

УДК 532.543

© 1999 г. Я.В. БАБКИН

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО РАСТЕКАНИЯ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ В МЕЛКОВОДНЫХ УСТЬЯХ РЕК

На основе упрощенной модели проводится численное изучение трехмерного растекания жидкости в модели речного эстуария. Горизонтальные размеры изучаемой области течения и расход втекающей воды выбраны такими же, что и в Невской губе. Для изучения влияния препятствий на поток проведены сравнительные расчеты. Получены картины распределения горизонтальных скоростей, уровня свободной поверхности, коэффициента трения Шези, а также определена скорость распространения фронта возмущения по жидкости.

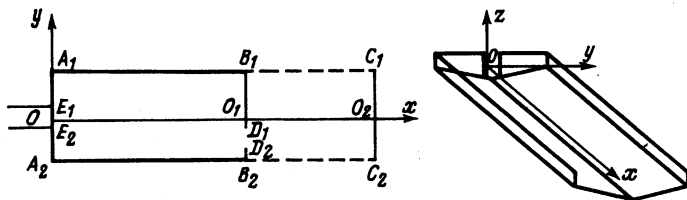
При изучении течений в эстуариях предпочтение отдается двумерным моделям, полученным из трехмерных осреднением по глубине (обширный обзор подобных моделей дается в [1]). Связано это с тем, что в эстуариях характерная глубина много меньше характерных горизонтальных размеров, поэтому уточнения, даваемые трехмерными моделями, несущественны (и зачастую не нужны – см. [2]), а затраты вычислительного времени увеличиваются как минимум на порядок [3]. С использованием теории мелкой воды были проведены, в частности, исследования по изучению течений в Невской губе Финского залива [4, 5], что было связано со строительством сооружений для защиты Ленинграда от наводнений. Обзор теоретических и экспериментальных методов исследования течений в этой акватории был дан в [6]. Для определенного класса задач двумерные модели могут быть упрощены. Одной из таких задач является упомянутое течение в Невской губе.

В настоящей работе на основе модели [7], являющейся дальнейшим упрощением модели Сен-Венана, проводится численное изучение трехмерного растекания жидкости в модельном эстуарии.

1. Постановка задачи. Пусть эстуарий в плане представляется прямоугольником $A_1C_1C_2A_2$. Участок E_1E_2 – "устье реки". Ось x делит отрезок A_1A_2 пополам и параллельна нижней границе, ось y направлена вдоль левой границы, координатная плоскость xy проходит через точки A_1, A_2 перпендикулярно направлению силы тяжести (фиг. 1). Отрезки B_1D_1 и B_2D_2 – препятствия потоку (мы будем рассматривать случаи как их наличия, так и отсутствия). Уравнение поверхности дна $z = z_*(x, y)$ имеет вид

$$z_* = \begin{cases} h_1 \left(\frac{y}{a} - 1 \right), & 0 \leq x \leq x_1; -\infty, \quad x \geq x_2 \\ \frac{(h_2 - h_1)x + h_1x_2 - h_2x_1}{x_2 - x_1} \left(\frac{y}{a} - 1 \right), & x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

где h_1, h_2 – известные постоянные, $a = a_1$ при $y \geq 0$, $a = a_2$ при $y < 0$. Далее, предполагаем, что непроницаемая часть границ эстуария, представляющихся прямоугольником $A_1C_1C_2A_2$, направлена вертикально вверх, так что затопление прибрежной полосы не происходит и граница эстуария остается неподвижной. Численные значения



Фиг. 1. Область течения в плане (слева) и в трехмерном изображении (справа); показано только для $x < x_1$). Координаты точек: $A_1 = (0, a_1)$, $B_1 = (x_1, a_1)$, $C_1 = (x_2, a_1)$, $O_1 = (x_1, 0)$, $O_2 = (x_2, 0)$, $C_2 = (x_2, a_2)$, $B_2 = (x_1, a_2)$, $A_2 = (0, a_2)$, $E_1 = (0, e_1)$, $E_2 = (0, e_2)$, $D_1 = (x_1, d_1)$, $D_2 = (x_1, d_2)$.

параметров следующие: $h_1 = 4,5$ м, $h_2 = 10$ м, $a_1 = 7500$ м, $a_2 = -7500$ м, $x_1 = 28000$ м, $x_2 = 32000$ м, $e_1 = 1500$ м, $e_2 = -500$ м, $d_1 = -1500$ м, $d_2 = -5500$ м. Геометрические размеры в задаче и другие параметры при решении подбираются таким образом, чтобы можно было соотнести результаты расчетов с реальным физическим объектом – Невской губой Финского залива (область, представляющая в плане прямоугольником $A_1B_1B_2A_2$, имеет такую же длину, ширину и среднюю глубину, что и Невская губа).

Рассматривается турбулентное течение вязкой несжимаемой жидкости по шероховатому дну из "устья", представляющегося в плане отрезком E_1E_2 .

Обозначим через $h(x, y, t) \geq 0$ глубину жидкости, $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ – проекции осредненной по глубине потока горизонтальной скорости на оси x и y , $H(x, y, t) = h(x, y, t) + z_*(x, y)$ – уровень свободной поверхности, C – коэффициент трения Шези, Δ – характерную величину выступов шероховатости, g – ускорение свободного падения, ν – кинематическую вязкость жидкости. Тогда после отбрасывания инерционных членов система уравнений Сен-Венана для мелкой воды совместно с формулой для C приведет к виду [7]

$$u = -Ch^{1/2} \frac{\partial H}{\partial x} |\text{grad } H|^{-1/2}, \quad v = -Ch^{1/2} \frac{\partial H}{\partial y} |\text{grad } H|^{-1/2} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(Ch^{3/2} \frac{\partial H}{\partial x} |\text{grad } H|^{-1/2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Ch^{3/2} \frac{\partial H}{\partial y} |\text{grad } H|^{-1/2} \right) \quad (1.2)$$

$$p(x, y, z, t) = p_0 + \rho g (H(x, y, t) - z) \quad (1.3)$$

$$\Phi \left(\text{Re}, \frac{\Delta}{h}, \frac{C}{\sqrt{g}} \right) = 0, \quad \text{Re} = \frac{h\sqrt{u^2 + v^2}}{\nu} \quad (1.4)$$

где Φ – эмпирическая зависимость, Re – локальное число Рейнольдса. Искомыми функциями являются H , u , v , p и C . Как видно из (3), в используемом приближении давление определяется по гидростатическому закону.

В литературе предлагается обширный набор формул для функции Φ , обзор которых можно найти в [8, 9], при этом помимо указанных в (4) аргументов могут присутствовать и другие, в частности, характеристики турбулентности. В настоящей работе величина C/\sqrt{g} либо просто полагалась равной константе (как в [3–5]), со значением 19,612, либо вычислялась по формуле из работы [8]

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = \begin{cases} \left(\frac{h}{3\nu} \right)^{1/2} (u^2 + v^2)^{1/4}, & \text{Re}_\Delta < 6,3, \\ 5,66 \lg \left(\frac{h}{\Delta} \right) + \Omega, & \text{Re}_\Delta \geq 6,3, \end{cases} \quad \Omega = \begin{cases} 8,10, & 6,3 \leq \text{Re}_\Delta < 16 \\ 13,6 - 5,66 \lg(\text{Re}_\Delta^{0,81}), & 16 < \text{Re}_\Delta < 45 \\ 6,01, & \text{Re}_\Delta \geq 45 \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\text{Re}_\Delta = \frac{\Delta \sqrt{g}}{h C} \text{Re}$$

Начальные условия следующие: при $t = 0$ $u = v = H = 0$.

Рассмотрим краевые условия. На всех непроницаемых границах нужно задать единственное условие, определяющее H или ее производную по нормали к этой границе. На проницаемой границе в устье E_1E_2 может быть задана $\partial H/\partial x$, но в реальных задачах она, как правило, неизвестна. Напротив, расход жидкости обычно легко определить, поэтому будем считать, что в устье известен расход жидкости

$$Q(t) = \int_{e_2}^{e_1} u(0, y, t) h(0, y, t) dy \quad (1.6)$$

причем $Q(t) = 0$ при $t = 0$ и $Q(t) > 0$ при $t > 0$. Тогда, пользуясь тем, что $H \ll h$, и принимая, что в устье $|\partial H/\partial y| \ll |\partial H/\partial x|$, а $\partial H(0, y, t)/\partial x$ от y не зависит, можем найти и $\partial H/\partial x$. На твердых границах (берегах и препятствиях) должно выполняться условие непротекания

$$\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial z_*}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial z_*}{\partial y} = 0$$

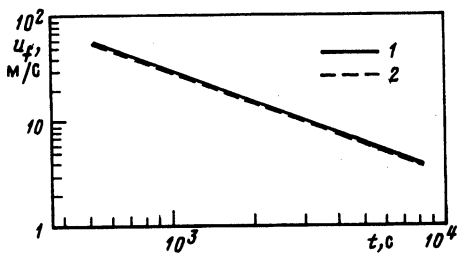
Это означает, что $\partial H/\partial x = 0$ вдоль границ, параллельных оси y , и $\partial H/\partial y = 0$ вдоль границ, параллельных оси x . При $x = x_2$ полагаем $H = 0$.

Система уравнений (1), (2), (5) со сформулированными выше начальными и граничными условиями замкнута.

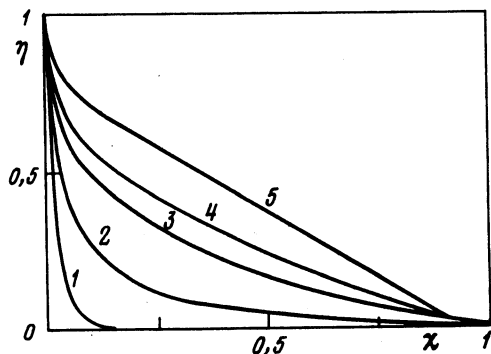
Для решения задачи использовалась разностная схема предикатор-корректор Мак-Кормака [10] – явная схема второго порядка точности. Численный алгоритм использует метод "размазывания" скачка по сетке. Для устойчивости схемы применительно к сформулированной задаче достаточно выполнения условий $|u|(\Delta t/\Delta x) \leq 1$, $|v|(\Delta t/\Delta y) \leq 1$, где Δx , Δy , Δt – шаги разбиения вдоль соответствующих осей.

Расчетная сетка прямоугольная и равномерная; вдоль осей x , y шаг варьировался от 125 до 250 м; по времени – от 0,00001 до 0,008 с (некоторые варианты разбиений см. в таблице). Другие параметры взяты близкими к реальным значениям в Невской губе: $Q = 2,5 \cdot 10^3 \text{ м}^3/\text{с}$, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\Delta = 10^{-2} \text{ м}$. Программа решения нестационарной задачи построена по следующему алгоритму. Для нового момента времени t по (2) вычисляется слой для $H(x, y, t)$, становится известной скорость по (1) и в случае, если сила трения ищется по формулам (5), по ним с помощью итераций вычисляется коэффициент Шези, а по (6) вычисляется уровень свободной поверхности в устье. Расчет продолжается до момента, пока отношение производной $\partial h/\partial t$ к слагаемым, стоящим справа в (2), не составит всюду в прямоугольнике $A_1B_1B_2A_2$ величину, меньшую по абсолютной величине 0,01. Соответствующее решение в пределах точности расчетов будет стационарным решением поставленной задачи, к которому стремится нестационарное при $t \rightarrow \infty$.

Номер расчета	Δx , м	Δy , м	Δt , с	Коэффициент C	Наличие препятствий
I	250	250	0,008	$C = \text{const}$	–
II	250	250	0,008	Формулы (5)	–
III	250	250	0,008	$C = \text{const}$	+
IV	166,7	250	0,008	"	–
V	166,7	166,7	0,006	"	–



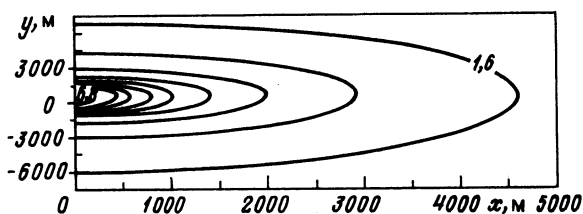
Фиг. 2



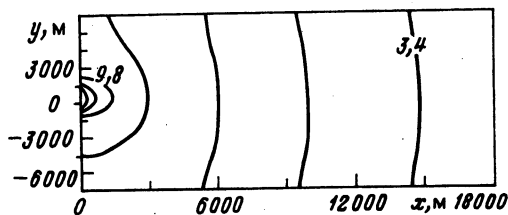
Фиг. 3

Фиг. 2. Зависимость скорости распространения фронта возмущений u_f от времени t в логарифмическом масштабе. Кривые 1,2 соответствуют расчетам I, V

Фиг. 3. Расчет V. Изменение профиля потока во времени. Кривые 1–5 соответствуют $t = 2, 100, 500, 10^3, 10^4$ с



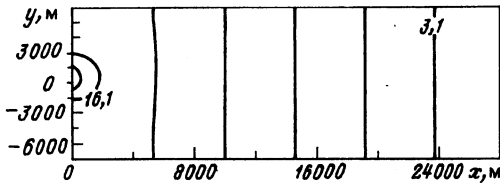
Фиг. 4. Линии уровня $H = \text{const}$ (расчет I) $t = 100$ с. Изолинии проведены через 0,65 мм



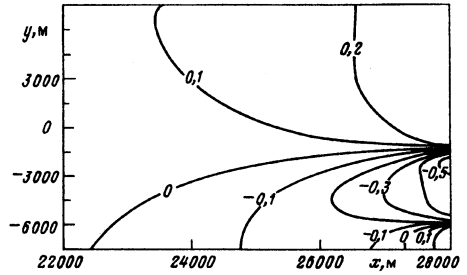
Фиг. 5. Линии уровня $H = \text{const}$ (расчет I). $t = 1000$ с. Изолинии проведены через 1,6 мм

2. Результаты расчетов. Система обозначений для основных вариантов проведенных расчетов приведена в таблице. Указанный в таблице шаг по времени близок к максимальному, при котором разностная схема сходится и при этом не происходит дисперсионных осцилляций.

Будем считать возмущение дошедшим до некоторого узла сетки, если величина H превысит 10^{-4} м. Графики зависимости проекции на ось x скорости u_f распространения фронта (при $y = 0$) от времени для расчетов I и V представляют собой прямые линии в логарифмических осях и практически совпадают, что говорит о сходимости численного алгоритма (фиг. 2). На фиг. 3 представлены профили потока при $y = 0$ $\eta(\chi)$, где $\chi = x/x_f$, $\eta = H(x, 0, t)/H(0, 0, t)$, для различных моментов времени t . При увеличении t профили стремятся к некоторому стационарному, состоящему из трех частей: на протяжении от 0 до примерно 0,1 он похож на профиль потока вблизи источника при осесимметричном растекании [11], на участке от 0,1 до 0,9 это – прямая (как следует



Фиг. 6



Фиг. 7

Фиг. 6. Линии уровня $H = \text{const}$ (расчет I). $t = 10000$ с, течение близко к стационарному. Изолинии проведены через 2,6 мм. Хорошо видно, как горизонтали выстраиваются перпендикулярно берегам

Фиг. 7. Относительная разница компонент скорости u , полученных в результате расчетов I (без препятствия), III (с препятствием)

из [7], стационарный одномерный поток при $C = \text{const}$ действительно имеет форму свободной поверхности в виде прямой), а на оставшемся – тоже почти прямая; "слом" в точке 0,9 связан с тем, что дно на последнем участке понижается в направлении оси x .

Обратимся теперь к картине распределения уровня свободной поверхности. Сначала, когда фронт возмущения еще не достиг берегов, типичная картина линий уровня свободной поверхности имеет вид, показанный на фиг. 4. В дальнейшем горизонтали вблизи фронта приобретают все больший радиус кривизны (фиг. 5). Это для достаточно больших времен приводит к тому, что они становятся перпендикулярными берегам канала (фиг. 6). Линии уровня, не перпендикулярные левому и правому берегам, сосредотачиваются вблизи устья. Течение тем самым приближается к одномерному, т.е. зависимость решения от координаты y в значительной части расчетной области фактически пропадает.

Результаты расчетов (II) коэффициента трения Шези показывают, что если положить $C = 61,425 \text{ м}^{1/2}/\text{с}$ всюду, то это приведет к относительно небольшому завышению силы трения в центре потока и ее сильному занижению у берегов. Соответственно ведет себя и компонента скорости u при сопоставлении результатов расчетов I и II, при этом разница в распределении уровня свободной поверхности составляет менее 10%.

Большой интерес к изучению гидродинамики Невской губы возник из-за дискуссий о влиянии строящейся дамбы на картину течения в этой акватории и, как следствие, на концентрацию вредных примесей в эстуарии. Для изучения влияния дамбы был проведен расчет III. Препятствия (фиг. 1, слева) хотя и не моделируют реальной геометрии расположения дамбы, относительное уменьшение живого сечения отражают правильно. На фиг. 7 показано относительное различие полей скоростей u , полученных в результате расчетов I и III по формуле $((u)_I - (u)_{III}) / (u)_I$. Видно, что сколько-нибудь заметное уменьшение компоненты u произошло лишь в пределах 4-километровой зоны вблизи дамбы. Напротив, в части области, непосредственно примыкающей к свободному от дамбы створу, скорость сильно возросла. Учитывая, что в действительности дамба не является сплошной (для этого случая в [4] указывается, что влияние дамбы сосредоточено в пределах 1,5–2,0 км от нее) и возможно попеременное открытие одних и закрытие других створов, можно утверждать, что влияние препятствий на течение имеет лишь локальное значение.

3. Обоснованность модели и использованного численного алгоритма. Численное решение позволяет оценить величину отброшенных инерционных членов $du/dt, dv/dt$ относительно любого из двух оставшихся (например $F_C = gh^{-1}C^{-2}u\sqrt{u^2 + v^2}$) при

предпринятых в [7] для вывода уравнений (1.1), (1.2) упрощениях. Оказалось, что вне зависимости от способа вычисления силы трения область, где инерционные члены не очень малы, сосредоточена в 4-километровой полосе, прилегающей к левой границе эстуария, поэтому можно считать, что в основной части расчетной области построенная модель работает правильно. При уменьшении шага разбиения относительная величина ошибок уменьшается, так что для точного (а не численного с конечными шагами разбиения) решения ошибки будут, вероятно, существенно меньше, т.е. модель (1.1) – (1.4) сама по себе достаточно точна.

Чтобы оценить корректность численного алгоритма, рассмотрим задачу о нестационарном осесимметричном автомодельном растекании жидкости по горизонтальной плоскости [11].

Направим ось z вертикально вверх, второй координатой будет r – расстояние до этой оси. Пусть $z_*(r) \equiv 0$ – уравнение поверхности дна, C – константа, в начальный момент времени жидкости на плоскости нет. В точке $(0, 0)$ находится точечный источник с вытекающим объемом жидкости $Q(t) = Q_0 t^\alpha > 0$, Q_0 – константа, и жидкость растекается по плоскости $z = 0$. Переписывая (1.2), (1.3) для цилиндрической системы координат, имеем

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{C}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sqrt{-\frac{\partial h}{\partial r}} h^3 \right) = 0, \quad v_r = C \sqrt{-\frac{\partial h}{\partial r}} h, \quad v_\varphi = 0$$

Сформулированную выше задачу можно решать непосредственно с помощью описанного в разд. 2 численного алгоритма или воспользоваться автомодельной постановкой задачи, решение которой будет иметь вид [11]

$$h(r, t) = \xi_f^{3/2} \left(\frac{Q_0^3}{C^4} \right)^{1/7} t^{(3\alpha-4)/7} \Psi \left(\frac{\xi}{\xi_f} \right), \quad \xi = \frac{r}{(Q_0 C)^{2/7} t^{2(\alpha+1)/7}}$$

$$\left(z \sqrt{-\Psi^3 \Psi'} \right)' - \frac{2}{7} (\alpha + 1) z^2 \Psi' + \frac{1}{7} (3\alpha - 4) z \Psi = 0$$

$$\xi_f = \left(2\pi \int_0^1 z \Psi dz \right)^{-2/7}$$

Реализация этой двойной программы показала, что, например, относительная разница в распределениях уровня свободной поверхности $H(r, t)$ для $\alpha = 0$, $C = 61,425 \text{ м}^{1/2}/\text{с}$ при $t = 9,00$ с составляет доли и единицы процентов и уменьшается с уменьшением шага разбиения. Вообще для всех значений α в диапазоне от 0 до 3 и для t в пределах до 1000 с, для которых проводились расчеты, погрешности в распределении уровня свободной поверхности (и, следовательно, скорости течения) всюду малы. Разница абсцисс фронта не превысила 0,5% и может быть уменьшена уменьшением шага разбиения. Все это говорит о том, что примененный численный алгоритм корректен.

Заключение. Проведенные расчеты продемонстрировали, что упрощение уравнений модели [7] делает реальным построение (с приемлемой точностью) решений сложных задач о распространении нестационарных возмущений и о стационарных течениях в крупномасштабных акваториях малой глубины. Кроме этого, становится возможным применение сложных эмпирических формул для расчета коэффициента трения Шези, что позволяет повысить точность описания течения в непосредственной близости от берегов, где число Рейнольдса уже не очень велико, и квадратичный закон сопротивления не работает. Выяснено, что применяемая модель работает правильно на всем эстуарии, за исключением 4-километровой полосы, примыкающей к устью.

В заключение автор благодарит С.С. Григоряна за проявленное внимание к работе, ценные замечания и предложения.

Работа поддержана Международным научным фондом Дж. Сороса (грант М8М000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чубаренко Б.В., Чубаренко И.П. Двумерные модели в задачах гидродинамики прибрежной зоны, эстуариев и внутренних водоемов: обзор литературы. Калининград, Атлант. отд. ин-та Океанологии РАН. 1992. – Деп. в ВИНТИ 25.06.92, № 2061–В92. 47с.
2. Григорян С.С. Об осреднении физических полей // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. № 4. С. 846–850.
3. Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А. Интегрирование уравнений трехмерного движения в произвольной области для расчета наводнений // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1987. Т. 23. № 5. С. 462–469.
4. Исследование водной системы Ладожское озеро – река Нева – Невская губа и восточная часть Финского залива // Тр. Гидрол. ин-та. Вып. 321. 1988. 152с.
5. Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пелиновский Е.Н. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 271с.
6. Любимов Г.А. О гидравлическом моделировании течения в дельте Невы и восточной части Финского залива // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 5. С. 57–65.
7. Григорян С.С. О математическом моделировании течений в крупномасштабных мелководных акваториях // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 5. С. 615–616.
8. Гришанин К.В. Гидравлическое сопротивление естественных русел. СПб.: Гидрометеиздат, 1992. 181с.
9. Эглит М.Э. Неустановившиеся движения в руслах и на склонах. М.: Изд-во МГУ, 1986. 95с.
10. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. М.: Мир, 1991. 552с.
11. Григорян С.С., Бабкин Я.В. Автомодельные решения уравнений мелководных течений в крупных акваториях // Докл. РАН. 1997. Т. 355. № 5. С. 626–627.

Москва

Поступила в редакцию
25.XII.1997