены на компьютере Pentium-200 методом установления при помощи алгоритма SIMPLER [5] на сетке 91×91 . Один вариант расчета занимал от 20 до 50 ч при шаге по времени $1,26 \cdot 10^{-4}$.

2. Анализ стационарных решений. На фиг. 1 представлены кривые зависимости безразмерных средних тепловых потоков от числа Грасгофа Nu(Gr). Наиболее интересными местами на этом графике являются области A, B и C, отвечающие за развитие конвективного движения и переходы одних типов решений в другие.



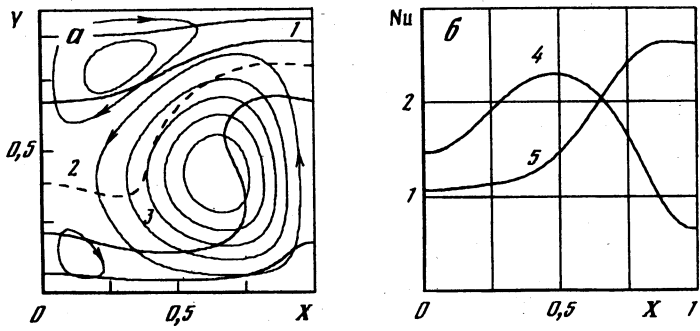
Фиг. 1. Зависимость интегрального числа Нуссельта от числа Грасгофа: 1 – кривая решений первого и второго типа; 2, 3 – кривые решений третьего и четвертого типа; A, B, C – специфические области; $Gr_6^* = 2 \cdot 10^5$



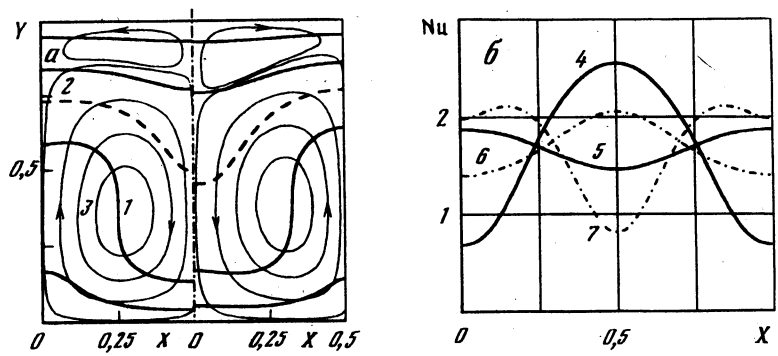
Фиг. 2. Область A. Развитие конвективного движения: 1 – кривая решений первого и второго типа; 2, 3 – кривые решений третьего и четвертого типа; Gr_i^* ($i = 1, \dots, 3$) – критические числа Грасгофа ($Gr \cdot 10^{-3}$) = 1,92; 2,75; 2,85

Рассмотрим область A (фиг. 1, 2). В диапазоне чисел Gr от 0 до Gr_1^* при любом типе начальных условий возможна численная реализация решения, соответствующего аналитическому (1.4) и отвечающего отсутствию конвективного движения. Дадим этому типу решения нулевой номер. На протяжении существования этого решения интегральный и локальный тепловые потоки остаются постоянными и равными единице.

Начиная с критического числа Gr_1^* , становится возможным получение первого и второго типа стационарных решений, симметричных между собой относительно оси $X = 0,5$ (называемых далее несимметричными). Первый тип решений получается при первом начальном условии (1.3), второй тип решений – при втором. В области от Gr_1^*



Фиг. 3. Функция тока, изотермы (а) и локальные числа Нуссельта (б) для $\Theta_0 = 0,5 - X$: 1 - изотермы; 2 - линия инверсии плотности; 3 - функция тока; 4 - Nu_b ; 5 - Nu_t

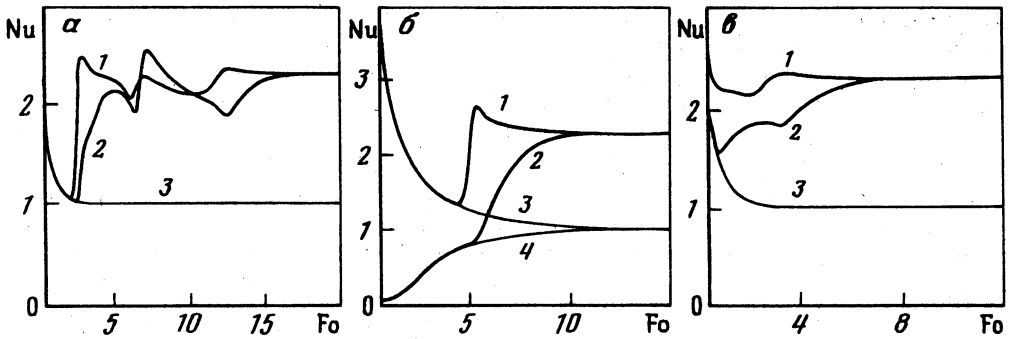


Фиг. 4. Функция тока, изотермы (а) и локальные числа Нуссельта (б) для $\Theta_0 = -0,5$ и $\Theta_0 = 0$. В силу симметрии показана только половина области $0 \leq X \leq 0,5$. 1 - изотермы; 2 - линия инверсии плотности; 3 - функция тока; 4, 5 - Nu_b и Nu_t для $\Theta_0 = -0,5$; 6, 7 (штриховые линии) - Nu_b и Nu_t для $\Theta_0 = 0$

до Gr_2^* третье и четвертое начальные условия приводят к получению решения нулевого типа. Функция тока, изотермы и местные тепловые потоки для решения второго типа приведены на фиг. 3. Во всем диапазоне существования решений первого и второго типов их интегральные тепловые потоки совпадают и на фиг. 1 представлены кривой 1. Возможность получения несимметричных решений в симметрично поставленной задаче является известным фактом и обсуждается в [6]. Из фиг. 3, б видно, что существует область, где плотность теплового потока меньше единицы, т.е. суммарный тепловой поток на нижней грани больше, чем при отсутствии конвекции, но при наличии конвективного движения локальный тепловой поток в определенных местах может быть меньше, чем без конвекции.

Начиная с критического числа Gr_2^* , четвертое начальное условие (1.3) ($\Theta_0 = 0$) дает стационарное решение четвертого типа, при котором вода движется у вертикальных стенок вверх. Характерные функции тока и изотермы представлены на фиг. 4, а (левая половина графика), локальные тепловые потоки - на фиг. 4, б сплошными линиями 4-5.

При $Gr \geq Gr_2^*$ третье начальное условие (1.3) ($\Theta_0 = -0,5$) приводит к получению стационарного решения третьего типа. Функция тока и изотермы, характерные для этого решения, представлены на фиг. 4, а (правая половина графика), а локальные тепловые потоки - на фиг. 4, б штриховыми линиями 6-7.



Фиг. 5. Процесс выхода системы на стационарный режим при $\Theta_0 = 0$ (а); $\Theta_0 = -0,5$ (б); $\Theta = -0,5 + X(\theta)$, зависимость интегрального числа Nu от времени Fo . Кривые: 1 – Nu_b ; 2 – Nu ; 3 – $Nu_b = Nu$, при отсутствии конвекции

Решения третьего и четвертого типов условимся называть симметричными решениями. Интересен тот факт, что касательные к кривым $Nu(Gr)$ в точках начала конвективного движения при Gr_1^* , Gr_2^* и Gr_3^* различны.

В решениях, представленных на фиг. 4, б, также существуют области, в которых плотность теплового потока меньше единицы.

Рассмотрим область В (фиг. 1). Здесь наблюдаются завершение существования несимметричных решений первого и второго типов (кривая 1) и переход их в симметричное решение третьего типа (кривая 2). Как показывают численные эксперименты, интегральный тепловой поток Nu , возраставший до некоторого момента, перед самым переходом с решения на решение начинает резко убывать. Максимальный тепловой поток для этих решений достигается при $Gr = 6,10 \cdot 10^3$ и равен 1,780. В точке Gr_4^* несимметричные решения перестают существовать, т.е. начальные условия первого и второго типов приводят к получению симметричного решения третьего типа. В последней точке существования несимметричных решений $Nu = 1,771$. На интервале значений числа Грасгофа от Gr_1^* до Gr_4^* симметричное решение третьего типа можно получить только искусственным путем. Таким образом, при $Gr \geq Gr_4^*$ возможна реализация только двух решений – симметричных.

В области С (фиг. 1) происходит второй примечательный процесс – в точке $Gr_5^* = 3,9 \cdot 10^4$ перестает существовать решение четвертого типа, перейдя в решение третьего типа. Процесс перехода идентичен описанному ранее. В последней точке существования этого решения $Nu = 3,135$. На всем диапазоне существования реализация симметричного решения четвертого типа возможна только при использовании специальных приемов, например постановка условия симметрии при $X = 0,5$.

Таким образом, симметричное решение третьего типа является наиболее "долгоживущим" и существует вплоть до Gr_6^* , при котором $Nu = 5,353$. Далее начинаются колебательные процессы.

3. Анализ процессов выхода на стационарный режим. Для стационарной задачи без внутренних источников тепла интегральный поток по границе равен нулю, что при адиабатических вертикальных стенках выливается в условие $Nu_b = Nu_t = Nu$, т.е. по поведению $Nu(Fo)$ можно судить о выходе на стационарный режим. На фиг. 5 представлены картины выхода системы на стационарный режим при $Gr = 10^4$ для различных начальных условий.

На фиг. 5, а изображен процесс при начальной температуре $\Theta_0 = 0$. График показывает зависимость интегрального числа Nu от времени Fo . Штриховые кривые соот-

ветствуют процессу теплопереноса при отсутствии конвективного движения. До выхода течения на стационарный режим происходят следующие процессы. До момента $Fo = 1,77$ реализуется симметричное решение, при котором жидкость у вертикальных стенок движется вниз (картина течений качественно та же, что и на фиг. 4, а (правая половина)). Далее, до времени $Fo = 3,09$ симметрия исчезает и течение начинает принимать несимметричный вид, при котором основной вихрь движется против часовой стрелки, а вторичные вихри расположены в левом верхнем углу и у правой стенки. К $Fo = 5,74$ вторичный вихрь, расположенный у правой стенки, подавляется основным течением, а в левом нижнем углу начинает развиваться новый вторичный вихрь, который, возрастая, переходит в основной (см. фиг. 3, а). И течение к моменту времени $Fo = 7,07$ принимает симметричный вид с движением воды у вертикальных стенок вверх (см. фиг. 4, а, левая половина). Таким образом, до наступления стационарности при $Fo = 19,6$ в ячейке успевают реализоваться три типа решения.

На фиг. 5, б представлена картина выхода системы на стационарный режим при $\Theta_0 = -0,5$. С самого начала реализуется симметричное течение, при котором жидкость движется у вертикальных стенок вверх. Со временем течение развивается, отсесняя вторичные вихри вверх, и к моменту времени $Fo = 14,1$ система выходит на стационарный режим, при котором переносимый тепловой поток равен 2,295. Причем выход на стационарный режим произошел раньше, чем при условии отсутствия конвективного движения.

На фиг. 5, в показан результат для случая несимметричных начальных условий $\Theta_0 = -0,5 + X$. В ячейке сразу же реализуется несимметричный тип решений с основным вихрем справа и двумя вторичными слева сверху и слева снизу (качественно – см. фиг. 3, а). К моменту $Fo = 2,64$ вторичный вихрь, расположенный слева внизу, начинает увеличиваться и затем поглощает вторичный вихрь из левого верхнего угла. Течение внутри ячейки начинает приобретать симметричный характер. И при $Fo = 10,6$ реализованное симметричное течение выходит на стационарный режим.

Заключение. В зависимости от диапазона числа Грасгофа существуют от одного до пяти стационарных решений, одно из которых соответствует отсутствию естественно-конвективного движения жидкости. Получены критические числа Грасгофа, определяющие начало двух симметричных и двух несимметричных типов течения, а также числа Грасгофа, при которых течения каждого вида перестают существовать. Построены картины процессов выхода на стационарный режим для различных начальных условий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блохин А.С., Блохина Н.С. Начало конвекции в жидкости вблизи температуры инверсии плотности // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193. № 4. С. 805–807.
2. Блохин А.С., Блохина Н.С., Макеева О.С. Самовозбуждающиеся колебания в жидкости при развитой конвекции // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210. № 1. С. 75–78.
3. Gorelikov A.V., Klimin V.G., Zubkov P.T. Natural convection of water near to density inversion point // Proc. Intern. Conf. on Fluid Engineering. Tokyo. 1997. V. 3. P. 1617–1621.
4. Gebhart B., Mollendorf J.C. A new density relation for pure and saline water // Deepsea Res. 1977. V. 24. № 9. P. 831–848.
5. Патанкар С. Численные методы задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 150 с.
6. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.