

УДК 532.516.5

© 1999 г. В.И. ГРАБОВСКИЙ

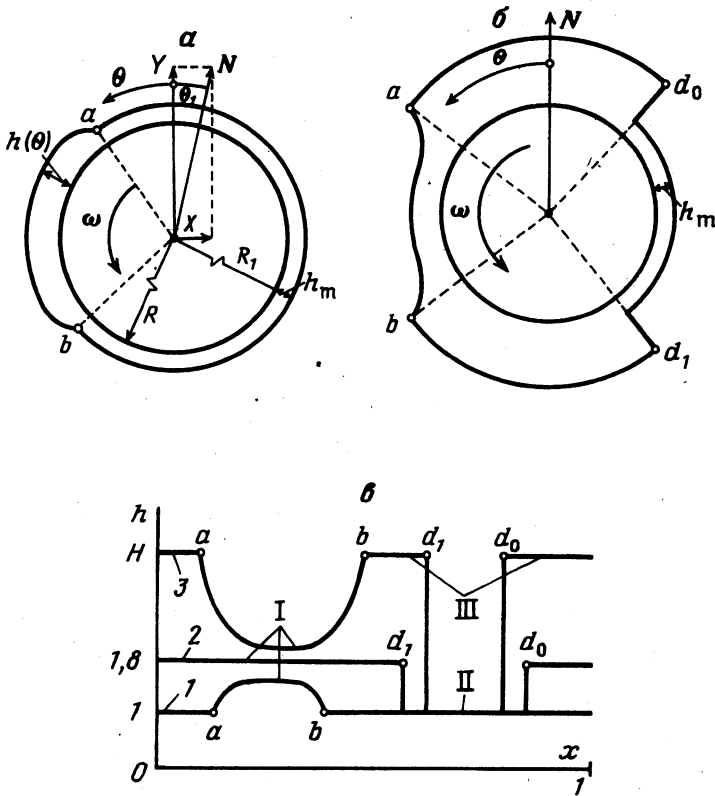
## ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОФИЛИРОВАНИЕ ЗАЗОРА РАДИАЛЬНОГО ПОДШИПНИКА С МАКСИМАЛЬНОЙ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТЬЮ ПРИ ЗАДАННОЙ В НЕМ МАССЕ ЖИДКОСТИ

В приближении несжимаемой жидкости сформулирована и решена модифицированная задача Рэлея оптимального профилирования внешних обводов зазора гидродинамического радиального подшипника. Если в обычной задаче Рэлея оптимальный подшипник обеспечивает абсолютный максимум коэффициента несущей способности  $C_{NR}$ , при этом в зазоре заключена жидкость массой  $M_R$ , то в модифицированной задаче Рэлея он обеспечивает максимум  $C_N$  при заданной массе жидкости в зазоре подшипника  $M$ , отличной от  $M_R$ , и при этом всегда  $C_N \leq C_{NR}$ . Установлена структура оптимальных решений модифицированной задачи. Теоретический анализ иллюстрируется результатами расчета.

Гидродинамические радиальные подшипники широко применяются в различных приложениях (см. [1, 2]). Многие методы их прямого расчета описываются в монографии [1] с анализом постановок задач и, в частности, разнообразных граничных условий. Эти условия всегда содержат условия периодичности и непрерывности давления при обходе по периметру подшипника. В [1] указаны также дополнительно три основных физических условия для случаев «длинных» и «коротких» подшипников. Для длинных подшипников ( $l \gg R$ , где  $R$  – радиус вала подшипника, а  $l$  – его длина) движение жидкости вдоль вала несущественно. Отмечается, что можно фиксировать давление в некотором сечении зазора (в питающей канавке), предполагая в этом месте связь с внешней средой. Однако для жидкостных подшипников это оправдано лишь для смешанного типа подшипника – статического-гидродинамического. Для гидродинамического подшипника давление задавать не нужно [7]. Можно использовать, например, интегральное условие – условие сохранения массы жидкости в зазоре подшипника [1].

В коротких подшипниках ( $l \sim R$ ) необходимо учитывать утечки жидкости через боковые стенки подшипника, при этом давление фиксируется лишь вне подшипника со стороны боковых стенок. При отсутствии утечек через боковые стенки можно также применить условие сохранения массы жидкости в подшипнике.

Для выяснения роли условия сохранения массы при построении оптимальных подшипников сформулируем и исследуем следующую оптимизационную задачу. Определим форму зазора радиального жидкостного подшипника, обеспечивающую максимум его несущей способности при заданной массе жидкости в этом зазоре. Назовем ее модифицированной задачей Рэлея (задача 2) в отличие от обычной задачи Рэлея для радиальных подшипников (задача 1), где определяется оптимальный подшипник с абсолютным максимумом несущей способности среди всех возможных значений масс жидкости в его зазоре [3–6]. Причем последний характеризуется определенным значением массы жидкости  $M_R$  и разрывной высотой зазора  $h_R$  с участком двустороннего экстремума (участок I), участком краевого экстремума (участок II), связанного с нижним ограничением на высоту зазора ( $h_R \equiv 1$ , где  $h$  отнесено к минимально



Фиг. 1 Оптимальные радиальные подшипники:  $a - M < M_R$ ,  $b - M > M_R$ ,  $\sigma$  - кривая  $1 - M < M_R$ ,  $2 - M = M_R$ ,  $3 - M > M_R$

допустимой по постановке задачи высоте  $h_m$ ), и участком краевого экстремума (участок III), связанного с верхним ограничением на  $h(h_R \equiv H)$  [7]. Для жидкостных подшипников участки I и III "одновременно" не существуют. Отметим, что нижнее ограничение является физическим условием и выставляется всегда в задачах на максимум несущей способности подшипника, а верхнее ограничение не всегда существенно.

1. Пусть  $r, \theta, z$  - цилиндрические координаты с осью  $z$ , направленной по оси вала (шпира) бесконечного подшипника. Вал радиуса  $R$  вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ . Поверхность вала движется со скоростью  $U = R\omega$ . Образующая неподвижного цилиндрического основания подшипника (фиг. 1, а) дается уравнением  $r = R_1(\theta)$ . Высота зазора  $h(\theta) = R_1(\theta) - R$  такова, что  $0 < h \ll R$  (на фиг. 1 зазоры изображены в увеличенном масштабе). С учетом этого в переменных  $x = \theta(2\pi)^{-1}$  и  $y = r - R$  ( $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq h$ ) уравнения, описывающие течение жидкости в зазоре в приближении смазки, совпадают с уравнениями течения в зазоре плоского ползуна, движущегося над бесконечной плоскостью [1]. Различия состоят лишь в части граничных условий и в выражениях для сил. Отметим, что координата  $x$ , как и  $\theta$ , - периодическая. Форму зазора определяет его "верхняя" граница  $h(x)$ , образующая основание подшипника. В общем случае  $h(x)$  может иметь "ступеньки" при  $x = x_{d_i}$ . Величинам в сечениях  $a, b, d_i$  (см. фиг. 1), являющихся границами разных участков оптимальности, будем приписывать соответствующие нижние индексы, а если они разрывные (в сечениях  $d_i$ ), то до (после) них по направлению вращения - дополнительный индекс минус (плюс). Вязкость жидкости  $\mu$  и ее плотность  $\rho$  постоянны.

Введем безразмерные переменные. Примем за масштаб переменной  $r$  радиус вала

$R$ , за масштаб координат  $y$  и  $h$  – минимально допустимую высоту зазора  $h_m$ , а за масштаб окружной компоненты скорости  $u$ , плотности и давления  $p$  – соответственно размерные  $U$ ,  $\rho$  и  $\gamma U^2$  с безразмерным комплексом

$$\gamma = 12\pi R\mu(\rho h_m^2 U)^{-1} = 12\pi\mu(\rho h_m^2 \omega)^{-1} = 6\mu(\rho h_m^2 n)^{-1}$$

где все величины размерные,  $\omega = 2\pi n$ , а  $n$  – число оборотов вала в единицу времени.

В рамках теории смазки при кусочно-непрерывной функции  $h(x)$  давление – непрерывная функция  $x$ . Ниже уравнение для  $p$ , получающееся из уравнений Рейнольдса и неразрывности и граничных условий для скорости (условий прилипания и непротекания на стенках), используется в двух формах [7]

$$L \equiv h - q - p'h^3 = 0, \quad q = 2Q \equiv 2 \int_0^h u dy \quad (1.1)$$

или

$$p' = (h - q)h^{-3} \quad (1.2)$$

Здесь  $Q$  – безразмерный расход смазки через зазор, а штрих обозначает дифференцирование по  $x$ . Для любой заданной кусочно-непрерывной функции  $h(x)$  постоянная  $q$  подбирается такой, чтобы выполнялось условие периодичности давления

$$p(0) = p(1) \quad (1.3)$$

При решении задачи 1 в [3–6] давление  $p_d$  в одном из сечений скачка  $h$  считалось заданным. В этом, однако, как показано в [7], для жидкой смазки нет необходимости.

Пусть  $Y$  и  $X$  – размерные вертикальная и боковая компоненты силы  $N$  (фиг. 1, а), действующей на шип из-за неравномерности распределения  $p$  по его поверхности, а  $M$  – масса жидкости, заключенной в зазоре подшипника. Для коэффициентов  $C_Y$ ,  $C_X$  и  $C_M$  имеем

$$C_Y \equiv \frac{Y}{2\pi R\gamma\rho U^2} = -\int_0^1 p \cos\theta dx, \quad C_X \equiv \frac{X}{2\pi R\gamma\rho U^2} = \int_0^1 p \sin\theta dx$$

$$C_M \equiv \frac{M}{2\pi R h_m \rho} = \int_0^1 h dx, \quad \theta = 2\pi x$$

В задачах 1 и 2 ищется такое распределение высоты зазора  $h = h(x)$ , которое при  $p$ , определяемом уравнением (1.2) и условием (1.3), реализует максимум коэффициента несущей способности  $C_N = \sqrt{C_Y^2 + C_X^2}$ ,  $C_Y / C_N = \cos\theta_1$ . В обеих задачах, в согласии с выбором масштаба высоты,  $h$  ограничено снизу и, может быть, сверху

$$1 \leq h(x) \leq H \quad (1.4)$$

с заданной постоянной  $H > 1$ . Отметим частный случай формулировки задачи, когда отыскивается максимум функционала  $C_Y$  при  $C_X = 0$  (т.е.  $\theta_1 = 0$ ) и прежних других условиях.

Для решения сформулированной задачи составим вспомогательный функционал

$$J = C_N + \beta C_M + \int_0^1 \lambda(x) L dx \quad (1.5)$$

в котором  $L$  определено соотношением (1.1),  $\lambda$  – переменный, а  $\beta$  – постоянный множители Лагранжа. Коэффициент  $C_N$  соответствует результирующей силе, действующей на шип и направленной под углом  $\theta_1$ . При  $\theta_1 = 0$  имеем  $C_N = C_Y$  и  $C_X = 0$  (фиг. 1, б). При  $\beta = 0$  модифицированная задача Рэлея переходит в обычную задачу Рэлея для рационального подшипника, т.е. должен быть предельный переход решений одной задачи к решению другой при  $\beta \rightarrow 0$ .

При любом допустимом варьировании  $J$  и оптимизируемого функционала  $C_N$  их вариации совпадают при любых, по крайней мере ограниченных, множителях Лагранжа. Поэтому для оптимального зазора имеем

$$\delta J = \delta C_N \leq 0 \quad (1.6)$$

при любом варьировании  $h$ , которое удовлетворяет ограничениям (1.4).

Проварьировав  $J$  с учетом непрерывности  $p$  в любых характерных сечениях, включая сечения  $d$  возможных скачков  $h$ , и известных правил определения вариаций, придем к выражению для  $\delta J$ , справедливому для любого (необязательно оптимального)  $h(x)$  и пока произвольных ограниченных  $\lambda(x)$  и  $\beta$

$$\delta J = [(\lambda h^3)_+ - (\lambda h^3)_-]_d \Delta p_d + X_d \Delta x_d - \Delta q \int_0^1 \lambda dx + \int_0^1 (A_h \delta h + A_p \delta p) dx \quad (1.7)$$

$$X_d = [\lambda_-(h_- - q) - \lambda_+(h_+ - q)]_d + \beta(h_- - h_+)_d \quad (1.8)$$

$$A_p = -\cos(\theta - \theta_1) + (\lambda h^3)' \quad (1.9)$$

$$A_h = \beta + \lambda(1 - 3h^2 p') \quad (1.10)$$

Здесь  $\Delta p_d$  и  $\Delta x_d$  – разности  $p$  и  $x$  в сечении скачка  $h$  для проварьированного и непроварьированного зазоров, а  $\delta p$  и  $\delta h$  – соответствующие вариации, т.е. разности  $p$  и  $h$  для тех же зазоров при фиксированном  $x$ .

Распоряжаясь произволом в выборе  $\lambda$ , обратим в нуль коэффициент  $A_p$ . Это приведет к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$(\lambda h^3)' - \cos(\theta - \theta_1) = 0, \quad \theta = 2\pi x, \quad \theta_1 = 2\pi x_1 \quad (1.11)$$

справедливому для любого зазора на участках непрерывности  $h$ . В возможных сечениях скачка  $h$  получим условия, связывающие  $\lambda_{d-}$  и  $\lambda_{d+}$ , приравняв нулю множитель при  $\Delta p_d$ , что дает

$$[(\lambda h^3)_+ - (\lambda h^3)_-]_d = 0 \quad (1.12)$$

Ввиду замкнутости подшипника с помощью интегрирования соотношения (1.11) по замкнутому контуру легко показать, что условие (1.12) выполняется во всех сечениях разрыва  $h$ . Поэтому нет необходимости фиксировать давление в этих сечениях.

Уравнения (1.11) и условий (1.12) в возможных сечениях разрыва  $h$  для определения  $\lambda$  недостаточно. Недостающее условие получается приравнением к нулю коэффициента при  $\Delta q$

$$\int_0^1 \lambda dx = 0 \quad (1.13)$$

Пусть функция  $h(x)$  задана. Тогда, интегрируя уравнение (1.2) при  $p(0) = p_0$  ( $p_0$  – любая величина) и подбирая параметр  $q$ , можно удовлетворить условию периодичности для  $p$ :  $p(1) = p(0)$  при циклическом обходе шипа, т.е. решить прямую задачу теории смазки. Затем в решении уравнения (1.11) константу  $\lambda_0$  всегда можно найти из условия (1.13), что даст решение так называемой сопряженной задачи для множителя  $\lambda$ . После этого для произвольного, т.е. необязательно оптимального зазора выражение для вариации  $J$  примет вид

$$\delta J = X_d \Delta x_d + \int_0^1 A_h \delta h dx \quad (1.14)$$

$$X_d = [(\lambda h^3)_- p'_- - (\lambda h^3)_+ p'_+]_d + \beta(h_- - h_+)_d \quad (1.15)$$

где коэффициент  $X_d$  получен из (1.8) с учетом (1.2).

Анализ (1.14), (1.10) показывает, что в общем случае (в задаче 1 и 2) оптимальный зазор может состоять из участков трех типов. Это – два типа краевого экстремума: участок II, на котором  $h \equiv 1$ , и участок III, где  $h \equiv H$ , и один участок двустороннего экстремума I (фиг. 1, в). На участке I высота зазора определяется условием обращения в нуль коэффициента  $A_h$ , т.е. равенством

$$h = 3q\lambda(2\lambda - \beta)^{-1} \quad (1.16)$$

В силу (1.4) на участке II, где  $h \equiv 1$ , допустимые  $\delta h \geq 0$ , а на участке III, на котором  $h \equiv H$ , допустимые  $\delta h \leq 0$ . Тогда, согласно (1.6) (допустимое варьирование высоты оптимального зазора должно вести только к уменьшению  $C_N$ ), условия оптимальности этих участков имеют вид неравенств: на участке II

$$\beta + \lambda(3q - 2) \leq 0 \quad (1.17)$$

и на участке III

$$\beta H + \lambda(3q - 2H) \geq 0 \quad (1.18)$$

Разные участки могут в общем случае стыковаться с разрывом и без разрыва  $h$ . Для оптимальной "разрывной" стыковки необходимо, чтобы в сечении скачка  $h$  обращался в нуль коэффициент при  $\Delta x_d$  из (1.14)

$$X_d = 0 \quad (1.19)$$

В обычной задаче Рэлея, для которой  $\beta = 0$ , из условий (1.19) и (1.12), согласно (1.15), следует, что разрывная стыковка участков I и II возможна только тогда, когда в сечении  $d$  множитель Лагранжа  $\lambda$  обращается в нуль.

Покажем, что в модифицированной задаче Рэлея, когда  $\beta \neq 0$ , участок двустороннего экстремума всегда стыкуется с участками краевого экстремума обоих типов непрерывным образом, т.е. высота зазора в сечениях стыковки – непрерывная функция. Отметим, что непрерывные решения с  $h_- = h_+$  и  $\lambda_- = \lambda_+$  всегда удовлетворяют соотношениям (1.12) и (1.19). Предположим, что есть и решения с разрывом  $h$ . Пусть  $h_+ = 1$ , т.е. после исследуемого сечения находится участок II. До него находится участок I с неизвестной  $h_-$ . Тогда, согласно (1.16) и (1.12), имеем для  $\lambda_-$  и  $\lambda_+$

$$\lambda_- = \beta h_- (2h_- - 3q)^{-1}, \quad \lambda_+ = \lambda_- h_-^3 \quad (1.20)$$

Введя для удобства  $z = h_-$  и подставляя (1.20) в соотношение (1.19), получим для определения  $z$  следующее уравнение:

$$\beta(z-1)[z^3(q-1) + z^2(q-1) + z(q+2) - 3q] = 0$$

Легко показать, что у этого уравнения при  $\beta \neq 0$  два мнимых (при  $q > 1$ ) и два действительных корня  $z_{1,2} = 1$ , что говорит о непрерывной стыковке участков I и II. Аналогично можно доказать непрерывность стыковки участков I и III. При  $\beta = 0$  задача 2 переходит в задачу 1, где решение, как указывалось выше, разрывное в сечениях стыковки участков I и II или III и II.

Прежде чем решать сформулированную задачу, рассмотрим две предельные оптимальные формы зазора, связанные с его геометрическими ограничениями:  $h \equiv H$  и  $h \equiv 1$ , когда  $C_N = 0$ , а  $C_M$  в первом случае максимально ( $= H$ ) и во втором минимально ( $= 1$ ) среди всех оптимальных подшипников. Значение коэффициента массы жидкости, заключенной в зазоре других оптимальных подшипников, находится между этими величинами ( $1 < C_M < H$  и  $1 < C_{MR} < H$ ).

Для обоих предельных случаев решение, вытекающее из (1.11) и (1.13), простое

$$q = h, \quad p = \text{const}, \quad \lambda = (2\pi h^3)^{-1} \sin(2\pi x), \quad h = 1 \text{ или } H$$

Для того чтобы такие зазоры были оптимальными (для соответствующего коэффициента  $C_M$ ), необходимо выполнение условий оптимальности (1.17) или (1.18).

Так как для  $h \equiv H$  имеем  $-(2\pi H^3)^{-1} \leq \lambda \leq (2\pi H^3)^{-1}$  и  $\beta + \lambda \geq 0$ , а для  $h \equiv 1$  имеем  $-(2\pi)^{-1} \leq \lambda \leq (2\pi)^{-1}$  и  $\beta + \lambda \leq 0$ , то для всех других оптимальных подшипников, где  $h \neq \text{const}$ , получается следующий диапазон изменения  $\beta$ :

$$-(2\pi)^{-1} < \beta < (2\pi H^3)^{-1}$$

Напомним, что значение  $\beta = 0$  из этого диапазона соответствует обычному подшипнику Рэлея (задача 1) с максимальной среди всех оптимальных подшипников (с заданной массой жидкости) несущей способностью  $C_{NR}$ , т.е. подшипник Рэлея характеризуется не только определенной несущей способностью, но и определенной величиной рабочей массы жидкости в нем. Подшипник Рэлея подробно исследован в [3–6], где приведены его характеристики. Значение коэффициента массы жидкости Рэлея для такого подшипника  $C_{MR} = 1,5459$  получено в данной работе предельным переходом при  $\beta \rightarrow 0$  в модифицированной задаче Рэлея (задаче 2).

2. Решение задачи 2 получим численно. Интегрирование соответствующих дифференциальных уравнений проводится последовательно по разным участкам оптимальности с учетом условий сшивания решений в сопредельных сечениях, включая и сечение начала расчета  $x = 0$ , где расчет и заканчивается ( $x = 1$ ) после прохода всех возможных участков. Везде должно быть непрерывно давление  $p$ , а высота зазора  $h$  в общем случае может быть разрывной. Возможность построения в задаче 2 как разрывных, так и непрерывных решений принципиально отличает ее от задачи 1, где осуществимы только разрывные формы. Эта возможность появляется из-за участка I, где давление может как расти, так и падать, обеспечивая всюду непрерывность  $p$ .

Согласно уравнениям и граничным условиям, определяемые параметры задачи  $q$ ,  $\beta$  и  $\lambda_0 = \lambda(0)$ , а заданные  $H$ ,  $C_M$ ,  $\theta_1$ , причем всегда полагаем  $\theta_1 = 0$ . Как следует из уравнений, решение задачи не зависит от параметра  $\gamma$  и от  $p_0$  (ввиду линейности уравнения для  $p$ ). Тем не менее необходимо задавать какое-либо значение  $p_0$ , например 0, чтобы провести процедуру поиска оптимальных форм зазоров. Каждому из трех определяемых параметров можно поставить в соответствие условие, которое должно быть удовлетворено при решении. Значению  $\beta$  соответствует заданное значение  $C_M$ . Параметр  $q$  ответствен за выполнение условия периодичности  $p$  из (1.3), а подбор параметра  $\lambda_0$  позволяет удовлетворить необходимому условию (1.13).

Приведем для каждого участка оптимальности систему уравнений, необходимую для решения задачи 2. Участок I

$$h = 3q\lambda(2\lambda - \beta)^{-1}, \quad p' = (h - q)h^{-3}, \quad 2\lambda'(\lambda - 2\beta)(2\lambda - \beta)^{-1} - h^{-3}\cos(2\pi x) = 0$$

участок II

$$h \equiv 1, \quad p' = 1 - q, \quad \lambda' - \cos(2\pi x) = 0$$

и участок III

$$h \equiv H, \quad p' = (H - q)H^{-3}, \quad \lambda' - H^{-3}\cos(2\pi x) = 0$$

На каждом из участков должно выполняться свое условие оптимальности: (1.17) или (1.18). В точке  $x = 0$  фиксируются предварительные значения  $p_0$  и  $\lambda_0$ . Переход от одного участка к другому осуществляется либо при нарушении условий оптимальности (на участках II или III), либо при выполнении условий стыковки (на участке I) разных участков. Таким образом совершается полный оборот по периметру подшипника. Отметим, что алгоритмы расчета и результаты различаются качественно для всех трех случаев:  $\beta < 0$  ( $C_M < C_{MR}$ ),  $\beta = 0$  ( $C_M = C_{MR}$ ) и  $\beta > 0$  ( $C_M > C_{MR}$ ). На участках краевого экстремума имеются аналитические решения уравнений для  $p$  и  $\lambda$

$$p = c_1 + x(h - q)h^{-3}, \quad \lambda = c_2 + (2\pi h^3)^{-1} \sin(2\pi x), \quad h \equiv 1 \text{ или } H$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – константы интегрирования.

$q$	$\beta \cdot 10^2$	$\theta_a/2\pi$	$\theta_b/2\pi$	$\theta_{d1}/2\pi$	$\theta_{d0}/2\pi$	$h_{\max}$	$C_N \cdot 10^2$	$C_M$
1,00	-15	0,19	0,31	-	-	1,0	0,01	1,0
1,02	-10	0,09	0,41	-	-	1,1	0,26	1,02
1,07	-5	0,01	0,49	-	-	1,3	0,77	1,1
1,16	-1	-0,06	0,56	-	-	1,6	1,27	1,3
1,208	0	-	-	0,59	0,91	1,812	1,34	1,546
1,24	0,1	-0,07	0,57	0,61	0,89	3	1,32	1,8
1,515	0,46	0,14	0,36	0,70	0,8	3	0,89	2,7
1,52	0,49	0,18	0,32	0,70	0,8	3	0,87	2,8
1,59	0,57	-	-	0,71	0,8	3	0,82	2,8

3. Исследуем оптимальный подшипник в модифицированной задаче Рэлея. Пусть  $\beta < 0$ , что соответствует  $C_M < C_{MR}$ . Покажем, что в этом случае  $1 \leq h(x) \leq h_R(x)$ , где  $h_R$  отвечает задаче 1. Действительно, на определяющем участке I имеем

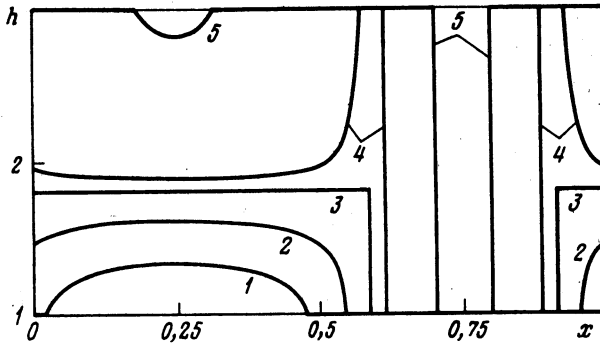
$$h = 3q\lambda(2\lambda - \beta)^{-1} \geq 1$$

Откуда при очевидном  $q \geq 1$  и  $\lambda \neq 0$  (т.е.  $\lambda$  сохраняет знак на участке) и при известном  $\lambda = \beta(2-3q)^{-1} > 0$  в сечении стыковки участков I и II следует, что  $h(x) < 1,5 q = h_R$  на участке I.

Пусть верхнее ограничение не существенно, т.е.  $H > h_R$ , тогда зазор будет содержать два непрерывно состыкованных участка I и II. Некоторые данные построенных таким образом оптимальных подшипников (при  $C_X = 0$ , т.е.  $\theta_1 = 0$ ) отображены в верхних строках таблицы, где  $\beta < 0$ . Один из таких подшипников изображен на фиг. 1,а и схематически кривой  $l$  на фиг. 1,в. Представлены округленные значения, кроме значений без десятичной части. Параметры  $\theta_i$  соответствуют координатам стыковки разных участков, где рвется либо производная функции  $h$  ( $\theta_a$  и  $\theta_b$ , фиг. 1), либо сама  $h$  ( $\theta_{d1}$  и  $\theta_{d0}$ , фиг. 1,б). При  $\beta < 0$  есть только сечения стыковки  $a$  и  $b$ , соединяющие непрерывным образом участки I и II. Прочерки в таблице означают отсутствие соответствующих участков. В таблице приведены также максимальные значения высоты зазора  $h_{\max}$ , которые при  $\beta < 0$  всегда меньше  $h_R$ . Минимальная высота оптимального зазора  $h_{\min}$  во всех случаях равна единице. В последних столбцах отображены несущие способности подшипников и коэффициенты массы жидкости в них. В этой же таблице приведены характеристики оптимальных подшипников при  $\beta > 0$ , которые обсуждаются ниже.

На фиг. 2 показаны оптимальные формы зазоров подшипников, т.е. зависимости  $h(x)$  для  $\beta < 0$  (кривые 1, 2),  $\beta = 0$  (кривая 3) и  $\beta > 0$  (кривые 4, 5). Проследим эволюцию формы зазора при  $C_M \rightarrow C_{MR}$  ( $1 \leq C_M \leq C_{MR}$ ,  $\beta < 0$ ). При  $C_M = 1$  имеем  $h \equiv 1$  и  $C_N = 0$ . С ростом  $C_M$  на границе зазора при  $x = 0,25$  появляется "вздутие" и  $C_N$  становится положительной. Дальнейший рост  $C_M$  сопровождается увеличением указанного вздутия высоты зазора и  $C_N$  (кривые 1, 2 соответствуют  $C_N = 0,008, 0,013$  и  $C_M = 1,1, 1,32$ ). При  $C_M \rightarrow C_{MR}$  ( $\beta \rightarrow -0$ ) форма зазора асимптотически приближается к известной форме Рэлея (линия 3,  $C_{NR} = 0,0134$ ,  $C_{MR} = 1,5459$ ), которая характеризуется двумя разрывами границы зазора (сечения  $x_{d1}$  и  $x_{d0}$ ), соответствующими стыковке участков I, где  $h_R \equiv 1,8$ , и II, где  $h_R \equiv 1$  (на фиг. 1, в – линия 2). В этих сечениях множитель Лагранжа  $\lambda$  должен обращаться в нуль, что является необходимым граничным условием для него в обычной и модифицированной задачах Рэлея при  $\beta = 0$ .

Обратимся теперь к оптимальным подшипникам  $C_M > C_{MR}$  ( $\beta > 0$ ), формы которых имеют существенные качественные отличия от форм рассмотренных выше подшипников при  $\beta < 0$  (см. фиг. 1,б). Некоторые их характеристики при  $H = 3$  представлены в нижней части таблицы. Как оказывается, и для таких подшипников  $C_N < C_{NR}$ , т.е. обычный подшипник Рэлея имеет максимальную несущую способность среди всех



Фиг. 2. Формы оптимальных зазоров  $h(x)$ . Кривые 1, 2 –  $M < M_R$ , 3 –  $M = M_R$ , 4, 5 –  $M > M_R$

оптимальных подшипников с заданной массой жидкости ( $1 < C_M < \infty$ ). Интересно, что при  $C_M > C_{MR}$  высота зазора оптимального подшипника всегда состоит из участков всех трех типов I, II и III, т.е. всегда существенны как нижнее, так и верхнее ограничения (см. фиг. 1, в, кривая 3). Это вызвано особенностями участка I.

Можно показать аналогично рассмотренному выше случаю  $C_M < C_{MR}$ , что при  $C_M > C_{MR}$  всюду в зазоре  $h \geq h_R$ , причем равенство реализуется лишь на участке II. Участок I состыковывается только с участком III (в сечениях  $x_a$  и  $x_b$ ) и, как было показано выше, непрерывным образом. Отсюда следует, что участок II может состыковываться только с участком III и с разрывами  $h$  в сечениях  $x_{d1}$  и  $x_{d0}$ . Необходимые при решении задачи условия для  $\lambda$  на этих разрывах вытекают из (1.12), (1.15) и (1.19). Например, для разрыва  $x_{d1}$  (см. фиг. 1, б, в) имеем разрывное значение множителя Ларанжа  $\lambda$

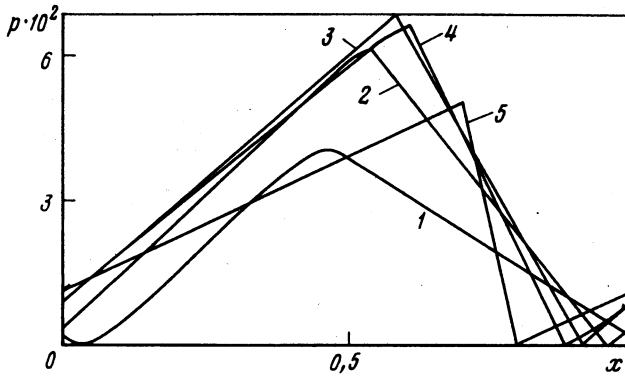
$$\lambda_{d1-} = \beta(1-H)[(H-q) + H^3(q-1)]^{-1} < 0, \quad \lambda_{d1+} = \lambda_{d1} H^3 < 0$$

Аналогичное условие имеется и для второго разрыва  $x_{d0}$ . Таким образом, решение задачи 2 при  $C_M > C_{MR}$ , как и решение задачи 1, характеризуется разрывной высотой зазора с двумя ступеньками, но с разрывным в них множителем Лагранжа  $\lambda$ . На фиг. 2 такие оптимальные формы для  $H = 3$  показаны кривыми 4, 5 с соответствующими значениями  $C_N = 0,013, 0,009$  и  $C_M = 1,79, 2,78$ . Деформация оптимального зазора с ростом  $C_M$  (уменьшением  $C_N$ ) характеризуется сокращением участков I, II и соответствующим увеличением участка III. В пределе для фиксированного  $H$  будем иметь  $C_N = 0, q = H$  и  $C_M = H$ . Участок I стягивается в точку при  $x = 0,25$ , а участок II – в точку при  $x = 0,75$  и всюду  $h \equiv H$ . Отметим, что участок I исчезает раньше, т.е. существуют оптимальные зазоры только с участками II и III, внешне похожие на зазор с  $C_M = C_{MR}$ , но с другими протяженностями участков.

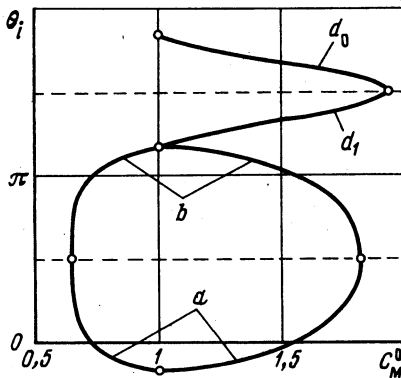
На фиг. 3 для всех оптимальных зазоров из фиг. 2 представлены распределения давления в них при тех же обозначениях. Наибольшая наполненность профиля  $p(x)$  (кривая 3) имеется для решения задачи 1 в соответствии с наибольшим значением несущей способности такого подшипника. Отметим, что максимальные значения  $p$  находятся в сечении  $d_1$  разрыва  $h$ , а минимальные – в сечении разрыва  $d_0$ . При непрерывных границах зазора (при  $C_M < C_{MR}$ ) максимальные и минимальные значения  $p$  соответствуют сечениям стыковки участков I и II. Напомним, что для несжимаемой жидкости нет необходимости фиксировать давление в какой-либо точке, поэтому каждая кривая фиг. 3 построена относительно своего минимального значения.

На фиг. 4 представлены угловые координаты  $\theta_i, i = a, b, d_1$  и  $d_0$ , соответствующие границам разных оптимальных участков при различных приведенных массах жидкости в подшипнике  $C_M^0 = C_M/C_{MR}$ . Кривые слева от точки  $C_M^0 = 1$  отвечают оптимальным

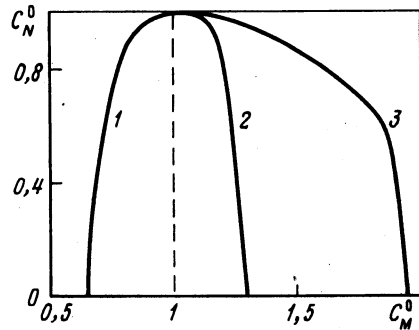




Фиг. 3. Распределение давления по периметру оптимальных подшипников. Обозначения соответствуют фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 4. Угловые координаты концов участков оптимальности I, II и III для подшипников с разной приведенной рабочей массой жидкости  $C_M^0$

Фиг. 5. Зависимость приведенной несущей способности оптимальных подшипников  $C_N^0$  от приведенной массы жидкости в нем  $C_M^0$  при разных  $H$ . Кривая 1 –  $H$  – любое, 2 –  $H = 2$ , 3 –  $H = 3$

подшипникам при  $C_M < C_{MR}$ , а справа – при  $C_M > C_{MR}$ . Показанные зависимости соответствуют  $H = 3$ . Схемы оптимальных зазоров с различными типами участков и их граничными точками  $\theta_i$  показаны на фиг. 1, в, где участки от точки  $a$  до точки  $b$  – участки I, от  $d_1$  до  $d_0$  – участки II, от  $b$  до  $d_1$  и от  $d_0$  до  $a$  – участки III. Графики фиг. 4 соответствуют описанной выше эволюции форм зазоров с ростом  $C_M$  и графикам на фиг. 2. Точки слияния кривых  $a$  и  $b$  или  $d_1$  и  $d_0$  отвечают исчезновению соответствующих участков и, как видно, это происходит в первом случае при  $\theta = \pi/2$ , а во втором – при  $\theta = 3\pi/2$ , причем вне зависимости от величины  $H$ .

На фиг. 5 для всех оптимальных подшипников с заданной массой жидкости построена зависимость их приведенной несущей способности от приведенной массы жидкости в них:  $C_N^0 = C_N^0(C_M^0)$ , где  $0 \leq C_N^0 = C_N/C_{NR} \leq 1$  и  $1/C_{MR} \leq C_M^0 = C_M/C_{MR} \leq H/C_{MR}$  для  $H = 2$  и 3 (т.е. при  $H > h_R$ ). Как указывалось выше, несущая способность таких подшипников изменяется от нуля до максимальной величины  $C_{NR}$ ,

ответающей задаче 1. Коэффициент массы жидкости в зазоре можно выбирать в диапазоне от минимальной величины с  $C_M = 1$  до максимальной  $C_M = H$ . Они соответствуют предельным оптимальным формам с  $C_N = 0$  и  $h \equiv \text{const}$ . Кривая 1 отвечает оптимальным подшипникам при несущести верхнего ограничения, что всегда имеет место при  $H > h_R$  и  $C_M < C_{MR}$ . Правее точки  $C_M^0 = C_N^0 = 1$  имеется веер кривых, выходящих из этой точки и соответствующих разным значениям  $H$ . Две из них показаны на фиг. 5.

**Заключение.** Установлено, что при заключенной в зазоре подшипника массе жидкости  $M < M_R$  высота  $h$  оптимального зазора – непрерывная функция полярного угла  $\theta$ , а при  $M \geq M_R$  – разрывная. В общем случае  $h = h(\theta)$  имеет участки оптимальности трех типов. Два из них – участки краевого экстремума, появляющиеся из-за ограничения на  $h$  снизу и сверху ( $h \equiv 1$  и  $h \equiv H > 1$ ). Третий – участок двустороннего экстремума. На нем высота  $h \neq \text{const}$  и может как уменьшаться, так и возрастать, непрерывно соединяя разные участки оптимальности. При  $M > M_R$  всегда существенны оба ограничения, поэтому имеются оба участка краевого экстремума с двумя разрывами  $h$  в месте их сопряжения. При  $M \rightarrow M_R$  решение модифицированной задачи Рэлея переходит в известное решение обычной задачи Рэлея с двумя ступеньками (разрывами  $h$ ). Несущая способность обычного подшипника Рэлея является максимальной среди всех рассмотренных оптимальных подшипников.

Автор выражает благодарность А.Н. Крайко за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96-01-01825 и 96-15-96158).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Константинеску В.Н.* Газовая смазка. М.: Машиностроение, 1968. 718 с.
2. *Лучин Г.А., Пешти Ю.В., Снопов А.И.* Газовые опоры турбомашин. М.: Машиностроение, 1989. 239 с.
3. *Maday C.J.* The maximum principle approach to the optimum one-dimensional journal bearing // Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol. 1970. V. 92. № 3. P. 482–489.
4. *Rohde S.M.* A demonstrably optimum one-dimensional journal bearing // Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol. 1972. V. 94. № 2. P. 188–192.
5. *McAllister G.T., Rohde S.M.* Optimum design of one-dimensional journal bearings // J. Optimiz. Theory Appl. 1983. V. 41. № 4. P. 599–617.
6. *Болдырев Ю.А., Слесарев М.Е.* Одномерный радиальный газовый подшипник с максимальной несущей способностью // Машиноведение. 1987. № 4. С. 97–103.
7. *Грабовский В.И., Крайко А.Н.* Профилирование зазора радиального подшипника с минимальным моментом сопротивления // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 3. С. 470–480.

Москва

Поступила в редакцию  
15.VI.1998