

УДК 532.546

© 1999 г. В.Н. ЭМИХ

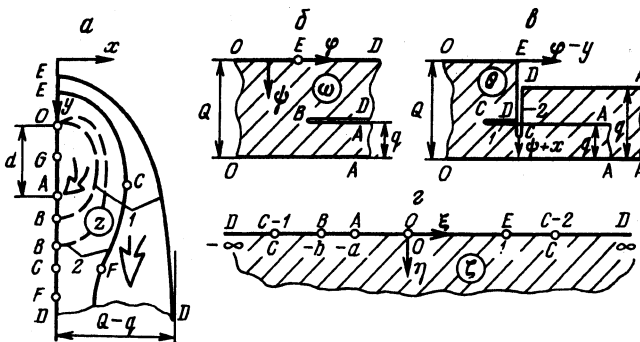
ПЕРЕХВАТЫВАЮЩИЙ ДРЕНАЖ В ПОТОКЕ ИЗ ПОДПОЧВЕННОГО ИСТОЧНИКА

В прямой постановке решена краевая задача о двумерной стационарной фильтрации из подпочвенного источника при частичном или полном перехвате потока горизонтальной дренажной.

В статье [1] (см. также [2, § 25]) изложено решение задачи о перехвате горизонтальной вакуумной дренажной потока грунтовых вод, фильтрующихся с затопленной поверхности орошаемого массива. С гидромелиоративной точки зрения внимания заслуживает также видоизменение этой схемы: дренирование потока из подпочвенных источников орошения. В монографии [3] зависимости между комплексным потенциалом и комплексной координатой течений из систем подпочвенных источников к дренам получены в параметрическом виде с использованием конформных отображений в сочетании с методом источников и стоков. Их количество, расположение и дебиты предполагаются произвольными, однако в общем случае расчеты течений на базе упомянутых зависимостей связаны с трудоемкой процедурой нахождения комплексных параметров отображения при задании комплексных координат источников и дрена. Приведен пример компьютерных числовых расчетов фильтрационного потока из двух источников, частично захватываемого двумя дренами.

Более подробно в [3] рассмотрен случай одиночного источника при работе одиночной перехватывающей дренажной; отмечаются некоторые особенности такого течения. Попытка его моделирования предпринята также в [4]. С этими двумя публикациями и связывается в первую очередь выполненное в настоящей работе полное исследование названной фильтрационной схемы.

1. Построение и гидродинамический анализ решения. На фиг. 1, *a* схематично изображена правая половина области течения, происходящего в условиях свободной фильтрации при совместной работе точечного источника Q и точечного стока A с рас-



Фиг. 1. Области фильтрации (*a*), комплексного потенциала (*б*), функции Жуковского (*в*) и вспомогательная полуплоскость (*г*)

ходами $2Q$ и $2q$. Соответствующие ей области двух аналитических функций комплексной координаты $z = x + iy$: отнесенного к коэффициенту фильтрации комплексного потенциала $\omega = \phi + i\psi$ (ϕ – потенциал скорости фильтрации, ψ – функция тока) и функции Н.Е. Жуковского $\theta = \omega + iz = (\phi - y) + i(\psi + x)$ [5, гл. IV, § 1], представлены на фиг. 1, б и в. Конформно отображая их на полуплоскость $\text{Im } \zeta \geq 0$ при указанном на фиг. 1, з соответствии особых точек, найдем

$$\omega = M \int_1^{\zeta} \frac{(u+b)du}{u(u+a)} + y_E = \frac{Q}{\pi} \ln \zeta - \frac{q}{\pi} \ln \frac{\zeta+a}{1+a} + y_E$$

$$M = \frac{Qa}{\pi b} = \frac{qa}{\pi(b-a)} \quad (1.1)$$

$$\theta = N \int_1^{\zeta} \frac{(u-c)du}{u(u+a)\sqrt{u-1}} = i \frac{2}{\pi} \left(Q \arctg \sqrt{\zeta-1} - q \arctg \frac{\sqrt{\zeta-1}}{\alpha} \right)$$

$$N = -i \frac{Qa}{\pi c} = -i \frac{qa\alpha}{\pi(c+a)}, \quad \alpha = \sqrt{1+a} \quad (1.2)$$

Поясним некоторые детали поведения функции θ вдоль границы, отмеченные на фиг. 1, в. Будем при этом исходить из соотношения

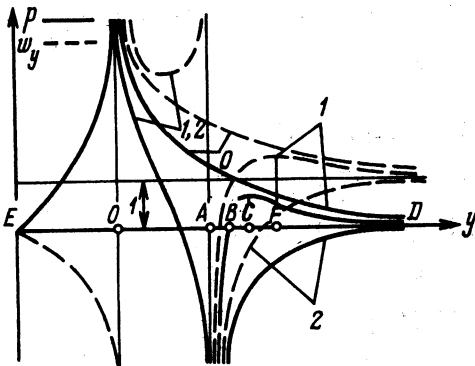
$$\text{Re } \theta = \phi - y = -p \quad (1.3)$$

Здесь p – давление в потоке фильтрующей жидкости, отнесенное к ее удельному весу γ .

В случае $q = 0$, который служит при дальнейшем исследовании отправным, давление, будучи бесконечно большим в точке O , где расположен источник, монотонно убывает при движении вниз вдоль участка OD , асимптотически приближаясь при обусловленной свободной фильтрации к нулевому (атмосферному). При движении от источника вверх давление также убывает от ∞ до 0 в точке E . На фиг. 2 распределение давления вдоль вертикального участка границы EOD схематично изображено сплошной кривой. Штриховая линия характеризует изменение вертикальной составляющей w_y скорости фильтрации $\bar{w} = w_x + iw_y$, а фактически – самой скорости, поскольку вдоль указанного участка имеем $w_x = 0$. Основные детали, характеризующие зависимость $w_y(y)$, будут выявлены в разд. 3 при анализе структуры годографа скорости.

Поведение обеих функций, представленных на фиг. 2, существенно зависит от наличия дренажа, а в определенной степени и от его интенсивности только в интервале OD . Особенности их изменения иллюстрируются здесь соответствующими кривыми; в случае $q = 0$ последние отмечены цифрой 0.

В точке E , где $w_y = d\phi/du = 0$, имеем в силу (1.4) равенство $dp/dy = 1$, определяющее угол $\pi/4$ наклона кривой $p(y)$ в этой точке, причем не только при $q = 0$, но и для всего изучаемого процесса. Физически оно означает, что в достаточно малой окрестности точки E распределение давления в потоке близко к гидростатическому. В рассматриваемом случае отсутствует разрез в области ω , и



Фиг. 2. Графики изменения функций $p(y)$ и $w_y(y)$ вдоль участка $x = 0$ границы области фильтрации

она становится полосой $0 \leq \psi \leq Q$, а область θ превращается в полуполосу $\text{Re } \theta \leq 0$; $0 \leq \text{Im } \theta \leq Q$.

Считая в дальнейшем величину Q фиксированной, проанализируем развитие фильтрационного процесса при возрастании от 0 до Q расхода q дренажного стока A . Начав функционировать, он создает в некоторой своей окрестности отрицательное давление; в самой же точке A имеем $p = -\infty$. Если исходить из того, что давление в любой точке потока, кроме точек O и A , изменяется при варьировании величины q непрерывно, то при ее достаточно малом значении в некотором интервале SD участка AD по-прежнему сохранится положительное давление, достигающее теперь максимума в некоторой точке C указанного интервала. С этим максимумом связан разрез ACD на границе области θ , изображенный на фиг. 1, в под цифрой 1; ею же отмечены кривая депрессии на фиг. 1, а, а также кривые $p(y)$ и $w_y(y)$ в пределах участка OD на фиг. 2.

При определенном увеличении дренажного расхода q точка C , как выяснится в дальнейшем, перейдет (причем уже в ином качестве) на кривую депрессии ED . Не выделяя поэтому знака у ее аффикса c на плоскости ζ , как это сделано для заведомо отрицательных аффиксов точек A и B , будем, однако, иметь в виду, что $c < 0$, если $C \in AD$, и $c > 0$, если $C \in ED$. Заметим, что представление (1.2) для функции θ не зависит от положения точки C .

Перейдем к исследованию решения задачи на описанной выше первой стадии дренирования, для которой $c < 0$.

Из равенств (1.1) и (1.2) для постоянных M и N следует

$$\delta = q/Q = 1 - a/b = (c + a)/(c\alpha) \quad (1.4)$$

При задании в каждом конкретном варианте величин q и Q равенства (1.4) связывают параметры отображения b и c с параметром a . Для определения последнего будем задавать также расстояние d между источником O и стоком A . Исходя из равенства $z = i(\omega - \theta)$ и представлений (4.1) и (4.2), второе из которых предварительно преобразуем для участка EOD ($-\infty < \zeta \leq 1$), и полагая затем в зависимости $u(\zeta)$ последовательно $\zeta = 0, u = y_0; \zeta = -a, u = y_A$, найдем

$$d = y_A - y_0 = \frac{2(Q - q)}{\pi} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + a}}{2} - \frac{q}{\pi} \ln(1 + a)$$

Представим это соотношение в виде

$$F(\alpha) = (1 + \delta) \ln \left[\frac{1 + \alpha}{2} \right] - \delta \ln \alpha = d_0, \quad \delta = \frac{q}{Q}, \quad d_0 = \frac{\pi d}{2Q} \quad (1.5)$$

Условимся относить все линейные величины, связанные с потоком, к величине d , принимая при расчетах $d = 1$. При этом к ней же приведутся в соответствии с (1.5) и фильтрационные расходы Q и q , ранее уже отнесенные вместе с комплексным потенциалом к коэффициенту фильтрации, и в итоге они также окажутся безразмерными.

Из соотношения (1.5) получим с учетом равенства $\alpha = \sqrt{1 + a}$

$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{\alpha - \delta}{2\alpha^2(1 + \alpha)} > 0, \quad \frac{d\alpha}{d\delta} = \frac{2\alpha^2(1 + \alpha) \ln[2\alpha/(1 + \alpha)]}{\alpha - \delta} > 0 \quad (1.6)$$

Обусловленное первым неравенством (1.6) монотонное возрастание функции $F(\alpha)$ обеспечивает однозначную разрешимость уравнения (1.5) относительно параметра a при каждом фиксированном значении δ . В силу второго неравенства (1.6) имеем $a \in [a_0, a_1]$; значения a_0 и a_1 вычисляются из уравнения (1.5) соответственно при $\delta = 0$ и $\delta = 1$ по формулам

$$a_0 = 2s - 1, \quad a_1 = (\sqrt{s} + \sqrt{s - 1})^2; \quad s = \exp(d_0) \quad (1.7)$$

Далее найдем из (1.4)

$$b = a(1 - \delta)^{-1}, \quad c = -a(1 - \alpha\delta)^{-1} \quad (1.8)$$

Отсюда следует, что с ростом величины δ параметр b так же, как и параметр a , монотонно возрастает, а параметр c , будучи отрицательным при достаточно малых значениях δ , монотонно убывает. При этом $c = -\infty$ по достижении величиной δ некоторого значения δ_* , связанного посредством второго равенства (1.8) с соответствующим значением a_* параметра a соотношением $\delta_* \sqrt{1 + a_*} = 1$. С учетом этой связи получим на основе зависимости (1.5)

$$(1 + \delta_*) \ln [(1 + \delta_*)/2] - \ln \delta_* = d_0 \quad (1.9)$$

При любом значении d_0 величина δ_* однозначно определяется из этого уравнения, поскольку его левая часть монотонно убывает от ∞ до 0 при возрастании δ_* от 0 до 1.

Совмещение точки C с точкой D , давление в которой равно атмосферному, означает распространение зоны вакуума, создаваемого дренажным стоком, на всю неограниченную глубину пласта. При последующей интенсификации дренажа течение переходит во вторую стадию, на которой точка C становится крайней правой точкой кривой депрессии ED . Относящиеся к этой стадии детали схем обозначены на фиг. 1, a , b , c и фиг. 2 цифрой 2.

Своеобразие формы нижней части CD депрессионной кривой отражает специфику фильтрационного потока, определяемую режимом его вакуумирования и отчетливо проявляющуюся именно на второй стадии течения. Исходя из равенства (1.3), получим для кривой депрессии

$$\partial p / \partial y = \gamma(1 - w_y) \geq 0 \quad (1.10)$$

где w_y – вертикальная составляющая скорости фильтрации. Равенство выполняется здесь только в бесконечно удаленной точке D , а на второй стадии – также и в точке C ; на остальной же части кривой депрессии имеем $\partial p / \partial y > 0$. Определяемое этим неравенством возрастание давления с глубиной означает, что $p < 0$ над участком CD , который оказывается, следовательно, под непосредственным и все возрастающим (по мере увеличения δ) воздействием дренажного вакуума. При $\delta \rightarrow 1$ из первого соотношения (1.4) имеем $a/b \rightarrow 0$; в силу отмеченной ранее ограниченности параметра a это означает, что $b \rightarrow \infty$.

2. Критический режим дренирования, годограф скорости. В пределе, при $q = Q$, $\delta = 1$, когда дрена перехватывает весь фильтрационный поток из источника, точка B совмещается с точкой D , оказываясь точкой выхода на ось $x = 0$ рассматриваемых в принятой схеме правой и симметричной ей левой ветвей кривой депрессии; обе они, таким образом, смыкаются между собой в непрерывную замкнутую линию. При этом на участке AB , где $w_y \leq 0$, согласно (1.10) имеем $\partial p / \partial y \geq \gamma$: градиент гидродинамического давления в потоке при понижении давления в сторону дренажного стока A превышает действующую на жидкость силу тяжести, уравниваясь с ней лишь в точке B , в которой $w_y = 0$. Подобные критические режимы фильтрационных течений со свободными границами, изложенные в [2] для нескольких схем фильтрационных течений с дренажем, являются неустойчивыми, реализуясь как сугубо предельные, на грани нарушения динамического равновесия потока с покоящейся воздушной фазой, поскольку любое сколь угодно малое дополнительное понижение давления на дрене приведет к прорыву в нее снизу воздуха; такая дестабилизация потока произойдет уже за рамками исследуемой модели течения.

При обратном "вхождении" из критического режима в область применимости модели в результате ослабления интенсивности дренажа вступает в силу установленный выше механизм изменения параметров отображения. В частности, параметр b принимает конечные значения, убывающие с уменьшением величины q , т.е. точка

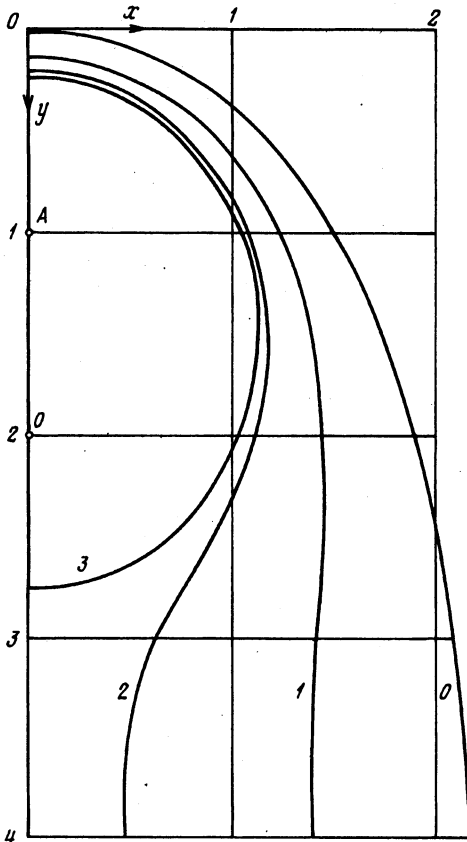
$$P(\zeta) = \zeta^2 - (b+3c)\zeta + 2(b+c) - bc = (\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2).$$

$$\zeta_{1,2} = \left[(b+3c) \pm \sqrt{(b+c)(b+9c-8)} \right] / 2$$

В начальной стадии дренирования, при $c < 0$, корню $\zeta_1 \in (-a, 0)$ соответствует точка G минимума, а корню $\zeta_2 \in (-\infty, c)$ – точка F максимума функции $w_y(\zeta)$ на участке EOD (фиг. 2). При этом найдем, исходя из (2.1)

$$\frac{1}{w_y(\zeta_1)} - \frac{1}{w_y(\zeta_2)} = \frac{(\zeta_1 - \zeta_2) \left[(b+c)\sqrt{1-\zeta_2}(\sqrt{1-\zeta_1} + \sqrt{1-\zeta_2}) + (\zeta_2 - c)(b+\zeta_1) \right]}{(b+\zeta_1)(b+\zeta_2)\sqrt{(1-\zeta_1)(1-\zeta_2)}(\sqrt{1-\zeta_1} + \sqrt{1-\zeta_2})} < 0$$

Таким образом, $w_y(\zeta_1) > w_y(\zeta_2)$, т.е. граничные разрезы вдоль оси w_y не перекрываются между собой, что обеспечивает однолиственность годографа (фиг. 3). Таким образом остается он и на второй стадии течения при $c > 0$. Точка C , в которой по-прежнему $\bar{w} = i$, оказывается теперь крайней правой точкой кривой депрессии, а точка F , аффиксом которой является положительный корень ζ_1 квадратного трехчлена $P(\zeta)$, становится точкой перегиба кривой депрессии; на годографе ей соответствует вершина дугового разреза. В критическом режиме дренирования, при полном перехвате дреной потока с совмещением точек B, F и D , из годографа выпадает левая половина круга $|\bar{w} - i/2| < 1/2$.



Фиг. 4. Кривые депрессии потока при значениях расхода перехватывающей дрены, $\delta = q/Q = 0; 0,4; 0,8; 1$ (кривые 0–3)

3. Пример расчета. На фиг. 4 представлены кривые депрессии потоков из источника, действующего с расходом $Q = 2,266$ на глубине $y_0 = 1$ от поверхности земли, при значениях $\delta = 0; 0,4; 0,8; 1$ (линии 0–3). Для каждого из этих значений предварительно из уравнения (1.5) определяется параметр a , а затем рассчитываются координаты некоторой совокупности точек кривой депрессии ED , параметрические уравнения которой получаются на основе равенства $z = i(\omega - \theta)$ и зависимостей (1.1), (1.2) в следующей записи:

$$x = \frac{2Q}{\pi} \arctg \sqrt{\zeta-1} - \frac{2q}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{\zeta-1}{1+a}}$$

$$y = y_E + \frac{Q}{\pi} \ln \zeta - \frac{q}{\pi} \ln \frac{\zeta+a}{1+a} \quad (3.1)$$

$$y_E = y_0 - \frac{2Q}{\pi} \ln 2 + \frac{2q}{\pi} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+a}} \right)$$

В принятой схеме течения выбор значений Q и q должен сообразоваться с глубиной заложения источника и стока так, чтобы $y_E \geq 0$, т.е. фильтрационный поток не выходил на поверхность земли. Значение Q , заданное в

описываемом примере расчетов, как раз и получено из последнего соотношения при $y_E = 0$ и при $q = 0$, когда точка E достигает своего наивысшего положения.

При $q = Q$ уравнения (3.1) примут вид

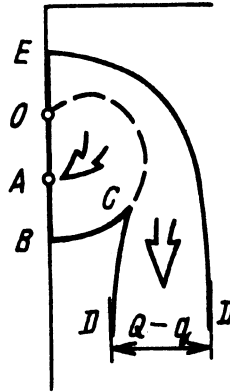
$$x = \frac{2Q}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(\alpha-1)\sqrt{\zeta-1}}{\alpha+\zeta-1}, \quad y = y_E + \frac{Q}{\pi} \ln \frac{\zeta(1+a)}{\zeta+a}, \quad a = a_1 \quad (3.2)$$

Величина a_1 определена второй формулой (1.7).

Из второго соотношения (1.8) при $\delta = 1$ найдем $c = 1 + \alpha$. Далее имеем на основании (3.2)

$$x_C = (2Q/\pi) \operatorname{arctg} [(\alpha-1)/(2\sqrt{\alpha})], \quad y_C = y_E + (Q/\pi) \ln \alpha \quad (3.3)$$

Нетрудно убедиться в том, что в рассматриваемом предельном случае кривая депрессии



Фиг. 5. Схема фильтрации с отрывом потока (из статьи [4])

обретает вторую, горизонтальную ось симметрии: $y = y_C$. Действительно, согласно (3.2) и (3.3) абсциссы ζ_1 и ζ_2 произвольной пары точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ кривой ED , находящихся соответственно выше и ниже указанной прямой на одинаковом расстоянии от нее ($y_C - y_1 = y_2 - y_C$) связаны между собой соотношением $(\zeta_1 - 1)(\zeta_2 - 1) = \alpha^2$, при котором $x_1 = x_2$, что следует из первого равенства (3.2).

В статье [4] фильтрационный поток из подпочвенного источника, частично поглощаемый дренажным стоком, моделируется в предположении об отрыве остальной части потока в некоторой точке C (фиг. 5). Каких-либо соображений по обоснованию такой предпосылки, имеющей принципиальное значение, в статье не приводится.

Предыдущий анализ исключает возможность возникновения подобной ситуации, поскольку во всем диапазоне изменения интенсивности дренирования в сторону его усиления или ослабления фильтрационный поток остается сплошным. Между тем в обсуждаемую схему течения изначально заложен критический режим дренирования, при котором в точке B свободная граница находится, как было отмечено в разд. 2, на грани дестабилизации; сам же критический режим реализуется как предельный при полном перехвате дренажной потока из источника. Вследствие этого принятая схема бессодержательна с гидродинамической точки зрения: в ее рамках, например, невозможно исследование фильтрационного процесса при варьировании расходов источника или стока.

Заключение. В рамках гидродинамической модели установившейся свободной фильтрации из подпочвенного источника с перехватом потока горизонтальной вакуумной дренажной осуществлен детальный анализ течения, которому ранее уже уделялось внимание в отдельных публикациях. При этом, однако, оставались открытыми некоторые вопросы, связанные с режимом дренирования и с самой структурой течения. Выполненное исследование позволило внести в них полную ясность. Установлен, в частности, непрерывный характер трансформации потока по мере усиления дренажа вплоть до выхода на предельный, критический режим при полном перехвате дренажной фильтрующихся грунтовых вод.

Автор благодарит Н.Б. Ильинского и А.Р. Касимова за информацию о работах [3] и [4].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01971).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эмих В.Н. Гидродинамическая модель вакуумного перехватывающего дренажа в нисходящем потоке грунтовых вод // ПММ. 1987. Т. 50. Вып. 1. С. 168–172.
2. Эмих В.Н. Гидродинамика фильтрационных течений с дренажем. Новосибирск: Наука, 1993. 213 с.
3. Strack O.D.L. Groundwater Mechanics. Prentice Hall: Englewood Cliffs, 1989. 732 p.
4. Терентьев А.Г. Краевые задачи для систем подпочвенных оросителей // Актуальные задачи гидродинамики. Чебоксары: Изд-во Чебоксар. ун-та, 1989. С. 107–117.
5. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
25.XI.1997