

УДК 532.516.013.4

© 1999 г. А.Г. БУРЯ, В.Я. ШКАДОВ

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ФОРМИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СТРУКТУР В ОСЦИЛЛИРУЮЩЕМ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ МЕЖДУ ЦИЛИНДРАМИ

Исследуются осесимметричные нестационарные течения в зазоре между двумя цилиндрами, вращающимися со скоростями, которые периодически меняются по времени. Используется приближение узкого зазора полных уравнений Навье – Стокса. С помощью теории Флоке найдены собственные числа задачи с периодическими коэффициентами и определены критические параметры линейной теории устойчивости для различных типов течений. Разработан спектральный численный метод решения нелинейных уравнений и рассчитаны вторичные течения, образующиеся после потери устойчивости основным течением. Подробно рассмотрены перестройки вторичных течений в зависимости от значений частоты изменения скорости вращения цилиндров и числа Тейлора.

В настоящей работе рассматриваются течения вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя вращающимися цилиндрами, угловые скорости которых периодически изменяются со временем. Впервые влияние периодических синусоидальных колебаний угловой скорости внутреннего цилиндра вида  $\Omega = \Omega^0(1 + A \cos(\omega t))$  на стационарное течение Куэтта было экспериментально исследовано в [1]. Был сделан вывод о стабилизации течения, хотя отмечалось образование вихрей в области устойчивости, которые появлялись и исчезали в течение периода возмущения. Результаты последующих теоретических исследований [2, 3] противоречили выводу о стабилизации течения. В [2] в случае узкого зазора в пределе больших и малых частот  $\omega$  были вычислены критические параметры по линейной теории устойчивости, а также получено амплитудное уравнение в пределе больших частот. Во всех случаях критические параметры для периодического течения были меньше критических параметров для стационарного течения. Величина дестабилизации  $\Delta Ta_c = (Ta_{c0} - Ta_c)/Ta_{c0}$ , где  $Ta_{c0}$ ,  $Ta_c$  – критические числа Тейлора для стационарного течения Куэтта и для периодического течения, оказалась равной  $O(A^2)$ . Анализ устойчивости к бесконечно малым возмущениям по линейной теории с помощью метода Галеркина [3] в случае узкого зазора для различных скоростей вращения цилиндров подтвердил вывод о дестабилизации течения. Более поздние эксперименты [4] также свидетельствовали о дестабилизации течения в этом случае.

В [5] на основе линейного анализа устойчивости были получены критические параметры в случаях колебаний только внутреннего цилиндра, синхронных колебаниях обоих цилиндров, колебаний внутреннего или внешнего цилиндров на фоне стационарного течения Куэтта. При этом использовались теория Флоке, спектральная аппроксимация возмущений и прямое интегрирование по времени. При периодических колебаниях внутреннего цилиндра на фоне течения Куэтта в отличие от работ [2, 3] для низких частот наблюдалась сильная дестабилизация – порядка  $\Delta Ta_c = O(A)$ . В случае колебаний внешнего цилиндра был также сделан вывод о дестабилизации течения, что противоречит экспериментам [6], в которых, напротив, наблюдалась стабилизация.

Результаты линейного анализа устойчивости возмущенного течения Куэтта в случае колебаний внутреннего или внешнего цилиндра с использованием теории Флоке и спектрального представления пространственных переменных [7] подтвердили вывод работ [2, 3] о слабой дестабилизации для малых и средних частот и соответствовали экспериментам [6]. Авторы [7] объяснили расхождение своих результатов с работой [5] тем, что в последней был взят слишком большой шаг по времени. Также в [7] численно рассчитывалось вторичное течение в случае колебаний только внутреннего цилиндра на фоне стационарного течения Куэтта.

Подробный линейный анализ устойчивости [8] в случае колебаний внешнего цилиндра на фоне стационарного течения Куэтта во всех случаях показал стабилизацию в соответствии с экспериментом [6].

В работе [9] было проведено экспериментальное и теоретическое исследование устойчивости течения, возникающего при синхронных колебаниях обоих цилиндров. В экспериментах были определены критические параметры для широкого диапазона параметров, получены картины течений для различных амплитуд колебаний. Найдены линейные уравнения для возмущений в случае узкого зазора, из которых с помощью теории Флоке и разложения в ряд Фурье по времени были найдены критические параметры.

Целью настоящей работы является численный расчет вторичных нелинейных и нестационарных течений, возникающих после потери устойчивости основным состоянием. При исследовании используется приближение узкого зазора, т.е. считается, что отношение величины зазора к радиусу внутреннего цилиндра мало и течение имеет осевую симметрию. Уравнения движения при этих предположениях были получены в [10], в которой аналитическим приближенным методом и численно были рассчитаны стационарные нелинейные вторичные течения в зазоре между цилиндрами в случае, когда внутренний цилиндр вращается с постоянной скоростью, а внешний неподвижен.

Для решения уравнений работы [10] применяется спектральный метод по пространственным переменным и полуявная схема по времени. Проведен также линейный анализ устойчивости основного течения для определения критических параметров. Для этого применялись линеаризованная версия метода решения основных уравнений и теория Флоке.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя коаксиальными бесконечно длинными цилиндрами. Цилиндры вращаются со скоростями, периодически меняющимися во времени:  $\Omega_1 = \Omega_1^0 + \Omega_{10} \cos \omega t$  и  $\Omega_2 = \Omega_2^0 + \Omega_{20} \cos \omega t$  соответственно для внутреннего и внешнего цилиндров. Радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно равны  $R_1$  и  $R_2$ . Течение описывается уравнениями Навье – Стокса и неразрывности

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{V}, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

На стенках цилиндра при  $r = 0$  ставятся условия прилипания:  $V = 0$ .

Введем систему цилиндрических координат  $(r, \varphi, z)$ , такую, что ось  $z$  совпадает с осью цилиндра. Предполагаем, что течение имеет осевую симметрию и периодически по  $z$  с некоторым периодом  $\lambda$ . Кинематическая вязкость  $\nu$  и плотность  $\rho$  предполагаются постоянными. Выделим основное состояние, для которого отлична от нуля только азимутальная составляющая скорости  $V_\varphi = V(r, t)$  и течение зависит только от радиуса. Введем безразмерные переменные по формулам

$$r = R_1(1 + \varepsilon \eta), \quad z = nR_1 \varepsilon \zeta, \quad t = \frac{d^2}{\nu} \tau, \quad \varepsilon \frac{d}{R_1}, \quad d = R_2 - R_1$$

Масштаб для азимутальной скорости  $V_M$  выберем в зависимости от скоростей

цилиндров

$$V_M = \Omega_1^{\circ} R_1, \quad \Omega_1^{\circ} \neq 0, \quad V_M = \Omega_2^{\circ} R_1, \quad \Omega_2^{\circ} \neq 0, \quad \Omega_1^{\circ} = 0$$

$$V_M = \Omega_{10}^{\circ} R_1, \quad \Omega_{10}^{\circ} \neq 0, \quad \Omega_2^{\circ} = 0, \quad \Omega_1^{\circ} = 0$$

$$V_M = \Omega_{20}^{\circ} R_1, \quad \Omega_{20}^{\circ} \neq 0, \quad \Omega_{10}^{\circ} = 0, \quad \Omega_2^{\circ} = 0, \quad \Omega_1^{\circ} = 0$$

В дальнейшем основное внимание будет сосредоточено на случае синхронных колебаний обоих цилиндров около состояния покоя  $\Omega_2^{\circ} = \Omega_1^{\circ} = 0, \Omega_{10} = \Omega_{20} \neq 0$ . Радиальную и осевую составляющие скорости обезразмериваем относительно связанного с вязкостью масштаба  $v/d$ .

Будем рассматривать развитие возмущений, наложенных на основное состояние. Введем безразмерные возмущения скорости  $u, v, w$

$$V_z = \frac{v}{R_2 - R_1} w, \quad V_r = \frac{v}{R_2 - R_1} u, \quad V_{\varphi} = V_M(u + V)$$

$$P = V_M^2 \rho (p + P^0), \quad n = \frac{\lambda}{2\pi(R_2 - R_1)}, \quad \sigma = \frac{d^2}{v} \omega$$

где  $P^0$  и  $V$  соответствуют основному состоянию, а  $n$  – безразмерный параметр, связанный с длиной волны по  $z$ .

В результате подстановки безразмерных переменных уравнения движения содержат три безразмерных параметра:  $\varepsilon, n$  и  $Ta$  – число Тейлора, которое определяется как  $Ta = Re^2 \varepsilon$ , где число Рейнольдса  $Re = V_M(R_2 - R_1)/v$ . Введем функцию тока в меридиональной плоскости и завихренность по формулам

$$w = \frac{1}{1 + \varepsilon \eta} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \quad u = -\frac{1}{1 + \varepsilon \eta} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}, \quad \Omega = \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{1}{n^2} \frac{\partial u}{\partial \zeta}$$

При такой подстановке уравнение неразрывности удовлетворяется автоматически. Исключая из уравнений движения давление, получим

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \eta} (u\Omega) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (w\Omega) + \frac{1}{(1 + \varepsilon \eta)} \frac{Ta}{n^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} (v^2 + 2vV) =$$

$$= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} + \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon \eta)} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} - \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon \eta)^2} \Omega + \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \zeta^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \eta} (u(v + V)) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (w(v + V)) + 2 \frac{2}{(1 + \varepsilon \eta)} u(v + V) =$$

$$= \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon \eta)} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon \eta)^2} v + \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} - \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon \eta)} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} = \Omega(1 + \varepsilon \eta)$$

Здесь  $u$  и  $w$  выражаются через функцию тока  $\Psi$ , а  $V$  есть скорость для основного состояния  $\mathbf{V} = (0, V(r, \tau), 0)$ , где  $V(r, \tau)$  периодически изменяется во времени с периодом  $T = 2\pi/\sigma$ .

В случае узкого зазора  $\varepsilon = 0$  система уравнений и граничные условия имеют вид [10]

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \eta} (u\Omega) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (w\Omega) + \frac{Ta}{n^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} (v^2 + 2vV) = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \zeta^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \eta} (u(v + V)) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (w(v + V)) = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} = \Omega; \quad w = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}; \quad u = -\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}$$

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 0, \quad v = 0, \quad \eta = 0, 1 \quad (1.2)$$

Для основного состояния  $\mathbf{V} = (0, V(r, \tau), 0)$  из уравнений Навье – Стокса в случае узкого зазора получаем

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}$$

$$V = \Omega_1^0 + \Omega_{10} \cos \sigma \tau, \quad \eta = 0; \quad V = \Omega_2^0 + \Omega_{20} \cos \sigma \tau, \quad \eta = 1$$

Здесь  $\sigma$  – безразмерная частота.

Разыскивая решение в виде  $V = V^\circ + U$ , где  $V^\circ$  – стационарное течение Куэтта, а  $U$  – периодическая часть, получаем

$$V = \Omega_1^\circ + (\Omega_2^\circ - 1)\eta + U_1(\eta) \cos \sigma \tau + U_2(\eta) \sin \sigma \tau \quad (1.3)$$

$$U_1(\eta) = \Omega_{10} \frac{\sin \gamma(1-\eta) \operatorname{ch} \gamma(1-\eta) \operatorname{ch} \gamma \sin \gamma - \operatorname{sh} \gamma(1-\eta) \cos \gamma(1-\eta) \cos \gamma \operatorname{sh} \gamma}{\operatorname{ch}^2 \gamma - \cos^2 \gamma} +$$

$$+ \Omega_{20} \frac{\sin \gamma \eta \operatorname{ch} \gamma \eta \sin \gamma \operatorname{ch} \gamma - \operatorname{sh} \gamma \eta \cos \gamma \eta \cos \gamma \operatorname{sh} \gamma}{\operatorname{ch}^2 \gamma - \cos^2 \gamma}$$

$$U_2(\eta) = \Omega_{10} \frac{\operatorname{sh} \gamma(1-\eta) \cos \gamma(1-\eta) \sin \gamma \operatorname{ch} \gamma - \sin \gamma(1-\eta) \operatorname{ch} \gamma(1-\eta) \cos \gamma \operatorname{sh} \gamma}{\operatorname{ch}^2 \gamma - \cos^2 \gamma} +$$

$$+ \Omega_{20} \frac{\operatorname{sh} \gamma \eta \cos \gamma \eta \sin \gamma \operatorname{ch} \gamma - \sin \gamma \eta \operatorname{ch} \gamma \eta \cos \gamma \operatorname{sh} \gamma}{\operatorname{ch}^2 \gamma - \cos^2 \gamma}$$

$$\gamma = \sqrt{\sigma/2} = R_2 - R_1 / \delta, \quad \delta = \sqrt{2\nu/\omega}$$

Здесь  $\delta$  – толщина слоя Стокса.

При исследовании устойчивости возмущения представляются в виде

$$v = v_1(\tau, \eta) \cos \zeta, \quad \Psi = \psi_1(\tau, \eta) \sin \zeta, \quad \Omega = \Omega_1(\tau, \eta) \sin \zeta \quad (1.4)$$

После подстановки (1.4) в (1.1), линеаризации и исключения  $\Omega$  получим

$$\dot{\psi}_1'' - \frac{1}{n^2} \dot{\psi}_1 = \psi_1^{iv} - \frac{2}{n^2} \psi_1'' + \frac{1}{n^4} \psi_1 + \frac{2\operatorname{Ta}}{n^2} V v_1 \quad (1.5)$$

$$\dot{v}_1 = v_1'' - \frac{1}{n^2} v_1 + V' \psi_1$$

Здесь точкой обозначена производная по времени, штрихом производная по  $\eta$ , а основное течение  $V$  зависит от  $\eta$  и времени и определяется уравнениями (1.3).

Вместе с граничными условиями (1.2) система (1.5) описывает развитие бесконечно малых возмущений основного течения.

**2. Численные методы.** Для решения задачи (1.1)–(1.2) применялся спектральный метод, основанный на смешанных представлениях Фурье – Чебышева. Для представления граничных условий использовался гау-метод. Теория и вопросы практического применения спектральных методов изложены в монографии [11].

Неизвестные функции представляются в виде разложения в ряд по синусам или косинусам по продольной координате и в виде разложения по модифицированным многочленам Чебышева второго рода [12] по радиальной координате

$$\begin{aligned} v &= \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^N v_{kl}(\tau) U_l^*(\eta) \cos k\zeta, \quad \psi = \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{l=0}^N \psi_{kl}(\tau) U_l^*(\eta) \sin k\zeta \\ \Omega &= \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{l=0}^N \Omega_{kl}(\tau) U_l^*(\eta) \sin k\zeta \end{aligned} \quad (2.1)$$

Модифицированные многочлены Чебышева второго рода  $U_l^*(\eta)$  связаны с классическими многочленами через замену  $x = 2\eta - 1$ . Разложение только по синусам или косинусам применяется в силу симметрии задачи, благодаря чему число коэффициентов Фурье уменьшается в 2 раза.

Применяем метод Галеркина по координате  $\zeta$  и тау-метод по координате  $\eta$ , в результате получаем систему уравнений для коэффициентов разложения

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial \tau} &= D^2 v_k - \frac{k^2}{n^2} v_k - N_k^v \\ \frac{\partial \Omega_k}{\partial \tau} &= D^2 \Omega_k - \frac{k^2}{n^2} \Omega_k - N_k^\Omega, \quad k = 0, \dots, M \\ \Omega_k &= D^2 \Psi_k - \frac{k^2}{n^2} \Psi_k \end{aligned} \quad (2.2)$$

В этой записи  $v_k$ ,  $\Omega_k$ ,  $\Psi_k$  обозначают векторы с элементами  $v_{kl}$ ,  $\Omega_{kl}$ ,  $\Psi_{kl}$  соответственно, а через  $N_k^\Omega$  и  $N_k^v$  обозначаются нелинейные члены.

Граничные условия по  $\zeta$  удовлетворяются в силу выбора разложения Фурье по продольной координате, а граничные условия по  $\eta$  удовлетворяются с помощью тау-метода

$$\sum_{p=0}^N (\pm 1)^p (p+1) v_{kp} = 0, \quad k = 0, \dots, M-1 \quad (2.3)$$

$$\sum_{p=0}^N (\pm 1)^p (p+1) \psi_{kp} = 0, \quad \sum_{p=0}^N (\pm 1)^{p-1} \frac{p(p+1)(p+2)}{3} \psi_{kp} = 0, \quad k = 1, \dots, M-1 \quad (2.4)$$

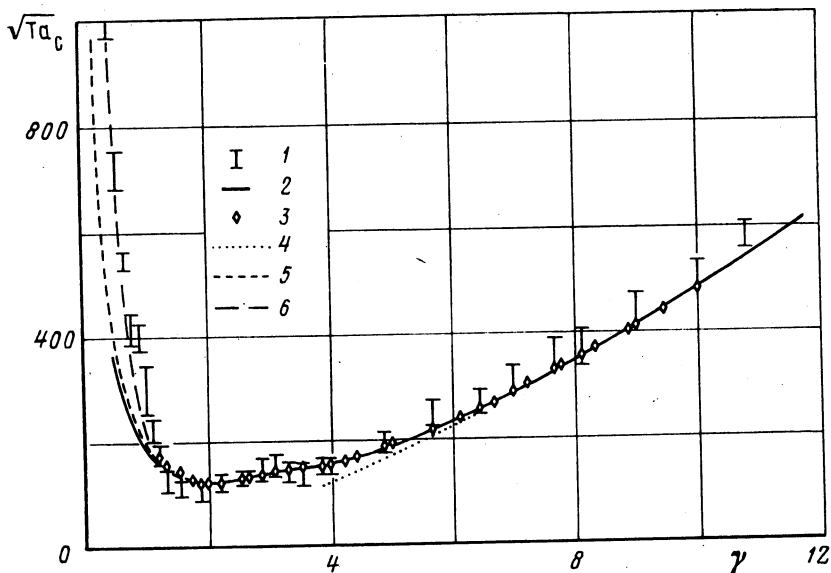
Для дискретизации по времени применяем комбинированную полуявную схему Адамса – Башфорта для нелинейных членов и Кранка – Николсона для линейных членов [11].

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения  $v_{kl}$ ,  $\Omega_{kl}$ ,  $\Psi_{kl}$  на новом временном слое, которая разделяется на системы для нахождения  $v_{kl}$  и для  $\Omega_{kl}$ ,  $\Psi_{kl}$ . Первая система решается прямым методом с граничными условиями (2.3). При решении второй системы возникает трудность, которая связана с тем, что уравнения для  $\Omega_{kl}$ ,  $\Psi_{kl}$  связаны и нет граничных условий на  $\Omega_{kl}$ . Для преодоления этой трудности применяется метод матриц влияния, который для решения гидродинамических задач применялся в [13, 14].

Для исследования устойчивости полученного метода применялся спектральный анализ, описанный в [15, 16]. Собственные значения метода и соответствующей линейной задачи для стационарного основного состояния совпадали в пределах 1% для шага по времени 0,02, при расчетах использовался шаг по времени, равный 0,005–0,001.

При решении задачи линейной устойчивости (1.5) и (1.2) применялась линеаризованная версия изложенного выше метода и теория Флоке. Возмущения разлагались в ряд Чебышева аналогично (2.1), в результате получалась система дифференциально-алгебраических уравнений вида

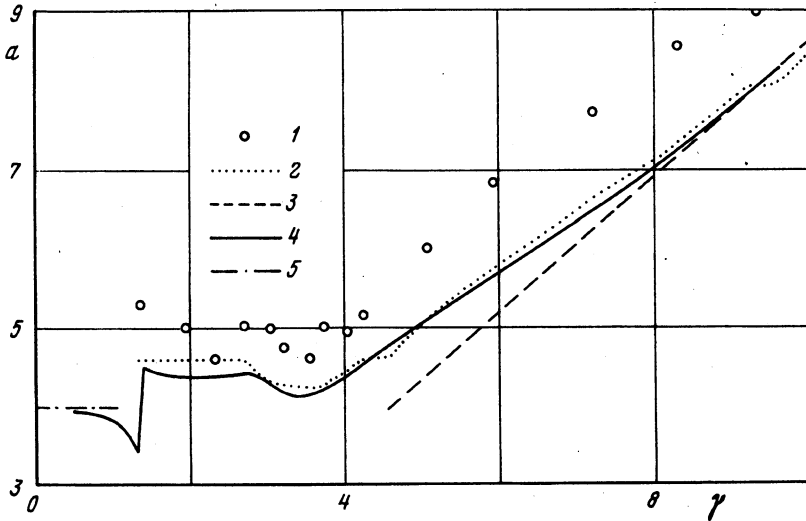
$$\begin{aligned} (D^2 - \frac{1}{h^2}) \dot{\psi}_{ll} &= (D^2 - \frac{1}{h^2})^2 \psi_{ll} + \frac{2Ta}{n^2} (Vv_1)_l \\ \dot{v}_{ll} &= (D^2 - \frac{1}{h^2}) v_{ll} + (V' \psi_1)_l \end{aligned} \quad (2.5)$$



Фиг. 1. Зависимость критического числа Тейлора  $Ta_c$  от частоты колебаний  $\gamma$  в случае синхронных колебаний обоих цилиндров. 1 – экспериментальные значения [9], 2 – настоящий расчет, 3 – расчет [9], 4 – асимптотика при  $\gamma \gg 1$ , 5 и 6 – первая и вторая асимптотики при  $\gamma \ll 1$

В отличие от случая стационарного течения функция  $V$  в (2.5) периодически зависит от времени и имеет период  $T$ . Поэтому для решения задачи о линейной устойчивости использовалась теория Флоке [17], согласно которой существует постоянная матрица  $\mathbf{R}$ , такая, что  $\mathbf{S}(\tau + T) = \mathbf{R}\mathbf{S}(\tau)$ , где  $\mathbf{S}(\tau)$  – матрица фундаментальных решений системы (2.5). Если обозначить собственные значения  $\mathbf{R}$ , через  $c_i$ , то решение системы (2.5) имеет вид  $f_i(\tau) = F_i(\tau)\exp(s_i\tau)$ , где  $s_i = \ln(c_i)/T$ , а  $F_i(\tau)$  есть периодическая функция от времени. Следовательно, если  $\max(\text{Re}(s_i)) < 0$ , то течение устойчиво к бесконечно малым возмущениям, в противном случае – неустойчиво. Для определения матрицы  $\mathbf{R}$  система (2.5) интегрировалась по времени в течение одного периода от линейно независимых начальных условий, потом определялись собственные числа  $\mathbf{R}$   $c_i$ , по которым находились собственные значения задачи  $s_i$ . Критические параметры определялись с помощью комбинированного метода деления отрезка пополам и секущей нахождения корня обыкновенного уравнения.

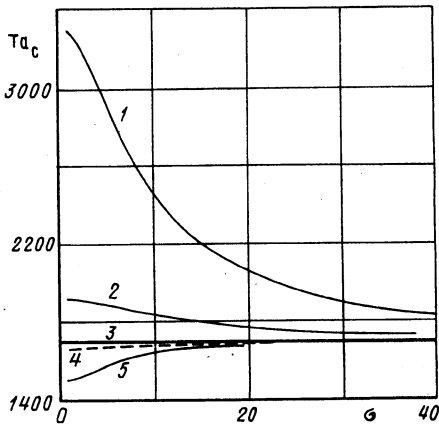
**3. Результаты линейного анализа устойчивости.** Сначала был рассмотрен случай синхронных колебаний обоих цилиндров  $\Omega_1 = \Omega_{10} \cos \sigma t$  и  $\Omega_2 = \Omega_{10} \cos \sigma t$ . Были рассчитаны критические числа Тейлора  $Ta_c(\sigma) = \min(Ta(n, \sigma))$ , здесь критическое число определяется как минимальное по волновому параметру  $n$  из всех критических чисел  $Ta$  для данной частоты колебаний  $\sigma$ . Также определялись  $n_c$ , соответствующие значению  $n$  для  $Ta_c$ . На фиг. 1 изображены нейтральные кривые  $Ta_c(\sigma)$ , рассчитанные в настоящей работе и в [9], а также отмечены экспериментальные значения  $Ta_c$  [9], причем нижняя граница соответствует первому появлению неустойчивости, а верхняя – появлению вторичному течению. Для удобства на фиг. 1, 2 использованы те же параметры, что и в работе [9]:  $Ta_c^1 = \sqrt{Ta_c}$ ,  $\gamma = \sqrt{\sigma/2}$ ,  $a = 1/n$ . На фиг. 2 представлена зависимость критического волнового числа от  $\sigma$  для расчетов настоящей работы, расчетов с помощью разложения в ряды Фурье по времени [9] и экспериментальных значений из работы [9]. Расчетные данные хорошо соответствуют экспериментальным для больших и средних частот возмущений. Эксперимент проводился при



Фиг. 2. Зависимость критического волнового параметра  $a = 1/n$  от частоты колебаний  $\gamma$  в случае синхронных колебаний обоих цилиндров. 1 – экспериментальные значения [9], 2 – расчет [9], 3 – асимптотика при  $\gamma \geq 1$ , 4 – настоящий расчет, 5 – асимптотика при  $\gamma \leq 1$

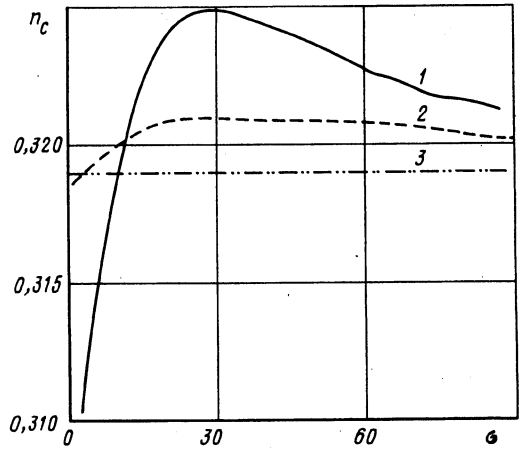
$\varepsilon = 0,11$ , следовательно, можно сделать вывод об обоснованности использованного приближения по крайней мере для достаточно малых  $\varepsilon$ . При больших частотах колебаний,  $\gamma \geq 5$ , поведение критических параметров соответствует асимптотическому, полученному в [3, 9]:  $Ta_c = 15,28\gamma^{3/2}$ ,  $a_c = 0,86\gamma$ . Для средних значений частот,  $1 < \gamma < 5$ , поведение критических параметров соответствует результатам работы [9]: имеется минимальное значение  $Ta_c$  вблизи  $\gamma = 2$  и точка перегиба около  $\gamma = 3$ . Минимальное значение  $Ta_c = 122$  и  $n_c = 0,21$ , этому значению  $\gamma$  соответствует значение толщины слоя Стокса  $\delta = d/2$ . При значениях  $\gamma < 2$  данные расчета сильно отклоняются от данных эксперимента: так, для  $\gamma = 0,5$  расчетное  $Ta_c = 352,71$ , а экспериментальное – 800. Это связано с тем, что при малых  $\gamma$ , как показано в работе [9], существуют два асимптотических решения:  $Ta_c = 193,23\gamma^{-1}$ ,  $a_c = 3,98$  и  $Ta_c \approx 200\gamma^2$ ,  $a_c = 3,9$ , и поэтому расчет критических параметров требует мелкого шага по времени. В расчете использовался шаг по времени 0,001, при этом расчетные критические числа  $Ta_c$  выходили на асимптотику  $Ta_c \sim \gamma^{-1}$ . С этим же обстоятельством связан скачок на графике зависимости  $n_c$  от  $\gamma$  вблизи единицы. При малых  $\gamma$  значения  $n_c$  выходят на асимптотику  $n = 0,25$ , что соответствует обоим возможным асимптотикам (фиг. 2).

Был проведен линейный анализ устойчивости стационарного течения Куэтта с наложенными колебаниями внутреннего или внешнего цилиндра. Для обоих случаев расчеты проводились с частотами колебаний  $\sigma$  от 1 до 100. При частоте колебаний  $\sigma = 60$  и выше критические числа Тейлора и волновой параметр  $n$  выходят на свои стационарные значения:  $Ta_c = 1694$  и  $n_c = 0,319$ . В случае колебаний внутреннего цилиндра на фоне обычного течения Куэтта ( $\Omega_1 = \Omega_1^\circ + \Omega_{10} \cos \sigma t$  и  $\Omega_2 = 0$ ) наблюдается слабая дестабилизация по сравнению со стационарными пределами устойчивости: так, при  $A = \Omega_{10} / \Omega_1^\circ = 0,5$  максимальная величина дестабилизации  $\Delta Ta_c \leq 0,2$ , при уменьшении  $A$  величина дестабилизации уменьшается. На фиг. 3 представлена зависимость  $Ta_c$  от частоты колебаний  $\sigma$  для  $A = 0,5$  и 1.



Фиг. 3

Фиг. 3. Нейтральные кривые при  $\Omega_1^0 \neq 0$  для случаев  $\Omega_{20} \neq 0, \Omega_2^0 = \Omega_{10} = 0$  и  $\Omega_{10} \neq 0, \Omega_2^0 = \Omega_{10} = 0$  и амплитуды колебаний  $A = 1/2$  (кривые 1, 4) и 1 (кривые 2, 5). Прямая 3 – критическое  $Ta_c$  для стационарного течения Куэтта



Фиг. 4

Фиг. 4. Зависимость критического волнового параметра  $n_c$  от частоты колебаний  $\sigma$  в случае  $\Omega_1^0 \neq 0, \Omega_{20} \neq 0, \Omega_2^0 = \Omega_{10} = 0$  и амплитуды колебаний  $A = 1/2$  и 1 (кривые 1 и 2). Прямая 3 – критическое  $n$  для стационарного течения Куэтта

При колебаниях внешнего цилиндра на фоне стационарного течения Куэтта ( $\Omega_1 = \Omega_1^0 + \Omega_2 = \Omega_{20} \cos \sigma t$ ) наблюдается стабилизация по сравнению со стационарным случаем. Величина стабилизации значительно больше величины дестабилизации в предыдущем случае ( $\Delta Ta_c \sim 1$  для  $A = 1$ ). На фиг. 3 показаны нейтральные кривые для случаев  $A = 0,5$  и 1, а на фиг. 4 – график зависимости критического волнового параметра  $n$  от частоты  $\sigma$ . Представлено сравнение результатов выполненных расчетов с результатами эксперимента [6] и расчета [8] в случае  $\sigma = 10,58$  ( $\gamma = 2,3$ ) и  $\varepsilon = 0,14$  для значений амплитуды  $A$  от 0,3 до 2:

$A$	0,3	0,5	0,7	0,9	1,5	2,0
Эксперимент [6]	2106,81	2284,64	2580,64	3080,25	5272,89	7464,96
Расчет [8]	2061,16	2227,84	2550,25	3203,56	7039,21	9447,84
Настоящий расчет	1740,21	1827,63	1978,64	2230,09	4364,74	6617,75

Различие между расчетом [8] и настоящим расчетом составляет от 15% для малых амплитуд наложенных пульсаций  $A \approx 0,3-0,7$  до 40% для  $A = 2$ . Однако разница между результатами данной статьи и экспериментом [6] не меняется и составляет примерно 15–20% для всех значений амплитуды  $A$ . Возможно, различие между экспериментом и настоящим расчетом объясняется тем, что в экспериментах неустойчивость наблюдается при достаточно развитом вторичном течении.

Для случая  $\varepsilon = 0,05$  экспериментальные данные содержатся в промежутке от  $Ta_c = 2097,6$  для  $A = 0,6$  до  $Ta_c = 2106,8$  для  $A = 0,9$ , а согласно выполненным расчетам  $Ta_c = 1950$  для  $A = 0,6$  и  $Ta_c = 2230$  для  $A = 0,9$ . Вероятно, увеличение расхождения с экспериментом для  $\varepsilon = 0,14$  объясняется использованием приближения малого зазора. В то же время отметим, что результаты настоящей работы для больших амплитуд

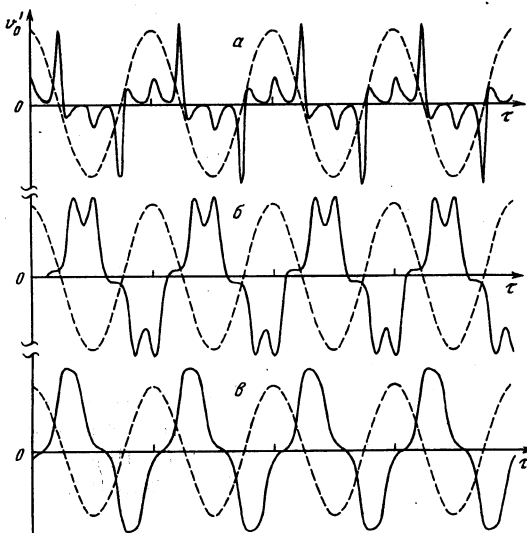


( $A > 1,3$ ) ближе к экспериментальным, чем результаты расчета в работе [8], где использовались уравнения с учетом величины зазора.

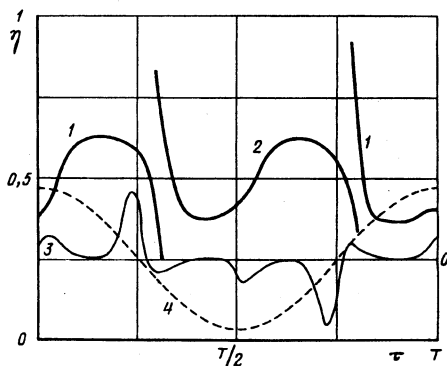
**4. Результаты нелинейных расчетов вторичных течений.** После расчета критических параметров линейной теории были рассчитаны вторичные течения, образующиеся после потери устойчивости. Расчеты вторичных течений проводились методом установления с помощью расчетных схем, описанных в разд. 2. Шаг по времени для нелинейных расчетов был равен 0,001, в качестве начальных условий брались либо возмущение синусоидальной формы, либо результаты расчета при близких значениях параметров. Расчеты проводились на больших промежутках по времени, в типичном случае – около 100 периодов колебаний. Для значений  $Ta$ , немного превышающих критические, довольно быстро устанавливалось периодическое по времени вторичное течение с периодом  $T = 2\pi/\sigma$ , что соответствует периоду колебаний цилиндров.

Основное внимание было сосредоточено на случае синхронно колеблющихся цилиндров. Расчеты проводились для частот  $\sigma$  от 1 до 20 и при  $Ta = 1,1 Ta_c$ . Течения при средних и больших частотах различаются качественно, при частотах  $\sigma > 18$  основное течение сосредоточено вблизи стенок цилиндров, в то время как при  $\sigma < 10$  движение распространяется на весь зазор. В [9] с помощью критерия устойчивости Рэлея для идеальной жидкости показано, что при малых  $\sigma$  в зазоре существуют две области неустойчивости: одна вблизи внешнего цилиндра  $1/2 < \eta < 1$ , а вторая вблизи внутреннего цилиндра  $0 < \eta < 1/2$ , и неустойчивость проявляется то в одной, то в другой. При  $0 < \tau \leq \pi/2\sigma$  и  $\pi/\sigma < \tau \leq 3\pi/\sigma$  область неустойчивости расположена вблизи внешнего цилиндра, а при  $\pi/2\sigma < \tau \leq \pi/\sigma$  и  $3\pi/2\sigma < \tau \leq 2\pi/\sigma$  – вблизи внутреннего цилиндра. Поэтому вихри Тейлора, развивающиеся в первом случае, оказываются вблизи внешнего цилиндра, а во втором случае – вблизи внутреннего.

В проведенных расчетах разделение на две области сохранялось вплоть до  $\sigma = 19$  (т.е. до  $\gamma \sim 3$ , что соответствует точке перегиба нейтральной кривой для случая синхронных колебаний обоих цилиндров, показанной на фиг. 1). График зависимости от времени величины  $\partial v_\theta / \partial \eta$  при  $\eta = 1$ , характеризующей прирост среднего трения за счет образования вихрей, при  $\sigma < 19$  имеет четыре экстремума в течение одного периода. Эти пики соответствуют переходным состояниям, когда сменяются области неустойчивости. При  $\sigma > 19$  выраженное разделение на две области неустойчивости пропадает. На фиг. 5 представлена зависимость среднего трения от времени для различных частот колебаний цилиндров и значений  $Ta = 1,1 Ta_c$  и  $n = n_c$ . Во всех случаях отмечается образование сложного негармонического вторичного течения с периодом, равным периоду колебаний цилиндров. На фиг. 6 представлен график зависимости поперечной координаты  $\eta$  центра вихрей от времени в течение одного периода колебания цилиндров при  $\sigma = 2,5$  и  $Ta = 29000$ . Отдельно показаны (кривые 1 и 2) зависимости для двух различных типов пар вихрей (различающихся направлением вращения). Также на фиг. 6 приведены изменения среднего трения за период и скоростей вращения цилиндров. В начале периода происходит постепенное развитие вихрей вблизи внешнего цилиндра, при этом трение нарастает. Далее, при  $\tau \geq T/4$  происходит перестройка течения и вихри оказываются вблизи внутреннего цилиндра. В определенный момент  $\tau \approx T/3$  появляется дополнительная пара вихрей вблизи внешнего цилиндра, причем пары вихрей вращаются в разных направлениях, в середине ячейки основная пара вихрей вращается по направлению к внутреннему цилиндру, а вторая – в противоположную сторону. С течением времени вторая пара вихрей вытесняет первую и формируется течение с вихрями, расположенными вблизи внутреннего цилиндра  $\tau \approx 3T/8$ . При  $\tau \approx T/2$  происходит переход вихрей к внешнему цилиндру, а при  $\tau > 3T/4$  снова происходит смена направления вращения вихрей с образованием четырех вихрей. Подобное изменение направления вращения вихрей отмечалось только для частот колебаний  $\sigma < 5$ , при  $5 < \sigma < 15$  происходили только переходы вихрей между цилиндрами. При  $\sigma > 15$  центры вихрей совершали сложные колебательные движения внутри цилиндров.



Фиг. 5



Фиг. 6

Фиг. 5. Зависимость среднего трения от времени для  $Ta = 1,1Ta_c$ ,  $n = n_c$  и частот пульсаций скоростей цилиндров  $\sigma = 2,5; 9$  и  $15$  в случае синхронных колебаний обоих цилиндров. На графике показана зависимость скоростей вращения цилиндров от времени (пунктирной линией)

Фиг. 6. Зависимость положения центра вихрей (координата  $\eta$ ) от времени в течение одного периода вращения цилиндров в случае синхронных колебаний обоих цилиндров (кривая 1 – для пары вихрей, вращающихся в середине ячейки по направлению к внутреннему цилиндру, и 2 – для пары, вращающейся в противоположном направлении). Показаны изменения среднего трения за период (кривая 3) и скоростей вращения цилиндров (кривая 4) (без соблюдения масштаба)

Были проведены расчеты для случая колебаний внутреннего цилиндра на фоне стационарного течения Куэтта. В этом случае также развивалось вторичное вихревое периодическое течение, которое по своей структуре подобно стационарному течению с вихрями Тейлора. Однако существует участок, на котором трение резко возрастает, а потом резко падает. Проводились расчеты при  $Ta < Ta_{c0}$ , в этом случае вихри существовали только на некотором отрезке времени из периода колебаний. В [7] тоже проводились расчеты вторичных течений для случая колебаний внутреннего цилиндра на фоне обычного течения Куэтта при  $\epsilon = 0,3$ . Вторичные течения, рассчитанные в [7], имеют схожую с полученными результатами структуру: среднее трение имеет пиковое значение вблизи момента времени  $T/2$  и сохраняет почти постоянное значение на остальном временном интервале.

**Заключение.** Исследовано течение в зазоре между двумя цилиндрами, вращающимися с периодической по времени скоростью. Были рассмотрены различные случаи: периодическое изменение скорости внешнего цилиндра на фоне вращения внутреннего цилиндра с постоянной скоростью, периодическое изменение скорости внутреннего цилиндра около ненулевого среднего значения и неподвижным внешним цилиндром, синхронные колебания обоих цилиндров около нулевого среднего значения скорости. Разработан эффективный вычислительный метод для изучения нелинейного вторичного течения в пульсирующем течении между двумя цилиндрами.

С помощью периодических изменений скорости вращения цилиндров можно добиваться стабилизации или дестабилизации по сравнению со стационарным течением Куэтта. Получены с помощью теории Флоке критические параметры линейной теории устойчивости этих нестационарных течений. Подтвержден вывод работ [2, 3, 7] о

слабой дестабилизации в случае колебаний внутреннего цилиндра на фоне стационарного течения Куэтта. Результаты исследования линейной устойчивости пульсирующего вращательного течения между цилиндрами полностью совпадают с экспериментальными и численными результатами работы [9].

Впервые проведены нелинейные расчеты вторичных течений для пульсирующего вращательного течения в зазоре между цилиндрами. При гармонических осцилляциях угловой скорости образуются негармонические вторичные нелинейные течения. Численно обнаружены перестройки качественной структуры течений за один период для некоторых значений частоты колебаний угловой скорости цилиндров. Результаты нелинейных расчетов качественно соответствуют экспериментам [9].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Donnelly R.J.* Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders. III. Enhancement of stability by modulation // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1964. V. 281. № 1384. P. 130–139.
2. *Hall P.* The stability of unsteady cylinder flows // *J. Fluid Mech.* 1975. V. 67. Pt 1. P. 29–63.
3. *Riley P.J., Laurence R.L.* Linear stability of modulated circular Couette flow // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 75. Pt 4. P. 625–646.
4. *Walsh T.J., Wagner W.T., Donnelly R.J.* Stability of modulated Couette flow // *Phys. Rev. Lett.* 1987. V. 58. № 24. P. 2543–2546.
5. *Carmi S., Tustaniwskyj J.I.* Stability of modulated finite-gap cylindrical Couette flow: linear theory // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 108. P. 19–42.
6. *Walsh T.J., Donnelly R.J.* Taylor – Couette flow with periodically corotated and counterrotated cylinders // *Phys. Rev. Lett.* 1988. V. 60. № 8. P. 700–703.
7. *Barenghi C.F., Jones C.A.* Modulated Taylor – Couette flow // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 208. P. 127–160.
8. *Murray B.T., McFadden G.B., Coriell S.R.* Stabilization of Taylor-Couette flow due to time-periodic outer cylinder oscillation // *Phys. Fluids. A.* 1990. V. 2. № 12. P. 2147–2156.
9. *Aouidef A., Normand C., Stegner A., Westfreid J.E.* Centrifugal instability of pulsed flow // *Phys. Fluids.* 1994. V. 6. № 11. P. 3665–3676.
10. *Шкадов В.Я.* Стационарные течения вязкой жидкости между коаксиальными вращающимися цилиндрами после потери устойчивости // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1969. № 3. С. 81–86.
11. *Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A.* Spectral methods in fluid dynamics. N.Y.: Springer, 1988, 557 p.
12. Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs and mathematical tables / Ed. Abramovitz M., Stegun I. N.Y.: Wiley, 1972. 1046 p. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамовица М., Стиган И.М. Наука, 1979. 830 с.
13. *Kleiser L., Schumann U.* Treatment of incompressibility and boundary conditions in 3-D numerical spectral simulations of plane channel flows // *Proc. 3rd GAMM Conf. on Numerical Methods in Fluid Mechanics* / Ed. Hirshel E.H. Braunschweig: Vieweg, 1980. P. 165–173.
14. *Dennis S.C.R., Quartapelle L.* Direct solution of the vorticity-stream function ordinary differential equations by a Chebyshev approximation // *J. Comput. Phys.* 1983. V. 52. № 3. P. 448–463.
15. *Рождественский Б.Л., Симакин И.Н.* Численное исследование устойчивости плоского течения Пуазейля относительно двумерных возмущений конечной амплитуды: Препринт № 157. М.: ИПМ АН СССР, 1981. 40 с.
16. *Rozhdestvensky B.L., Stoynov M.I.* Simulation of turbulent flows by numerical integration of Navier – Stokes equations // *Proc. 12th Intern. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics: Lecture Notes in Physics.* № 371. N.Y.: Springer, 1990. P. 19–34.
17. *Joseph D.D.* Stability of Fluid Motions. N.Y.: Springer, 1976. V. 1. 282 p.; V. 2. 274 p. (Рус. перев.: Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.)