

УДК 532.592.7

© 1999 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, С.В. НЕСТЕРОВ, А.М. ШМАТКОВ

## СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ

Исследованы собственные значения (частоты) и собственные функции (формы) краевой задачи, описывающей колебания поверхности вращающегося сферического слоя тяжелой идеальной жидкости. С помощью метода ускоренной сходимости проведено высокоточное численное решение задачи Штурма – Лиувилля для уравнения Хафа, имеющего существенные приложения в геофизике – в динамической теории приливов (как морских, так и атмосферных). Расчеты проведены для широкого диапазона определяющих параметров в случае осесимметричных колебаний жидкости на сфере. Полученные численные результаты являются уникальными и неизвестны в научной литературе. Предложенный алгоритм позволяет проводить эффективные вычисления для более общих постановок задач теории динамических приливов (с учетом переменности глубины слоя от широты, для несимметричных приливов, т.е. ненулевых гармоник по долготе, и др.).

Проблема определения собственных частот и форм колебаний поверхности вращающегося сферического слоя жидкости имеет важные приложения в геофизике. Ее решение представляет значительный интерес для динамической теории приливов как в океане, так и в атмосфере [1–3]. Основные задачи определения собственных колебаний приливного типа формулируются на основе классических уравнений гидродинамики достаточно просто (см., например, [1–4]). Однако их решение даже без учета влияния континентов и других существенных факторов весьма затруднено. Подтверждением этому являются указанные монографии и значительное число публикаций, изобилующих чрезвычайно громоздкими аналитическими построениями.

Ниже приводится эффективное численное решение задачи Штурма – Лиувилля для уравнения Хафа [1], которое лежит в основе теории приливов. Оно строится с помощью разработанного авторами экономичного высокоточного метода ускоренной (квадратичной) сходимости [5–7]. Собственные значения (частоты) и функции (формы) вычисляются для широкого диапазона изменения главных определяющих параметров с малой относительной погрешностью ( $10^{-8}$ – $10^{-9}$ ) и могут служить эталоном точных решений при других расчетах.

**1. Постановка задачи.** Следуя [1], приведем краткий вывод уравнения Хафа. На его основе вычисляются собственные частоты и формы колебаний поверхности вращающегося сферического слоя жидкости. Предполагается, что твердый шар радиуса  $a$  покрыт тонким слоем однородной несжимаемой идеальной жидкости постоянной глубины  $h$ ,  $h \ll a$ . Частицы жидкости притягиваются к шару гравитационными силами, ускорение которых равно  $g$ . В силу предположения  $a \gg h$  ускорение сил тяготения  $g$  постоянно во всем слое жидкости.

Считается, что твердый шар и слой жидкости равномерно вращаются с угловой скоростью  $\omega$ , причём  $\omega^2 a \ll g$ . В этом случае равновесная поверхность, имеющая форму эллипсоида вращения, мало отличается от сферической (на относительную величину  $O(m)$ , где  $m = \omega^2 a/g \ll 1$ ). Поэтому в линейном приближении можно далее рассматривать малые переменные отклонения  $\zeta$  свободной поверхности от равно-

весного эллипсоида. Граничные условия задаются на сфере радиуса  $a$ , что приводит к относительно малым погрешностям [1].

Введем на поверхности шара сферическую систему координат с ортами  $e_\theta, e_\varphi$ ; неподвижную декартову ось  $z$  направим на оси вращения шара. Компоненты вектора скорости частиц жидкости вдоль указанных осей сферической системы обозначим через  $v_\theta, v_\varphi$  соответственно. Для отклонения свободной поверхности от равновесной вдоль орта  $e_r$  вводится малая величина  $\zeta$ . В приближении теории длинных волн линеаризованные уравнения гидродинамики в сферических координатах с учетом силы Кориолиса записываются в виде [1]

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} - 2\omega v_\varphi \cos\theta = -\frac{g}{a} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + 2\omega v_\theta \cos\theta = -\frac{g}{a \sin\theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{h}{a \sin\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin\theta) + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

Первые два соотношения системы (1.1) есть уравнения движения, а третье – уравнение неразрывности. Давление в рассматриваемом приближении определяется по закону гидростатики; вертикальной компонентной скорости можно пренебречь. Для дальнейших исследований эти переменные не нужны. Таким образом, система уравнений (1.1) оказывается замкнутой.

Исследование собственных колебаний сферического слоя жидкости проводится стандартным образом [1]. В уравнениях (1.1) полагаем

$$v_{\theta,\varphi} = V_{\theta,\varphi}(\theta, \varphi) \exp(-i\sigma t), \quad \zeta = Z(\theta, \varphi) \exp(-i\sigma t), \quad i = \sqrt{-1}$$

где  $V_{\theta,\varphi}, Z$  – неизвестные функции, а  $\sigma$  – неизвестный параметр, которые подлежат дальнейшему определению. После подстановки этих выражений в систему (1.1) для функции  $Z$  получим

$$4iamfZ \sin\theta = h \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\sin\theta}{f^2 - \cos^2\theta} \left( \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \operatorname{ctg}\theta - if \frac{\partial Z}{\partial \theta} \right) \right] - \quad (1.2)$$

$$-h \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{1}{f^2 - \cos^2\theta} \left( \frac{\partial Z}{\partial \theta} \cos\theta - \frac{if}{\sin\theta} \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \right) \right]$$

Здесь  $f = \sigma/(2\omega)$  – безразмерный неизвестный параметр. Предполагается, что в обеих частях уравнения (1.2) содержатся малые величины одинакового порядка малости. Неизвестные функции  $V_\theta$  и  $V_\varphi$  выражаются через  $Z$  формулами

$$V_\theta = \frac{\omega}{2m(f^2 - \cos^2\theta)} \left( \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \operatorname{ctg}\theta - if \frac{\partial Z}{\partial \theta} \right) \quad (1.3)$$

$$V_\varphi = \frac{\omega}{2m(f^2 - \cos^2\theta)} \left( \frac{\partial Z}{\partial \theta} \cos\theta + \frac{if}{\sin\theta} \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \right)$$

Далее подлежит изучению уравнение (1.2). Для простоты ограничимся случаем осесимметричных колебаний, удовлетворяющих условию  $\partial Z/\partial \varphi \equiv 0$ ; это предположение соответствует нулевой гармонике колебаний по  $\varphi$  [1, 3].

Условимся в отличие от принятых в географии координат отсчитывать угол широты  $\theta$  от "северного полюса"  $\theta = 0$ , т.е. от положительного направления оси  $z$ ; "южному полюсу" отвечает значение  $\theta = \pi$ . Теперь целесообразно ввести новую не-

зависимую переменную  $\mu = \cos \theta$  и представить уравнение (1.2) для определения форм собственных колебаний в виде, не содержащем размерных параметров [1, 3]

$$\frac{d}{d\mu} \left( \frac{1-\mu^2}{f^2-\mu^2} \frac{dZ}{d\mu} \right) + \beta Z = 0, \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad (1.4)$$

$$\beta = 4m \frac{a}{h} \sim 1, \quad 0 < \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2 < \infty$$

Уравнение (1.4) принято называть уравнением Хафа [1]. Оно имеет регулярные особые точки  $\mu = \pm 1$  и дополнительные особые точки  $\mu = \pm |f|$  при  $|f| < 1$ .

Уравнение (1.4) можно преобразовать так, что устранятся особенности при  $\mu = \pm |f|$ . С этой целью вводится новая неизвестная функция  $Y(\mu)$  вместо  $Z(\mu)$  [1]

$$Y(\mu) = \frac{1-\mu^2}{f^2-\mu^2} \frac{dZ(\mu)}{d\mu}, \quad Z(\mu) = -\frac{1}{\beta} \frac{dY(\mu)}{d\mu} \quad (1.5)$$

После формальных преобразований (1.5) уравнение (1.4) принимает стандартный вид

$$\frac{d^2 Y}{d\mu^2} + \beta \frac{f^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} Y = 0, \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad (1.6)$$

Для полученных уравнений (1.4) или (1.6) можно поставить задачи типа Штурма – Лиувилля.

Рассмотрим сферический слой жидкости, ограниченный двумя широтами  $\theta_1, \theta_2$

$$\cos \theta_1 = \mu_1, \quad \cos \theta_2 = \mu_2, \quad \theta_1 > \theta_2, \quad \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2, \quad \mu_1 < \mu_2 \quad (1.7)$$

Поставим задачу найти также значения параметра  $f^2$ , при которых в слое (1.7) существуют нетривиальные решения уравнения (1.4) или (1.6), удовлетворяющие краевым условиям

$$\frac{dZ(\mu_1)}{d\mu} = \frac{dZ(\mu_2)}{d\mu} = 0, \quad Y(\mu_1) = Y(\mu_2) = 0, \quad -1 < \mu_1 < \mu_2 < 1 \quad (1.8)$$

Эти условия, согласно (1.3), обеспечивают на границах слоя равенство нулю нормальной  $V_\theta$  и касательной  $V_\varphi$  составляющих скорости. Границы считаются абсолютно жесткими.

Краевая задача (1.4), (1.8) имеет характер обобщенной задачи на собственные значения  $f_n^2$  и функции  $Z_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) типа Штурма – Лиувилля с граничными условиями 2-го рода, поскольку параметр  $f_n^2$  входит в уравнение (1.4) нелинейным (обобщенным) образом. Модифицированная задача (1.6), (1.8) имеет вид стандартной задачи Штурма – Лиувилля с граничными условиями 1-го рода [4]; она подлежит дальнейшему анализу на основе разработанного авторами численно-аналитического метода ускоренной сходимости [5–7].

Особый интерес представляет исследование регулярной особенности, когда величины  $\mu_1, \mu_2$  порознь или вместе достигают своих предельных значений  $\mu_1 = -1, \mu_2 = 1$ .

Рассмотрим важный предельный случай задачи, когда жидкость целиком покрывает вращающийся шар, т.е. слой жидкости включает "северный" ( $\mu_2 = 1$ ) и "южный" ( $\mu_1 = -1$ ) полюсы. Требуется найти значения параметра  $f^2$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения (1.4) или (1.6), удовлетворяющие условиям ограниченности в точках  $\mu = \pm 1$ . Для численной реализации метода ускоренной сходимости, как показали многочисленные расчеты аналогичных задач, регулярные осо-

бые точки представляют известные затруднения при приближении  $\mu_1 \rightarrow -1$ ,  $\mu_2 \rightarrow 1$  вследствие сингулярности указанных уравнений. Эти трудности могут быть преодолены после детального численно-аналитического исследования возможности перехода к предельным значениям с требуемой точностью. Ниже излагаются результаты расчетов задачи (1.6), (1.8) для достаточно широкого диапазона допустимых значений  $\mu$ :  $\mu_1 = -0,99$ ,  $\mu_2 = 0,99$ .

**2. Решение задачи на собственные значения и функции.** Для высокоточного численного решения задачи Штурма – Лиувилля с краевыми условиями 1-го рода (1.6), (1.8) применим разработанный авторами эффективный алгоритм ускоренной сходимости в сочетании с методом продолжения по параметру [5–7]. С этой целью приведем нормировкой аргумента  $\mu$  эту задачу к стандартному виду [4–7]

$$\begin{aligned} X'' + [\lambda r(x, \mu_1, \mu_2) - \beta q(x, \mu_1, \mu_2)]X &= 0, \quad X = X(x) \\ 0 \leq x \leq 1, \quad X(0) = X(1) = 0, \quad x &= (\mu - \mu_1)(\mu_2 - \mu_1)^{-1} \\ r(x, \mu_1, \mu_2) &= [1 - \eta^2(x, \mu_1, \mu_2)]^{-1}, \quad X(x) \equiv Y(\mu) \\ q(x, \mu_1, \mu_2) &= (\mu_2 - \mu_1)^2 \eta^2(x, \mu_1, \mu_2) r(x, \mu_1, \mu_2) \\ \eta(x, \mu_1, \mu_2) &= \mu_1 + x(\mu_2 - \mu_1), \quad \lambda = \beta(\mu_2 - \mu_1)^2 f^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь штрих означает производную по аргументу  $x$ . В соответствии с (1.7)–(1.8) требуется построить системы собственных значений  $\lambda_n(\mu_1, \mu_2)$  и функций  $X_n(x, \mu_1, \mu_2)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Параметр  $\beta$  далее фиксируется; его числовое значение принимается равным  $\beta = 19,648$ , что отвечает для земных условий "средней глубине океана"  $h = 4,5 \cdot 10^3$  м. При необходимости в расчетах этот параметр может варьироваться в значительных пределах ( $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$ ), удовлетворяющих принятым предположениям и, кроме того, быть некоторой функцией  $\theta$  (т.е.  $\mu$  или  $x$ ), например, вследствие переменной  $h$ .

С помощью построенных зависимостей  $\lambda_n(\mu_1, \mu_2)$  по формуле (2.1)

$$f_n^2 = \frac{\lambda_n(\mu_1, \mu_2)}{\beta(\mu_2 - \mu_1)^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

определяется искомая величина относительной частоты  $f_n$  собственных колебаний; величина  $\sigma_n = 2\omega f_n$  (см. (1.2)).

Функции  $\lambda_n, f_n^2$  оказываются симметричными относительно вертикальной плоскости  $\mu_1 = -\mu_2$ , что также очевидно из физических представлений вследствие равноправности "северного" и "южного" полюсов (симметрия относительно экватора). Нетрудно установить, что задача Штурма – Лиувилля не изменится при замене  $\mu \rightarrow -\mu$  или  $\mu_1 \rightarrow -\mu_2$ ,  $x \rightarrow 1 - x$ . Правые концы семейства сечений принадлежат множеству  $\mu_1 = \mu_2$  (диагональ) и лежат на кривых (2.9) (параболах).

Из (2.2) следует, что  $f_n^2 \sim \beta^{-1}(\pi n)^2(1 - \mu_1^2)(\mu_2 - \mu_1)^{-2} \rightarrow \infty$  при  $\mu_1 \rightarrow \mu_2$ . Данное обстоятельство наряду с другими отмеченными выше особенностями уравнения (1.6) затрудняет применение вычислительных методов к соответствующей задаче Штурма – Лиувилля. Этим обусловлена предпочтительность решения стандартной задачи (2.1).

С помощью приведенного асимптотического выражения для  $f_n$  можно получить содержательные в геофизическом аспекте [3] приближенные формулы для искоемых

собственных частот колебаний  $\sigma_n$

$$\sigma_n \approx \pi n \frac{\sqrt{gh}}{a} \frac{(1-\mu_*^2)^{1/2}}{\mu_2 - \mu_1} \approx \pi n \frac{\sqrt{gh}}{a \delta \theta}, \quad \delta \theta = \theta_1 - \theta_2 \quad (2.3)$$

Здесь  $\mu_*$  – любое значение  $\mu$  из промежутка  $[\mu_1, \mu_2]$ , например среднее, причем  $\mu_2 < 1$ ,  $\mu_1 > -1$  (вдали от полюсов). Отсюда следует вывод, что в главном члене разложения по величине, характеризующей ширину слоя  $\delta \theta$ , собственные частоты не зависят от скорости вращения сферы  $\omega$  и широты  $\theta$ . Зависимость от ускорения сил тяготения  $g$ , средней глубины  $h$ , радиуса сферы  $a$  и ширины слоя  $\delta \theta$  отвечает физическим представлениям [1–3].

При  $\mu_2 = -\mu_1$  функции  $X_n$  и  $Y_n$  симметричны относительно  $x = 0,5$  ( $\mu = 0$ ) при нечетном  $n = 1, 3, \dots$  и антисимметричны – при четном  $n = 2, 4, \dots$ ; функции  $X'_n$  и  $Y'_n$  – наоборот. При больших  $n$  ( $n \geq 4$ ) функции  $X_n, X'_n$  близки к полиномам Лежандра [1].

Исходные собственные функции  $Z_n(\mu)$ , согласно (1.5), (2.1), связаны с функциями  $X_n$  следующим образом:

$$Z_n(\mu) = -\frac{1}{\beta(\mu_2 - \mu_1)} X'_n \left( \frac{\mu - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}, \mu_1, \mu_2 \right) \quad (2.4)$$

Как и для собственных значений, вычисления для собственных функций предпочтительнее проводить на основе стандартной задачи (2.1).

Существо метода ускоренной сходимости заключается в последовательном уточнении некоторого известного приближенного значения  $\lambda_n^0(\mu_1, \mu_2)$ . Этот процесс реализуется на основе интегрирования задачи Коши для уравнения (2.1) и определения абсциссы  $\xi_n = \xi_n(\mu_1, \mu_2, \lambda_n^0)$  –  $n$ -го положительного корня функции  $X_n(x, \mu_1, \mu_2, \lambda_n^0)$ .

В качестве меры близости  $\lambda_n^0$  к точному значению  $\lambda_n$  принимается числовой параметр  $\varepsilon_n = 1 - \xi_n$ ; предполагается, что величина  $|\varepsilon_n|$  достаточно мала ( $|\varepsilon_n| \ll 1$ ). Для практических расчетов приемлемым оказывается  $|\varepsilon_n| \sim (0,1 - 0,01)n^{-1}$ . Приближенное значение  $\lambda_n^0$  может быть получено для некоторых  $\mu_1, \mu_2$  с помощью вариационного подхода (принципа Рэля, метода Рэля – Ритца и др.) или метода продолжения по двум параметрам  $\mu_1, \mu_2$  [4–7] (см. ниже).

Итак, пусть для фиксированных значений  $\mu_1, \mu_2$  (и  $\beta$ ) известно приближенное в указанном выше смысле собственное значение  $\lambda_n^0$ . Тогда с погрешностью  $O(\varepsilon_n^2)$

уточненное значение  $\lambda_n^{(1)}$  определяется соотношениями [5, 6]

$$\begin{aligned} \lambda_n^{(1)}(\mu_1, \mu_2) &= \lambda_n^{(0)}(\mu_1, \mu_2) + \varepsilon_n^{(0)} \Lambda_n(\mu_1, \mu_2, \lambda_n^{(0)}), \quad -1 < \mu_1 \leq \mu_2 < 1 \\ \Lambda_n(\mu_1, \mu_2, \lambda_n^{(0)}) &= -X_n'^2(\xi_n^{(0)}, \mu_1, \mu_2, \lambda_n^{(0)}) \|X_n\|^{-2} \\ \xi_n^{(0)} &= \underset{x}{\text{Arg}}_n X_n(x, \mu_1, \mu_2, \lambda_n^{(0)}), \quad \lambda_n^{(0)} = \lambda_n^0, \quad \varepsilon_n^{(0)} = \varepsilon_n \end{aligned} \quad (2.5)$$

В формулах (2.5) символ  $\text{Arg}_n X_n$  означает  $n$ -й положительный корень по  $x$  функции  $X_n$ , которая определяется в результате аналитического или численного интегрирования задача Коши для уравнения (2.1) при  $\lambda = \lambda_n^0$

$$\begin{aligned} X_n'' + [\lambda_n^{(0)} r(x, \mu_1, \mu_2) - \beta q(x, \mu_1, \mu_2)] X_n &= 0 \\ X_n(0) = 0, \quad X_n'(0) &= 1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Операции высокоточного интегрирования и определения корней  $\xi_n$  являются основными и трудоемкими в вычислительном аспекте для излагаемого алгоритма.

Символом  $\|X_n\|^2$  в (2.5) обозначен квадрат нормы функции  $X_n$  с весом  $r$  на интервале  $0 \leq x \leq \xi_n^{(0)}$ , который определяется квадратурой. Согласно [5, 6], эта величина может быть найдена совместным интегрированием уравнения для неизвестной функции  $S_n = \partial X_n / \partial \lambda_n$  с нулевыми данными при  $x = 0$

$$S_n'' + [\lambda_n^{(0)} r(x, \mu_1, \mu_2) - \beta q(x, \mu_1, \mu_2)] S_n = -r(x, \mu_1, \mu_2) X_n$$

$$S_n(0) = S_n'(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \xi_n^{(0)} \quad (2.7)$$

$$\|X_n\|^2 = \int_0^{\xi_n^{(0)}} r(x, \mu_1, \mu_2) X_n^2 dx = X_n'(\xi_n^{(0)}, \lambda_n^{(0)}) S_n(\xi_n^{(0)}, \lambda_n^{(0)})$$

Зависимость функций  $X_n, S_n$  от  $\mu_1, \mu_2$  ( $\beta$ ) в (2.6), (2.7) и далее, где это нужно, не указывается для сокращения записи. Таким образом, процедура уточнения  $\lambda_n$  и соответствующей ему функции  $X_n$  для задачи (2.1) полностью определена соотношениями (2.5)–(2.7). Она может быть рекуррентным образом продолжена по следующей схеме, приводящей к ускоренной (квадратичной) сходимости по  $\varepsilon_n$

$$\lambda_n^{(j+1)} = \lambda_n^{(j)} + \varepsilon_n^{(j)} \Lambda_n(\lambda_n^{(j)}), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Lambda_n = X_n'^2(\xi_n^{(j)}, \lambda_n^{(j)}) \|X_n^{(j)}\|^{-2}, \quad \xi_n^{(j)} = \text{Arg}_n X_n(x, \lambda_n^{(j)}), \quad 0 \leq x \leq \xi_n^{(j)}$$

$$X_n'' + (\lambda_n^{(j)} r - \beta q) X_n = 0, \quad X_n(0) = 0, \quad X_n'(0) = 1 \quad (2.8)$$

$$S_n'' + (\lambda_n^{(j)} r - \beta q) S_n = -r X_n, \quad S_n(0) = S_n'(0) = 0$$

$$1 - \xi_n^{(j)} = \varepsilon_n^{(j)} \sim (c_n \varepsilon_n)^{\kappa(j)}, \quad \kappa(j) = 2^j, \quad c_n = \text{const} \sim 1$$

Эффективным, как показали проведенные многочисленные расчеты, оказывается метод продолжения по параметрам  $\mu_1, \mu_2$ , поскольку при  $\mu_2 = \mu_1$  известно точное решение задачи Штурма – Лиувилля (2.1)

$$\lambda_n(\mu_1, \mu_1) = (\pi n)^2 (1 - \mu_1^2)$$

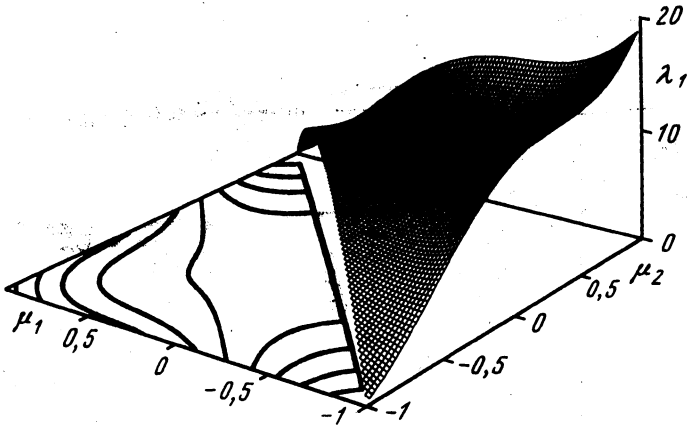
$$X_n = \frac{\sqrt{1 - \mu_1^2}}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \frac{\sqrt{\lambda_n} x}{\sqrt{1 - \mu_1^2}} = \frac{\sin \pi n x}{\pi n}, \quad -1 < \mu_1 < 1 \quad (2.9)$$

Отметим, что при  $\mu_1 = \mu_2$ , т.е. для бесконечно тонкого слоя, исходная задача (1.6), (1.8) вырождается и не имеет физического смысла ( $f_n^2 = \infty$ , см. (2.2), (2.3)).

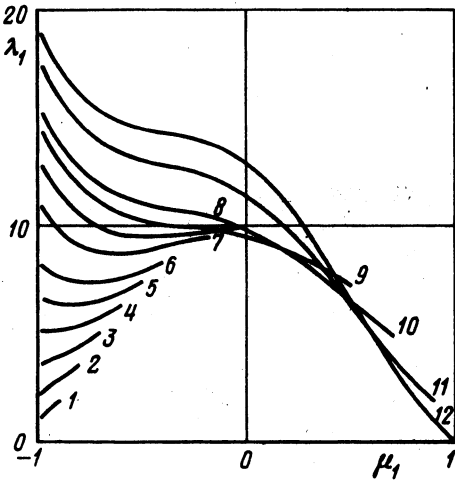
В качестве начального приближения  $\lambda_n(\mu_1, \mu_2)$  при достаточно малом  $(\mu_2 - \mu_1)$  брались значения  $\lambda_n^0 = \lambda_n(\mu_1, \mu_1)$ , получаемые согласно (2.9).

Выполним изложенные выше уточнения значения  $\lambda_n$  (2.9) при  $\mu_2 > \mu_1$  согласно схеме (2.8), для достаточно малого ( $10^{-2}$ – $10^{-4}$ ) смещения  $\mu_2 - \mu_1$  значения  $\mu_2$ . Получим после нескольких итераций (обычно двух–трех) высокоточное с заданной погрешностью  $10^{-8}$ – $10^{-9}$  приближение искомых величин  $\lambda_n, X_n, \|X_n\|$  и др. Предложенный метод оказался весьма эффективным, он превосходит известные по быстродействию, точности, устойчивости и экономичности. Результаты расчетов и анализ полученных решений приведены ниже.

**3. Результаты численных расчетов и их анализ.** Приведем результаты высокоточных расчетов собственных значений  $\lambda_n$ , ортонормированных с весом  $r$  собственных

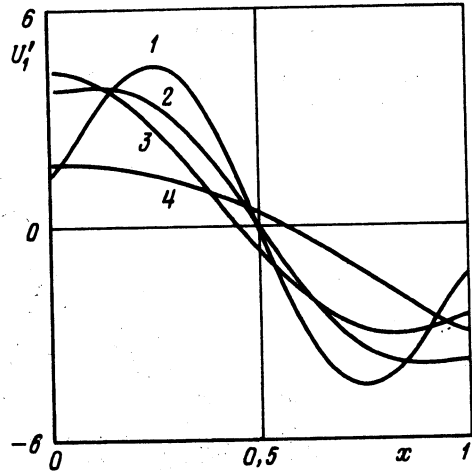


Фиг. 1. Поверхность  $\lambda_1(\mu_1, \mu_2)$  (справа); линии уровня с шагом  $\cdot 2$  (слева)



Фиг. 2

Фиг. 2. Семейство кривых  $\lambda_1(\mu_1)$  для значений параметра  $\mu_2 = -0,9; -0,8; -0,7; -0,6; -0,5; -0,4; -0,2; 0; 0,5; 0,7; 0,9; 0,99$  (кривые 1-12)

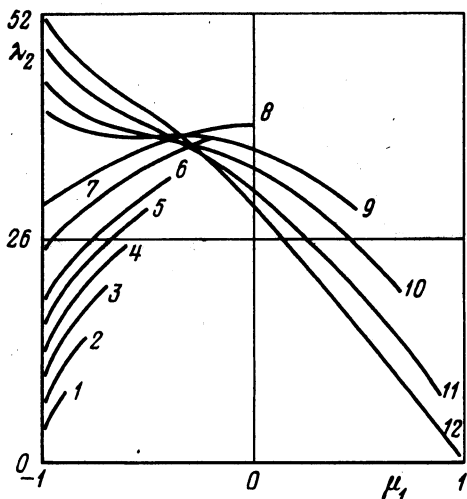


Фиг. 3

Фиг. 3. Функции  $U'_1(x, \mu_1, \mu_2) = X'_1 \|X_1\|^{-1}$ ,  $x = (\mu - \mu_1)(\mu_2 - \mu_1)^{-1}$  для  $(\mu_1, \mu_2) = (-0,99; 0,99); (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}); (0; 0,99); (1/\sqrt{2}, 0,99)$  (кривые 1-4)

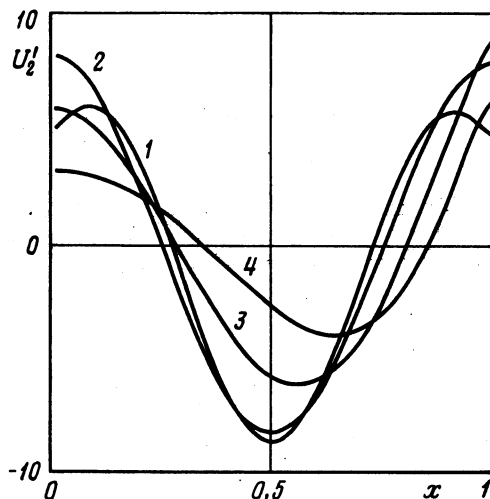
функций  $U_n = X_n \|X_n\|^{-1}$  и производных  $U'_n$  по  $x$  стандартной задачи Штурма – Лиувилля (2.1), полученных с помощью рекуррентного алгоритма (2.8) и метода продолжения по параметрам  $\mu_1, \mu_2$ . Были вычислены  $\lambda_n, U_n, U'_n$  ( $n = 1, 2, \dots, 6$ ) в широких пределах изменения параметров  $\mu_1, \mu_2$  с малой относительной погрешностью  $10^{-8} - 10^{-9}$ . Для проверки достоверности определения  $\lambda_n(\mu_1, \mu_2)$  величины  $f_n^2$  подставлялись в уравнения (1.4) и проводилось интегрирование задачи Коши  $Z_n(\mu_1) = 1, Z'_n(\mu_1) = 0$  до  $\mu = \mu_2$ ; получена невязка  $\sim 10^{-8}$ . Напомним, что функции  $U'_n$ , согласно подстановкам (1.5), (2.1), определяют искомые  $Z_n(\mu)$ .

На фиг. 1-8 приведены собственные значения  $\lambda_{1,2,4}$  и функции  $U'_{1,2,4}$  для значений  $\mu_1, \mu_2$  из области  $-0,99 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq 0,99$ .



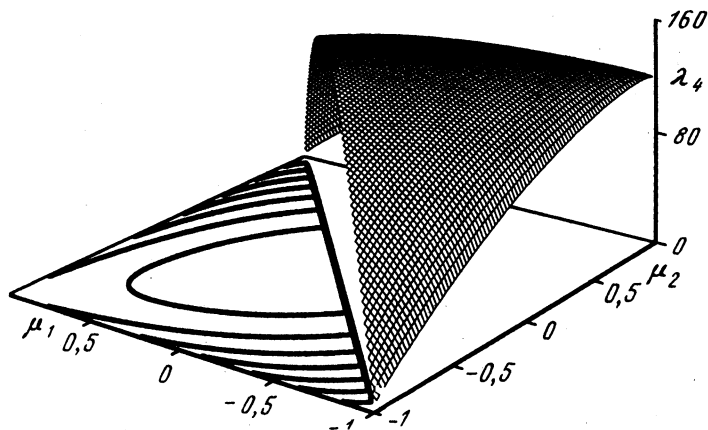
Фиг. 4

Фиг. 4. Семейство кривых  $\lambda_2(\mu_1)$  для тех же значений параметра  $\mu_2$ , что и на фиг. 2



Фиг. 5

Рис. 5. Функции  $U'_2(x, \mu_1, \mu_2)$  для тех же значений  $(\mu_1, \mu_2)$ , что и на фиг. 3



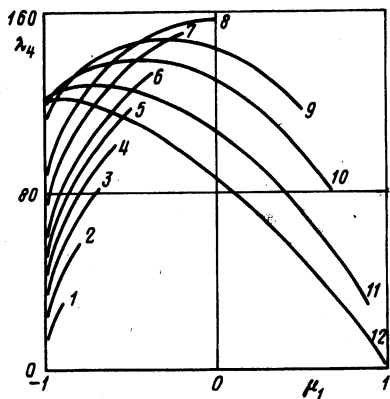
Фиг. 6. Поверхность  $\lambda_4(\mu_1, \mu_2)$  (справа); линии уровня с шагом 20 (слева)

Графики на фиг. 1, 6 определяют поверхности  $\lambda_{1,4}(\mu_1, \mu_2)$  в линейной перспективе; слева от диагонали для наглядности приведены их сечения – линии уровня, проведенные с шагом 2 для фиг. 1 и с шагом 20 для фиг. 6.

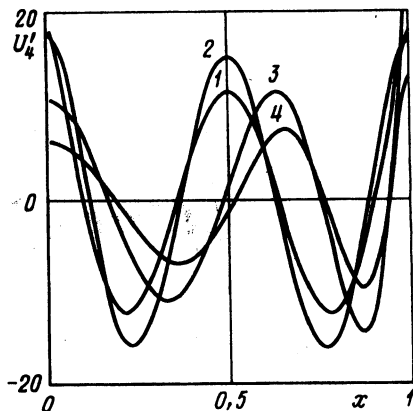
На фиг. 2, 4, 7 даны семейства величин  $\lambda_{1,2,4}(\mu_1)$  как функций аргумента  $\mu_1$ ,  $-0,99 \leq \mu_1 \leq \mu_2$  при фиксированных значениях  $\mu_2$ , которые приведены в подписях. Поверхность  $\lambda_1(\mu_1, \mu_2)$  (фиг. 1) оказывается довольно сложной по сравнению с поверхностью  $\lambda_4(\mu_1, \mu_2)$  (фиг. 6); в частности, ее сечения имеют точки перегиба (фиг. 2). У функции  $\lambda_2(\mu_1, \mu_2)$  эти свойства менее выражены (фиг. 4). Начиная с  $n = 4$  поверхности  $\lambda_n(\mu_1, \mu_2)$  оказываются строго выпуклыми вверх (фиг. 6, 7).

На фиг. 3, 5, 8 показаны соответствующие найденным  $\lambda_n(\mu_1, \mu_2)$  функции  $U'_{1,2,4}(x, \mu_1, \mu_2)$  для характерных значений  $\mu_1, \mu_2$ . Номером 1 помечены кривые для значений  $(\mu_1, \mu_2) = (-0,99; 0,99)$ , что соответствует симметричной области от "южного полюса до северного полюса"; кривым с номером 2 отвечают значения  $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  –





Фиг. 7



Фиг. 8

Фиг. 7. Семейство кривых  $\lambda_4(\mu_1)$  для тех же значений параметра  $\mu_2$ , что и на фиг. 2, 4

Фиг. 8. Функции  $U_4'(x, \mu_1, \mu_2)$  для тех же значений  $(\mu_1, \mu_2)$ , что и на фиг. 3, 5

симметричная сравнительно узкая "приэкваториальная" область. Несимметричные области представлены кривыми 3, 4; кривой 3 соответствуют значения  $(0; 0,99)$  – область от "экватора до полюса", кривой 4 – значения  $(1/\sqrt{2}; 0,99)$  – сравнительно узкая "приполярная" область. Ниже дается сравнительный качественный анализ этих кривых, характеризующих собственные формы колебаний  $Z_n$  для относительных возмущений  $\zeta_n$ .

Отметим основные особенности вычислительного алгоритма, которые, по мнению авторов, будут полезными для специалистов, желающих использовать разработанный метод при расчетах аналогичных задач гидродинамики. С точки зрения численных методов решение задачи по формулам (2.8) сводится к отысканию последовательности значений аргумента  $x$ , при которых  $X_n^{(j)}$  обращается в нуль. Это делалось простейшим методом бисекций, причем на каждом шаге решалась задача Коши методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности с контрольным членом в форме Ингланда.

Продолжение по параметру реализовывалось посредством фиксации значения  $\mu_1$  и изменения значения  $\mu_2$  с некоторым шагом, изменяющимся в зависимости от скорости сходимости. В тех областях значений  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , где искомая функция имела сравнительно большой градиент в направлении, по которому происходило изменение, наблюдалось значительное уменьшение этого шага, что приводило к росту времени счета. Более интересной оказалась необходимость дробить шаг вследствие особенности в точке  $x = 1$  при  $\mu_1, \mu_2 \rightarrow \pm 1$ . Применяемый алгоритм требует возможности решения задачи Коши для исследуемой системы не только при  $x \leq 1$ , но и на некотором отрезке справа от той точки, в которой  $X_n^{(j)}$  обращается в нуль. Небольшая длина этого отрезка и приводила к указанному эффекту. Поверхности (фиг. 1, б) построены с шагом по обоим переменным, приблизительно равным 0,01, что требует вычисления около 5000 значений  $\lambda_{1,4}(\mu_1, \mu_2)$ . Разумеется, действительное количество полученных точек по крайней мере на порядок больше за счет дополнительных вычислений в окрестностях указанной особенности.

Итак, метод ускоренной сходимости при достаточной удаленности исследуемой области от особых точек (в данном случае на величину 0,01 в области параметров  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ), а также при сравнительно небольших градиентах искомой функции в процедуре продолжения по параметру алгоритмически весьма прост, не требует сколько-нибудь значительных дополнительных затрат памяти по сравнению с необходимой для

решения задачи Коши удвоенной по сравнению с исходной размерности и обеспечивает высокую точность (того же порядка, что и решение упомянутой задачи Коши).

В разд. 2, 3 приведено полное численно-аналитическое решение задачи Хафа о симметричных волновых движениях вращающегося сферического слоя жидкости в зависимости от определяющих параметров  $\theta_1, \theta_2, \omega, g, h, a$ . Изучены существенные для гидродинамических приложений низшие моды колебаний  $n = 1, 2, \dots$ . Расчеты проводились для  $n = 1, 2, \dots, 6$ ; графические результаты приведены для  $n = 1, 2, 4$ , что дает достаточно полное представление о частотах и формах колебаний; отметим их основные свойства.

Исследование низших собственных частот  $\sigma_n$  показало, что вдали от полюсов они определяются в основном угловой шириной слоя  $\delta\theta$ , номером гармоник  $n$  и величиной параметра  $(gh/a^2)^{1/2}$  при не очень большой величине  $\delta\theta$ , причем  $\sigma_n \sim 1/\delta\theta$  (см. (2.3)). Зависимость от скорости вращения  $\omega$  и широты северной  $\theta_2$  и южной  $\theta_1$  границ относительно более слабая (см. разд. 2). При приближении слоя к полюсам ( $\theta_2 \rightarrow 0$  или  $\theta_1 \rightarrow \pi$ ) возрастание  $\sigma_n \rightarrow \infty$  при  $\delta\theta \rightarrow 0$  становится несколько более слабым, однако, как следует из высокоточных расчетов и графиков (фиг. 1, 2, 4, 6, 7), тенденция сохраняется. Возрастание ширины слоя или перемещение его к полюсам приводит к уменьшению собственных частот колебаний, что представляется естественным. Более тонкие эффекты, характеризующие зависимость частот колебаний от указанных параметров, связаны с областями выпуклости, перегибами и другими геометрическими свойствами поверхностей  $\lambda_n(\mu_1, \mu_2)$ , приведенными на указанных графиках.

Качественный анализ форм  $Z_n$  собственных колебаний в полном объеме провести весьма затруднительно вследствие большого числа определяющих параметров. Однако расчеты, приведенные для характерных значений параметров  $\mu_1, \mu_2$ , позволяют сделать ряд качественных выводов. Они свидетельствуют о том, что число нулей функций  $Z_n$ , характеризующих относительное возвышение  $\zeta_n$ , соответствует номеру моды колебаний. Для главной моды  $n = 1$ , как следует из фиг. 3, возвышение  $\zeta_1$  невелико вблизи  $x^* \approx 1/2$ , что приводит к значению  $\mu^* = \cos \theta^* \approx 1/2(\mu_2 + \mu_1)$ . В случае симметричных ограничений ( $\mu_1 = -\mu_2$ , кривые 1, 2) это выражение строгое, т.е.  $\theta^* = \pi/2$  (возвышение  $\zeta_1$  на экваторе равно нулю). Экстремумы возвышения  $\zeta_1$  имеют место в промежутках между экватором и границами. При стремлении  $\mu_1 \rightarrow -1, \mu_2 \rightarrow 1$  имеет место резкое уменьшение модуля возвышения вблизи  $\mu \approx \mu_1, \mu \approx \mu_2$ . Для малых значений  $\mu_2 = -\mu_1$  (узкий слой) наибольшие отклонения достигаются практически на границах (полуволна косинусоиды, кривая 2), что отвечает проведенному выше анализу. Если ограничения существенно несимметричны (кривые 3, 4), то экстремумы возвышений смещаются к границам (ближе к полюсу, кривая 4).

Вторая мода колебаний (см. фиг. 5) приводит к двум нулевым значениям относительных смещений  $\zeta_2$  и трем экстремумам, которые сосредоточены вблизи  $x^* \approx 1/2$  и  $\approx 0, 1$ . Относительно узкие симметричные ограничения приводят к полной волне косинусоиды (кривая 2). Наибольшие относительные смещения могут достигаться в середине (кривая 1) или ближе к полюсу (при несимметричных ограничениях, кривые 3, 4).

Дальнейшее увеличение номера моды  $n$  приводит к соответствующему росту числа нулей и относительных экстремумов смещений, которые более резко, чем ранее, растут вблизи полюсов при несимметричных ограничениях (см. фиг. 8, кривые 3, 4). Относительно узкие симметричные (и несимметричные) ограничения приводят к простым собственным формам (близким к косинусоидам).

**Заключение.** С помощью высокоэффективного метода ускоренной сходимости удалось вычислить искомые характеристики с весьма высокой точностью — относительной погрешностью  $10^{-8}$ – $10^{-9}$ . Проведено полное исследование основных свойств колебаний жидкости в зависимости от указанных параметров; обнаружены и описаны

качественные эффекты. Полученные результаты можно использовать в качестве эталона точных решений при расчетах гидродинамических и атмосферных приливов в более полной постановке, в частности с учетом тиссеральных гармоник, переменности толщины слоя, других типов граничных условий.

Авторы признательны А.А. Бармину за конструктивные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96-01-00221, 96-01-00265).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сретенский Л.Н.* Динамическая теория приливов. М.: Наука, 1987. 472 с.
2. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
3. *Чепмен С., Линдзен Р.* Атмосферные приливы. М.: Мир, 1972. 295 с.
4. *Крылов Н.М.* О различных обобщениях метода Ритца и о некоторых соприкасающихся вопросах // Избр. тр. Киев: Изд-во АН УССР, 1961. Т. 1. С. 159–235.
5. *Нестеров С.В., Акуленко Л.Д.* Эффективное решение задачи Штурма – Лиувилля // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 1. С. 44–46.
6. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Определение частот и форм колебаний неоднородных распределенных систем с граничными условиями третьего рода // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 547–555.
7. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Определение собственных частот внутренних волн в существенно неоднородной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 6. С. 112–119.

Москва  
Институт проблем механики РАН

Поступила в редакцию  
21.1.1998