

УДК 533.697:519.31:621-135

© 1999 г. А.Н. КРАЙКО, А.А. ОСИПОВ

## ОПТИМИЗАЦИЯ СТУПЕНИ ТУРБИНЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО РАДИАЛЬНО УРАВНОВЕШЕННОГО ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

На примере оптимизации ступени турбины по снимаемой мощности в приближении осесимметричного радиально уравновешенного (в контрольных межвенцовых сечениях) течения идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа получено строгое решение отвечающей такой модели одномерной вариационной задачи. Оптимизация выполнена при фиксированных потоке на входе в ступень, ее радиальных габаритах и скорости вращения рабочего колеса и при ограничении на максимально допустимые числа Маха и углы поворота потока перед и за рабочим колесом. Решение сведено к определению распределений осредненных по времени и в окружном направлении параметров потока в контрольных сечениях. Обнаружены два типа оптимальных распределений с участками двустороннего и краевого экстремумов по числу Маха и углу поворота потока. В одном из них предельные числа Маха и углы поворота потока достигаются одновременно у втулки за направляющим аппаратом и (или) за рабочим колесом. Примеры расчетов демонстрируют возможность заметного увеличения мощности в результате оптимизации ступени.

Под оптимизацией ступени турбины понимается профилирование направляющего аппарата и рабочего колеса, реализующих максимум некоторой ее характеристики, например, снимаемой мощности. Точное решение такой задачи чрезвычайно сложно. Поэтому при проектировании турбомашин применяется поэтапное приближенное решение задач меньшей размерности. Одна из них состоит в выборе осредненных по времени и в окружном направлении распределений параметров потока за направляющим аппаратом и рабочим колесом. Предполагается, что выбранные распределения могут быть обеспечены соответствующим профилированием лопаточных венцов. Впервые задача определения оптимальных распределений параметров в такой постановке была сформулирована в работах [1, 2]. Найденные в них решения ограничены случаями отсутствия закрутки в одном из контрольных сечений. Это позволило найти искомые распределения в квадратурах, хотя подобное ограничение существенно сузило множество допускаемых распределений.

В дальнейшем одномерные модели, аналогичные принятой в [1, 2], нашли широкое распространение [3-6] и сами по себе, и как этап решения более сложных квазитрехмерных задач. При этом в модель нередко включалось условие радиального равновесия или его обобщения. Однако авторы [3-6] и других подобных работ ограничивались в лучшем случае прямыми методами оптимизации. При несомненной ценности получающихся с их помощью результатов они без предварительного анализа непрямых методами вариационного исчисления дают неполную информацию о структуре оптимальных решений. Это может стать причиной не только количественных погрешностей, но и неточностей принципиального характера, в том числе в постановках задачи. Одна из целей данной работы – выявить именно такие особенности оптимальных решений. Об этих особенностях следует помнить и при оптимизации ступени турбины по целевым функциям, отличным от мощности, и при решении аналогичных задач в иных постановках. Кстати, в квазитрехмерной постановке

"меридиональная" вариационная задача может решаться и как двумерная. Попытка такого решения, к сожалению, далекая от завершения, предпринималась в [7]; Знание установленных в одномерной задаче особенностей полезно и при оптимизации ступени в трехмерной постановке методами, развиваемыми в последнее время для оптимального профилирования пространственных крыльев [8] и профилей плоской решетки [9].

**1. Основные предположения и формулировка вариационной задачи.** Рассмотрим течение идеального газа в ступени турбины, состоящей из направляющего аппарата и расположенного за ним рабочего колеса. Кольцевая проточная часть ступени ограничена поверхностями втулки и внешней стенки. Течение в ступени описывается распределениями осредненных по времени и в окружном направлении параметров до и после ее венцов. Поток перед направляющим аппаратом по предположению однородный и осевой. Кроме входного введем два плоских контрольных сечения. Величины с индексом 0 – параметры перед направляющим аппаратом, 1 – за ним, а без индекса – за рабочим колесом (в теории лопаточных машин – в сечении 2). Ограничимся совершенным газом с постоянными теплоемкостями и показателем адиабаты  $\kappa$ . В силу допущения о радиальном равновесии радиальная компонента скорости в контрольных сечениях равна нулю, а поток в них определяется распределениями по радиальной координате  $r$  давления  $p$ , плотности  $\rho$ , осевой  $u$  и окружной  $w$  компонент скорости. Принятые здесь обозначения  $u$  и  $w$  для компонент скорости отличаются от обозначений ( $c_a$  и  $c_u$ ), обычно используемых в работах по лопаточным машинам.

Идеальность газа и вводимые ниже ограничения на максимально допустимые числа Маха, исключающие возникновение ударных волн, обеспечивают изэнтропичность течения ( $S = S_1 = S_0$ ), а стационарность потока в направляющем аппарате – его изоэнергетичность в сечении 1 ( $H_1 = H_0 = \text{const}$ ). Здесь  $S$  и  $H$  – удельные энтропия (или "энтропийная функция") и полная энтальпия. Для определения параметров потока за рабочим колесом воспользуемся уравнением энергии вдоль струйки тока и получаемой из уравнения неразрывности связью ее координат  $r_1$  и  $r$ . В результате получим следующую систему соотношений:

$$L^0 \equiv \frac{dp_1}{dr_1} - \frac{\rho_1 w_1^2}{r_1} = 0, \quad L \equiv \frac{dp}{dr} - \frac{\rho w^2}{r} = 0 \quad (1.1)$$

$$L^1 \equiv \frac{dr}{dr_1} - \frac{\rho_1 u_1 r_1}{\rho u r} = 0 \quad (1.2)$$

$$H_1 - \omega w_1 r_1 = H - \omega w r, \quad H \equiv (u^2 + w^2)/2 + h(p, \rho) \quad (1.3)$$

$$S = S_1 = S_0 \quad (S = S(p, \rho) = p/\rho^\kappa) \quad (1.4)$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения рабочего колеса в рад/с,  $h$  – удельная энтальпия, как и  $S$  – известная функция  $p$  и  $\rho$ , (1.1), (1.2) и (1.3) – уравнения радиального равновесия, неразрывности и энергии, а (1.4) – условие изэнтропичности.

Размеры проточной части ступени в контрольных сечениях определяются радиусами втулки  $r_{h1}$  и  $r_h$  и внешней стенки канала  $r_{r1}$  и  $r_r$ . Здесь и далее индексами  $h$  и  $t$  отмечены параметры на втулке и внешней стенке, а все переменные безразмерные. За масштабы длины, скорости, плотности и давления взяты  $r_{r1}^*$ ,  $a_{*0}$ ,  $\rho_{*0}$  и  $\rho_{*0}(a_{*0}^*)^2$ , где  $a$  – скорость звука, градусом отмечены размерные, а звездочкой – критические величины. Поэтому  $r_{r1} = 1$ ,  $S_0 = 1/\kappa$  и  $H_0 = 0,5(\kappa + 1)/(\kappa - 1)$ .

Равномерный осевой поток на входе в ступень определяется тремя константами:  $S_0$ ,  $H_0$  и расходом газа

$$G = \int_{r_h}^{r_r} \rho u r dr = \int_{r_{h1}}^{r_{r1}} \rho_1 u_1 r_1 dr_1$$

При заданных  $S_0, H_0, G$  и угловой скорости  $\omega$  для определения параметров потока в контрольных сечениях систему (1.1)–(1.4) нужно дополнить двумя соотношениями, отражающими воздействие на поток направляющего аппарата и рабочего колеса, например распределения за ними углов вектора скорости потока с осью ступени. После этого выбор начальных значений  $p_{h1}$  и  $p_h$  или  $p_{t1}$  и  $p_t$  для интегрирования уравнений (1.1) должен обеспечить заданный расход  $G$ . Задание распределения одного из параметров в контрольном сечении определяет геометрию проточной части предыдущего венца. Естественно потребовать, чтобы параметры потока удовлетворяли некоторым ограничениям. Примем, что

$$M_1 \leq M_1^m, M \leq M^m, |\tau_1| \leq \tau_1^m, |\tau| \leq \tau^m \quad (1.5)$$

$$M_1^2 = \frac{u_1^2 + (w_1 - \omega r_1)^2}{a_1^2}, M^2 = \frac{u^2 + w^2}{a^2}, \tau_1 = \frac{w_1}{u_1}, \tau = \frac{w - \omega r}{u}$$

Константы  $M_1^m$  и  $M^m$  задаются из соображений обеспечения бескачкового обтекания лопаток рабочего колеса и спрямляющего аппарата, который может располагаться за колесом. Константы  $\tau_1^m$  и  $\tau^m$  определяют максимальный (по модулю) поворот потока относительно оси турбины, достижимый в реальных, т.е. не бесконечно густых, венцах направляющего аппарата и рабочего колеса. Наконец, мощность ступени находится по формуле

$$W = \int_{r_{h1}}^{r_1} (H_1 - H) \rho_1 u_1 r_1 dr_1$$

Вариационная задача оптимизации ступени формулируется следующим образом. Требуется найти такие распределения параметров потока в контрольных сечениях (точнее – их зависимости от  $r_1$ , так как  $r$  – функция  $r_1$ ), которые при заданных  $S_0, H_0, G, r_{h1}, r_{t1}, r_h, r_r$  и  $\omega$ , удовлетворяя соотношениям (1.1)–(1.4) и ограничениям (1.5), реализуют максимум мощности  $W$ . Максимум  $W$  обеспечивается оптимальным выбором управлений. В точной постановке ими были бы функции, определяющие форму лопаток направляющего аппарата и рабочего колеса. В принятой модели с учетом ограничений (1.5) в качестве управлений в контрольных сечениях удобно рассматривать функции  $\tau_1(r_1)$  или  $M_1(r_1)$  и  $\tau(r_1)$  или  $M(r_1)$ . Наряду с заданием всех габаритов венцов, т.е.  $r_{h1}, r_{t1}, r_h$  и  $r_r$ , часть из них можно рассматривать в качестве искомого управления. Ниже такая возможность в одном из примеров допускается в отношении  $r_r$ .

**2. Необходимые условия максимума снимаемой мощности.** Для получения необходимых условий оптимальности составим функционал Лагранжа

$$I = W + \mu G + \int_{r_{h1}}^{r_1} (\lambda^0 L^0 + \lambda L \frac{\rho_1 u_1 r_1}{\rho u r} + \lambda^1 L^1) dr_1$$

Здесь  $\mu$  – постоянный, а  $\lambda^0(r_1), \lambda(r_1)$  и  $\lambda^1(r_1)$  – переменные множители Лагранжа. При допустимом варьировании вариации  $\delta I$  и  $\delta W$  совпадают. Поэтому

$$\delta W = \delta I = \int_{r_{h1}}^{r_1} (A_{M1} \delta M_1 + A_{\tau 1} \delta \tau_1 + A_M \delta M + A_\tau \delta \tau + A_r \delta r) dr_1 + [\lambda^0 \delta p_1 + \lambda \delta p + \lambda^1 \delta r]_{r_{h1}}^{r_1} \quad (2.1)$$

При выводе (2.1) учтены связи между вариациями

$$\delta p_1 = B_{\tau 1} \delta \tau_1 + B_{M1} \delta M_1 \quad (2.2)$$

$$\delta p = C_\tau \delta \tau + C_M \delta M + C_{\tau 1} \delta \tau_1 + C_{M1} \delta M_1 + C_r \delta r \quad (2.3)$$

которые получаются из (1.3) и (1.4). Их же необходимо учитывать при анализе вклада в  $\delta W$  внеинтегральных членов, входящих в (2.1). Коэффициенты  $A_\varphi$ ,  $B_\varphi$  и  $C_\varphi$  в (2.1)–(2.3) – известные функции  $r_1$ ,  $r$  и параметров течения в контрольных сечениях,  $A_\varphi$  зависят еще от множителей Лагранжа и их производных.

При любых допустимых (необязательно оптимальных) распределениях параметров, пользуясь неопределенностью множителей Лагранжа, сформулируем для них так называемую сопряженную задачу. Положим, например

$$A_{M1} = A_M = A_r = 0, \quad \lambda_r^0 = \lambda_r = 0 \quad (2.4)$$

Это дает три обыкновенных дифференциальных уравнений и два граничных условия для определения  $\lambda^0$ ,  $\lambda$  и  $\lambda^1$ . Далее начнем со случая заданных  $r_h$  и  $r_l$ . Тогда  $\delta r_h = \delta r_l = 0$  и с учетом (2.4) выражение для  $\delta W$  из (2.1) примет вид

$$\delta W = \int_{r_{h1}}^{r_{l1}} (A_{\tau 1} \delta \tau_1 + A_\tau \delta \tau) dr_1 + \lambda_{h1}^0 \delta p_{h1} + \lambda_h \delta p_h \quad (2.5)$$

В (2.5) пока не определены постоянный множитель Лагранжа  $\mu$  и значение  $\lambda^1$  на одном из концов отрезка  $[r_{h1}, r_{l1}]$ . Произвол в их выборе используем для исключения из (2.5) вариаций, не являющихся независимыми. По постановке задачи допустимые вариации должны сохранять заданный расход  $G$  в контрольных сечениях. Чтобы обеспечить выполнение этих условий, на участках двустороннего экстремума по  $\tau_1$  и  $\tau$  введем две "компенсирующие" точки:  $r_1 = r_1^*$  и  $r_1^{**}$ . В них за счет произвола в выборе  $\mu$  и  $\lambda_l^1$  положим  $A_{\tau 1}(r_1^*) = 0$  и  $A_\tau(r_1^{**}) = 0$ . Благодаря этому становится несущественным вклад в  $\delta W$  отличных от нуля вариаций  $\delta \tau_1$  и  $\delta \tau$  в окрестностях соответственно точек  $r_1^*$  и  $r_1^{**}$ . Последние при варьировании других параметров, в том числе  $p_{h1}$ ,  $p_h$  и  $\tau_1$  и  $\tau$  вне указанных окрестностей, подбираются так, чтобы расход в контрольных сечениях не изменялся. После этого все вариации в (2.5) можно считать независимыми.

Согласно (2.2) и (2.3), вариации  $\delta p_{h1}$  и (или)  $\delta p_h$  произвольны лишь тогда, когда при  $r_1 = r_{h1}$  предельные значения, вводимые ограничениями (1.5) для двух управлений ( $\tau_1$  и  $M_1$  – в сечении 1 и  $\tau$  и  $M$  – в выходном сечении), не достигаются одновременно. Такое решение в данном сечении далее будем называть решением первого типа. В противном случае вариации управлений при  $r_1 = r_{h1}$  знакоопределенны, что, согласно (2.2) и (2.3), ограничивает допустимые  $\delta p_{h1}$  и  $\delta p_h$ .

В точках участков двустороннего экстремума по  $\tau_1$  и  $\tau$ , отличных от компенсирующих, необходимые условия оптимальности совпадают с условиями в точках  $r_1^*$  и  $r_1^{**}$ , т.е. равенства  $A_{\tau 1}(r_1) = 0$  и  $A_\tau(r_1) = 0$  на таких участках выполняются всюду. На участках же краевого экстремума по  $\tau_1$  и  $\tau$ , согласно (1.5), необходимые условия оптимальности имеют вид неравенств  $A_{\tau 1} \text{sign} \tau_1 \geq 0$  и  $A_\tau \text{sign} \tau \geq 0$ .

Оптимальные распределения  $M_1$  и  $M$  также могут иметь участки краевого экстремума. На них  $\lambda^0(r_1)$  и  $\lambda(r_1)$  определяются не первыми двумя равенствами (2.4), а уравнениями  $A_{\tau 1}(r_1) = 0$  и  $A_\tau(r_1) = 0$ . Кроме того, здесь выполняются неравенства  $A_{M1} \geq 0$  и  $A_M \geq 0$ .

Задание  $\tau_1(r_1)$  и  $\tau(r_1)$  (или  $M_1(r_1)$  и  $M(r_1)$ ) полностью определяет все распределения в контрольных сечениях. Поэтому участки краевого экстремума по  $\tau_1$  и  $\tau$  (или по  $M_1$  и  $M$ ) не могут содержать внутри себя участков краевого экстремума конечной протяженности по  $M_1$  и  $M$  (или по  $\tau_1$  и  $\tau$ ). Кроме того, оптимальные распределения параметров потока на отрезке  $[r_{h1}, r_{l1}]$  не могут иметь внутренних точек, где  $\tau_1$  и  $M_1$  или  $\tau$  и  $M$  одновременно достигали бы предельных значений. В противном случае на одном из примыкающих с двух сторон к такой точке участков одно из управлений превысило

бы свое предельное значение. Итак, оптимальные  $\tau_1$  и  $M_1$  или  $\tau$  и  $M$  могут одновременно достигать своих предельных значений лишь при  $r_1 = r_{h1}$  и  $r_1 = r_{r1}$ .

Необходимыми условиями оптимальности относительно произвольных вариаций  $\delta p_{h1}$  и  $\delta p_h$  будут равенства  $\lambda_h^0 = 0$  и  $\lambda_h = 0$ . Эти равенства определяют оптимальные значения  $p_{h1}$  и  $p_h$ , которые служат граничными условиями для оптимальных распределений, получаемых интегрированием уравнений (1.1).

Рассмотрим теперь решения второго типа, когда  $\tau_1$  и  $M_1$  и (или)  $\tau$  и  $M$  одновременно достигают в точке  $r_1 = r_{h1}$  своих предельных значений из (1.5). В силу сказанного выше обычно эта ситуация может быть, если точка  $r_1 = r_{h1}$  принадлежит участку краевого экстремума по одному из этих параметров, а предельное значение другого достигается лишь при  $r_1 = r_{h1}$ . Пусть эта точка принадлежит участку, где  $\tau_1$  и (или)  $\tau$  достигают своих предельных значений и их допустимые вариации знакоопределены. В таком случае, согласно (2.2) и (2.3), знакоопределенности допустимых вариаций  $\delta M_1(r_{h1})$  и (или)  $\delta M(r_{h1})$  при произвольном варьировании  $\tau_1$  и (или)  $\tau$  на участках двустороннего экстремума может быть обеспечена за счет надлежащего выбора  $\delta p_{h1}$  и (или)  $\delta p_h$ . Это означает, что вариации  $\delta M_1(r_{h1})$  и (или)  $\delta M(r_{h1})$  можно считать независимыми.

Учтя (2.2), (2.3) и условия на участках двустороннего экстремума по  $\tau_1$  и  $\tau$ , получим

$$\delta W = \int_{T_1} A_{\tau_1} \delta \tau_1 dr_1 + \int_T A_{\tau} \delta \tau dr_1 + [(\lambda^0 B_{\tau_1} + \lambda C_{\tau_1}) \delta \tau_1 + (\lambda^0 B_{M_1} + \lambda C_{M_1}) \delta M_1 + \lambda (C_{\tau} \delta \tau + C_M \delta M)]_h \quad (2.6)$$

Здесь  $T_1$  и  $T$  – участки отрезка  $[r_{h1}, r_{r1}]$ , где  $\tau_1$  и  $\tau$  соответственно достигают своих предельных значений. Вариации в правой части (2.6) независимы. Поэтому для решения данного типа необходимыми условиями оптимальности по отношению к варьированию параметров в точке  $r_1 = r_{h1}$  будут неравенства

$$\begin{aligned} (\lambda^0 B_{\tau_1} + \lambda C_{\tau_1})_h \text{sign } \tau_{1h} &\geq 0, \quad (\lambda^0 B_{M_1} + \lambda C_{M_1})_h \geq 0 \\ (\lambda C_{\tau} \text{sign } \tau)_h &\geq 0, \quad (\lambda C_M)_h \geq 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Необходимыми условиями оптимальности на участках краевого экстремума  $T_1$  и  $T$  являются неравенства  $A_{\tau_1} \text{sign } \tau_1 \geq 0$  и  $A_{\tau} \text{sign } \tau \geq 0$ . Предельно допустимые значения  $M_1$  и (или)  $M$  в точке  $r_{h1}$  служат граничными условиями для оптимальных распределений, получаемых интегрированием уравнений (1.1). Если же в решении второго типа точка  $r_1 = r_{h1}$  принадлежит участку краевого экстремума по  $M_1$  и (или)  $M$ , то здесь необходимыми условиями оптимальности являются неравенства  $A_{M_1} \geq 0$  и  $A_M \geq 0$ .

Среди оптимальных решений возможны такие, у которых в одном из сечений реализуется решение первого типа, а в другом – второго. Если, например, за колесом реализуется решение первого типа, а перед ним – второго, то  $\lambda_r^1$ ,  $p_r$  и  $\tau(r_1)$  определяются заданным расходом газа и равенствами  $A_{\tau}(r_1) = 0$  и  $\lambda_h = 0$ , а  $\mu$ ,  $p_{h1}$  и  $\tau_1(r_1)$  – заданным расходом, условием  $M_1(r_{h1}) = M_1^m$  (или  $|\tau_1(r_{h1})| = \tau_1^m$ ) и равенством  $A_{\tau_1}(r_1) = 0$ . Согласно (2.6), необходимыми условиями оптимальности в точке  $r_{h1}$  для решения этого типа будут

$$(\lambda^0 B_{\tau_1} \text{sign } \tau_1)_h \geq 0, \quad (\lambda^0 B_{M_1})_h \geq 0 \quad (2.8)$$

Пусть теперь перед колесом реализуется решение первого, а за ним – второго типа. Если ни  $\tau_1$ , ни  $M_1$  при  $r_1 = r_{h1}$  не достигают своих предельных значений, то в силу независимости вариаций  $\delta \tau_1(r_{h1})$  и  $\delta M_1(r_{h1})$  коэффициенты при них в (2.6) должны обращаться в ноль. С учетом заданного расхода и равенства  $A_{\tau_1}(r_1) = 0$  это дает лишнее, т.е. – невыполнимое, условие для  $\mu$ ,  $p_{h1}$  и  $\tau_1(r_{h1})$ . Следовательно, такое реше-

ние неоптимально, так как его можно улучшить, например, соответствующим варьированием  $\tau_1(r_{h1})$ . Ситуация, однако, изменится, если в решении такого типа  $\tau_{h1}$  или  $M_{h1}$  достигнет своего предельного значения. Если это  $\tau_{h1}$ , то, обратив в ноль коэффициент при  $\delta M_{h1}$  в (2.6), найдем, что необходимые условия оптимальности в точке  $r_1 = r_{h1}$  примут вид

$$\begin{aligned} (\lambda^0 B_{M1} + \lambda C_{M1})_h = 0, \quad (\lambda C_\tau \text{ sign } \tau)_h \geq 0, \quad (\lambda C_M)_h \geq 0 \\ \left[ \lambda \left( C_{\tau 1} - C_{M1} \frac{B_{\tau 1}}{B_{M1}} \right) \text{sign } \tau_1 \right]_h \geq 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Если же в решении такого типа при  $r_1 = r_{h1}$  предельного значения достигнет  $M_1$ , то условия (2.9) заменятся на

$$\begin{aligned} (\lambda^0 B_{\tau 1} + \lambda C_{\tau 1})_h = 0, \quad (\lambda C_\tau \text{ sign } \tau)_h \geq 0, \quad (\lambda C_M)_h \geq 0 \\ \left[ \lambda \left( C_{M1} - C_{\tau 1} \frac{B_{M1}}{B_{\tau 1}} \right) \text{sign } \tau_1 \right]_h \geq 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

До сих пор  $r_h$  и  $r_t$  считались фиксированными. Более широкий класс оптимальных решений допускает варьирование  $r_h$  и  $r_t$ . С практической точки зрения целесообразно ограничиться случаями, когда при заданных константах  $R_h$  и  $R_t$  выполняются условия  $r_h \geq R_h$  и  $r_t \leq R_t$ .

Если оптимальное решение отвечает двустороннему экстремуму по  $r_h$  и  $r_t$ , то в силу (2.1) их оптимальные значения определяются равенствами

$$(\lambda^1 + \lambda C_r)_h = 0, \quad (\lambda^1 + \lambda C_r)_t = 0 \quad (2.11)$$

Если же  $r_h$  и  $r_t$  достигают своих предельных значений  $R_h$  и  $R_t$ , то необходимыми условиями оптимальности будут неравенства

$$(\lambda^1 + \lambda C_r)_h \geq 0, \quad (\lambda^1 + \lambda C_r)_t \geq 0 \quad (2.12)$$

Подведем итог выполненному анализу необходимых условий оптимальности ступени турбины. Эти условия включают соотношения, определяющие управления на отрезке  $[r_{h1} \text{ и } r_{t1}]$ . Управлениями в решениях разных типов служат  $M_1(r_1)$  или  $\tau_1(r_1)$  в сечении 1 и  $M(r_1)$  или  $\tau(r_1)$  в сечении выхода. При их построении необходимые условия оптимальности должны рассматриваться совместно с уравнениями и условиями сопряженной задачи для множителей Лагранжа. Вид последних зависит от типа оптимального решения. В дальнейшем для нескольких типичных ситуаций итоговые уравнения и условия, определяющие оптимальные управления и множители Лагранжа, будут выписаны без указания различий их роли и смысла.

Искомые оптимальные распределения на отрезке  $[r_{h1} \text{ и } r_{t1}]$  включают участки двустороннего и краевого экстремумов. Ниже приведены равенства, которые на участках двустороннего экстремума выполняются всегда. На участках краевого экстремума, когда одно из управлений достигает своего предельного значения, соответствующее равенство заменяется условием, записанным после него в скобках

$$A_{M1} = 0 \quad (M_1 = M_1^m, A_{M1} \geq 0); \quad A_{\tau 1} = 0 \quad (|\tau_1| = \tau_1^m, A_{\tau 1} \text{ sign } \tau_1 \geq 0) \quad (2.13)$$

$$A_M = 0 \quad (M = M^m, A_M \geq 0); \quad A_\tau = 0 \quad (|\tau| = \tau^m, A_\tau \text{ sign } \tau \geq 0), \quad A_r = 0$$

Общими для рассмотренных типов решений будут и условия  $\lambda_t^0 = \lambda_t = 0$  при  $r_1 = r_{t1}$ .

Условия при  $r_1 = r_{h1}$  зависят от типа оптимального решения. Наиболее простой вид

$\lambda_h^0 = 0$  и  $\lambda_h = 0$  они имеют тогда, когда в обоих сечениях реализуется решение первого типа. Для решения второго типа в сечении 1 и первого в сечении выхода условия при  $r_1 = r_{h1}$  имеют вид (2.8). Для решения первого типа в сечении 1 и второго в сечении выхода условия в этой точке имеют вид (2.9), если точка  $r_1 = r_{h1}$  принадлежит участку  $|\tau_1| = \tau_1^m$ , и (2.10), если она принадлежит участку  $M_1 = M_1^m$ . Для решения второго типа в обоих сечениях имеем условия (2.7).

Полученные выше соотношения отвечают тем случаям, когда оптимальное решение соответствует краевому экстремуму по  $M_1$ ,  $\tau_1$ ,  $M$  и  $\tau$  при  $r_1 = r_{h1}$ . Аналогичные соотношения можно записать в случаях, когда краевой экстремум реализуется при  $r_1 = r_{r1}$ . Однако, как показывают расчеты, оптимальные распределения таковы, что предельные значения из (1.5), как правило, достигаются при  $r_1 = r_{h1}$ .

**3. Схемарешения.** Соотношения (2.13), определяющие оптимальные распределения на отрезке  $[r_{h1}, r_{r1}]$ , сводятся к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям для  $\lambda^0$ ,  $\lambda$  и  $\lambda^1$  и к двум конечным соотношениям для управлений  $M_1$  или  $\tau_1$  и  $M$  или  $\tau$ . На участках двустороннего экстремума их вид наиболее прост

$$Q \equiv q_1 - q_2 - 1 = 0, \quad Q^1 \equiv \frac{w_1}{\omega r_1} \left( 2 \frac{\lambda^0}{u_1 r_1^2} + q_3 \right) + q_2 = 0$$

$$\frac{1}{u_1 r_1} \frac{d\lambda^0}{dr_1} = q_3 \left( \frac{u_1^2}{a_1^2} - 1 \right) - \frac{w_1^2}{a_1^2} \frac{\lambda^0}{u_1 r_1^2} \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{u_1 r_1} \frac{d\lambda}{dr_1} = \frac{\rho_1}{\rho} \left( \frac{\lambda^1}{\rho u^3 r} \frac{u^2}{a^2} - q_1 \right), \quad \frac{1}{\rho_1 u_1 V^2} \frac{d\lambda^1}{dr_1} = \frac{r_1}{r} \left( q_1 + 3 \frac{w^2}{V^2} \frac{\lambda}{ur^2} \right)$$

$$q_1 \equiv \frac{\lambda}{ur^2} \frac{w^2}{u^2} + \frac{\lambda^1}{\rho u^3 r}, \quad q_2 \equiv \frac{w}{\omega r} \left( q_1 + 2 \frac{\lambda}{ur^2} \right)$$

$$q_3 \equiv \frac{1}{u_1^2} (\mu + H_0 - H - u^2 q_1), \quad V^2 = u^2 + w^2$$

На участках краевого экстремума по  $M_1$  и  $M$  аналогичные соотношения таковы

$$M_1 = M_1^m, \quad A_{M1} > 0; \quad M = M^m, \quad A_M > 0$$

$$\frac{1}{u_1 r_1} \frac{d\lambda^0}{dr_1} = \frac{\lambda^0}{u_1 r_1^2} \left( z_1 + \frac{w_1}{\omega r_1} \beta_1 \right) + (M_1^2 - 1 + z_1) q_3 + \beta_1 q_2$$

$$\frac{1}{u_1 r_1} \frac{d\lambda}{dr_1} = \frac{\rho_1}{\rho} \left( \beta Q - q_1 + \frac{\lambda^1}{\rho u^3 r} \frac{u^2}{a^2} \right)$$

$$\frac{1}{\rho_1 u_1 V^2} \frac{d\lambda^1}{dr_1} = \frac{r_1}{r} \left( q_1 + 3 \frac{w^2}{V^2} \frac{\lambda}{ur^2} \right)$$

$$A_M = r_1 \rho_1 u_1 a V Q, \quad A_{M1} = r_1 \rho_1 u_1 a_1 V_1 Q^1$$

$$\beta_1 = 1 + \alpha_1 \rho_1 V_1^2, \quad \beta = 1 + \alpha \rho V^2$$

$$z_1 = \frac{w_1}{\omega r_1} \beta_1 - \frac{w_1^2}{a_1^2}, \quad V_1^2 = u_1^2 + (w_1 - \omega r_1)^2$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \frac{d \ln a_1^2}{dp_1}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \frac{d \ln a^2}{dp}$$

При построении оптимального решения соотношения (3.1) интегрируются вместе с (1.1) – (1.4). В качестве начальной выбирается точка  $r_1 = r_{r1}$ , в которой  $\lambda_r^0$  и  $\lambda_h$  известны из (2.4), а  $r$ ,  $p_1$ ,  $p$  и  $\lambda^1$  нужно задать. Ограничимся далее случаем фиксированного  $r_r$ . Величины  $p_1$ ,  $p$  и  $\lambda^1$  при  $r_1 = r_{r1}$  и множитель  $\mu$  выбираются так, чтобы удовлетворить условиям заданного расхода газа в контрольных сечениях, достижения предельных значений параметров из (1.5) при  $r_1 = r_{r1}$  в случае решения второго типа и условиям  $\lambda_h^0 = 0$ ,  $\lambda_h = 0$  или (2.9), (2.10). Указанный выбор осуществлялся с помощью специальной итерационной процедуры.

Интегрирование дифференциальных уравнений проводилось методом Эйлера второго порядка аппроксимации с пошаговым контролем точности. Оптимальные управления на участке двустороннего экстремума определяются двумя первыми условиями из (3.1), которые не разрешаются явно, а на каждом шаге разрешаются с помощью итераций. Вместо  $\lambda^1$  при  $r_1 = r_{r1}$  удобнее задавать  $w_1$ . Тогда, согласно (1.3), (2.4) и первым двум равенствам из (3.1), остальные параметры при  $r_1 = r_{r1}$  определяются формулами

$$u_1 = \sqrt{2(H_0 - h_1) - w_1^2}, \quad w = A \pm \sqrt{A^2 - B/2}$$

$$u = \sqrt{2[H_0 - h + \omega(wr - w_1 r_1) - w^2]}, \quad \frac{\lambda^1}{\rho u^3 r} = \frac{\omega r}{\omega r - w}$$

$$A = \frac{1}{4} \left[ 2\omega r + \frac{r_1}{r} \left( 1 - \frac{u_1^2}{w_1^2} \right) w_0 + \frac{\mu}{\omega r} \right]$$

$$B = \mu + 3\omega r_1 w_1 - 2(H_0 - h)$$

Заданный расход перед колесом обеспечивается подбором  $\mu$ , а за ним при фиксированном  $r_h$  – величины  $p_r$ . В противном случае, т.е. при свободном  $r_h$ ,  $p_r$  определяется либо первым условием из (2.11), либо равенством  $r_h = R_h$ . Во втором случае должно выполняться первое неравенство из (2.12). Величина  $w_{r1}$  определяется или пятым равенством из (2.4) или одним из условий:  $|\tau(r_{h1})| = \tau^m$  и  $M = M^m$ , а  $p_{r1}$  – или четвертым равенством из (2.4), или одним из условий:  $|\tau_1(r_{h1})| = \tau_1^m$  и  $M_1 = M_1^m$ .

**4. Примеры расчета.** Построенные ниже оптимальные ступени прежде всего сравнивались со ступенями, у которых в межвенцовых сечениях в рамках принятых предположений и ограничений реализуются распределения параметров по известному в теории турбомашин (см., например, [10]) закону "свободного вихря". При этом распределение по радиусу окружной компоненты скорости дается формулами  $w_1 r_1 = \Omega_1$  и  $wr = \Omega$ , в которых  $\Omega_1$  и  $\Omega$  – постоянные. При выполнении сделанных выше допущений о равномерности потока на входе в ступень, изэнтропичности течения в венцах, радиального равновесия в межвенцовых сечениях и т.п. распределения  $w_1$  и  $w$  по закону свободного вихря обеспечивают постоянство в каждом сечении осевой компоненты скорости и равномерный, т.е. не зависящий от  $r$ , съем мощности.

Постоянные  $\Omega_1$  и  $\Omega$  зависят от ограничений, принятых при построении данного решения. Максимум мощности реализуется тогда, когда предельные по (1.5) значения  $M_1$  или  $\tau_1$  и  $M$  или  $\tau$  получаются у втулки. В выполненных расчетах первыми своих предельных значений достигали числа Маха. После этого дальнейшее увеличение мощности можно обеспечить заменой примыкающих к втулке участков свободного вихря участками предельно допустимых значений  $M_1$  и  $M$ . Увеличению протяженности каждого из них отвечает рост постоянных  $\Omega_1$  и  $\Omega$  и мощности  $W$ . При этом, как и в вариационной задаче, реализуются две возможности и связанные с ними ограничения по  $\Omega_1$  и  $\Omega$ .



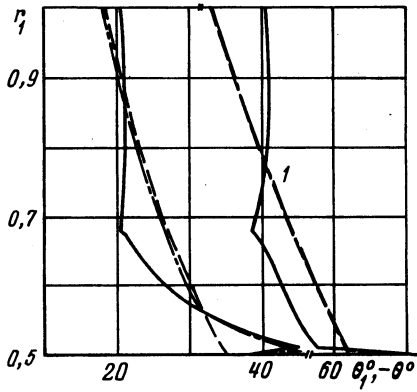
Увеличение в любом сечении интенсивности закрутки, обусловленное ростом протяженности участка предельных значений  $M_1$  и  $M$ , уменьшает среднюю для этого сечения плотность тока  $j$ . Величина  $j$  зависит еще от произвола в выборе  $p_{h1}$  или  $p_h$ . Однако может наступить такой момент, с которого при еще ббльших закрутках указанный произвол не позволит пропустить через данное сечение требуемый расход. Подобная ситуация возможна, если еще раньше при  $r_1 = r_{h1}$  или при  $r_1 = r_{r1}$  величина  $\tau_1$  или  $\tau$  не достигла своего предельного значения из (1.5). В первом случае распределения параметров, отвечающие "граничной" величине  $j$ , дают "комбинированное решение первого типа". Во втором случае, т.е. если раньше достигается предельное значение  $\tau_1$  или  $\tau$ , будем говорить о "комбинированном решении второго типа". В обоих случаях дальнейшее увеличение протяженности примыкающих к втулке участков  $M_1 \equiv M_1^m$  и  $M = M^m$  и мощности  $W$  невозможно. Данная классификация аналогична введенной ранее для оптимальных решений.

Ниже показатель адиабаты  $\kappa = 1,4$ , а для предельных параметров из (1.5) взяты значения  $M_1^m = M^m = 0,9$  и  $\tau_1^m = \tau^m = 3$ . В первом примере оптимизировалась ступень, у которой  $r_{h1} = r_h = 0,5$ ,  $r_{r1} = r_r = 1,0$ ,  $G = 0,225$  и  $\omega = 0,5$ . В этом случае оптимальные управления оказались такими, что перед колесом реализуется решение второго типа, за ним – первого, а точка  $r_1 = r_{h1}$  является точкой двустороннего экстремума относительно вариаций  $\delta p_h$ . Участки двустороннего экстремума располагаются соответственно при  $r_1 > 0,510$  и  $r > 0,681$ , а участки предельно допустимых значений  $M_1 = M = 0,9$  – на остальной части этих сечений. При  $r_1 = r_{h1}$  в сечении 1 достигается предельное значение  $\tau_1 = 3$ . Безразмерная величина максимальной мощности оптимальной ступени  $W = 0,084$ . Согласно принятому выше способу обезразмеривания, расход  $G$  отнесен к  $2\pi\rho_{*0}(a_{*0}^{\circ}r_{r1}^{\circ})^2$ , снимаемая мощность  $W$  – к  $2\pi\rho_{*0}a_{*0}^{\circ}(a_{*0}^{\circ}r_{r1}^{\circ})^2$  и угловая скорость  $\omega$  – к  $a_{*0}^{\circ}/r_{r1}^{\circ}$ .

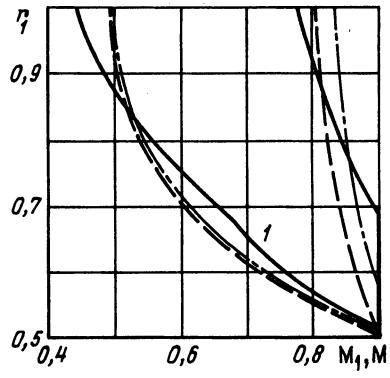
На фиг. 1 сплошными линиями показаны полученные в этом примере оптимальные распределения углов  $\theta_1$  и  $\theta$  отклонения вектора скорости потока от осевого направления. Здесь и далее углы  $\theta_1$  и  $\theta$  даны в градусах, а распределения перед колесом отмечены цифрой 1. Положительные значения  $\theta_1$  и  $\theta$  соответствуют закрутке потока в сторону вращения колеса. Верхний излом кривых отвечает точке стыковки участков двустороннего и краевого экстремумов в сечении выхода, а нижний излом – аналогичной точке в сечении 1.

Для сравнения на фиг. 1 соответственно штрихами и штрихпунктиром показаны зависимости  $\theta_1$  и  $\theta$  от  $r_1$ , которые получаются при использовании в обоих сечениях либо распределений параметров по закону свободного вихря, либо комбинированных распределений. Штриховые кривые отвечают свободным вихрям с  $M_{h1} = M_h = 0,9$ . У такой ступени  $W = 0,0821$ , т.е. на 2,3% меньше, чем у оптимальной. Штрихпунктирные кривые отвечают комбинированным решениям до и после колеса с решением второго типа перед колесом и первого – за ним. Получившаяся при этом мощность  $W = 0,0833$ , т.е. выигрыш оптимального решения по  $W$  снизился до 0,83%. Последнее естественно, ибо комбинированное решение построено с учетом результатов решения вариационной задачи. Отвечающие фиг. 1 распределения чисел Маха даны на фиг. 2.

Результаты, полученные для второго примера, представлены на фиг. 3. Рассмотрена ступень с  $r_{h1} = 0,5$ ,  $r_{r1} = r_r = 1,0$ ,  $G = 0,183$  и  $\omega = 0,25$ , а радиус втулки  $r_h$  за колесом находился из решения вариационной задачи. В данном примере в обоих сечениях реализуются оптимальные решения второго типа. Они содержат участки двустороннего экстремума соответственно при  $r_1 > 0,502$  и  $r > 0,650$ , а участки предельно допустимых  $M_1 = M = 0,9$  – при меньших  $r_1$  и  $r$ . При  $r_1 = r_{h1}$  достигаются предельные значения  $\tau_1 = \tau = 3$ . Максимальная мощность оптимальной ступени  $W = 0,0414$  при оптимальном радиусе втулки за колесом  $r_h = 0,582$ . Ее увеличение по сравнению со ступенью, кото-



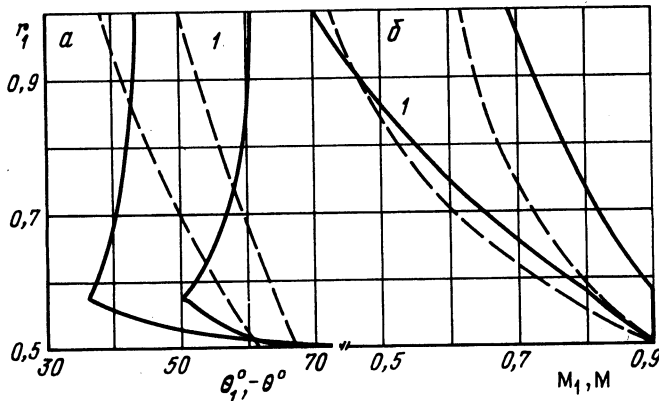
Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Распределения углов  $\theta$  в градусах в контрольных сечениях в примере 1 (решение 2-го типа перед рабочим колесом и 1-го – за ним); 1 – сечение перед рабочим колесом; оптимальное распределение (сплошная кривая); распределение по закону свободного вихря (штрихи); комбинированное распределение (штрихпунктир)

Фиг. 2. Распределения чисел Маха в контрольных сечениях в примере 1; обозначения те же, что на фиг. 1



Фиг. 3. Распределения углов  $\theta$  в градусах (а) и чисел Маха (б) в контрольных сечениях в примере 2 (решения 2-го типа в обоих сечениях); обозначения те же, что на фиг. 1

рая построена с использованием в обоих сечениях закона свободного вихря с  $r_h = 0,5$  и предельными значениями  $\Omega_1$  и  $\Omega$ , в этом примере близко к 5%. На фиг. 3 распределения, отвечающие свободному вихрю, даны штрихами.

**Заключение.** Главная цель выполненного исследования состояла в установлении структуры оптимального решения, получающегося в рамках модели течения, достаточно широко используемой на этапе предварительного проектирования лопаточных машин.

Важной особенностью построенных решений является наличие в них участков краевого экстремума. В принятой модели появление таких участков обусловлено ограничениями, которые диктуются соображениями физического характера. Так, ограничение на углы поворота потока – естественное следствие невозможности безотрывного течения в реальных венцах, состоящих из конечного числа сильно изогнутых лопаток. Аналогично возникновение даже локальных сверхзвуковых зон ведет к появлению скачков уплотнения и как результат – к росту энтропии и отрывам пограничного слоя. Все эти эффекты не "улавливает" принятая модель течения.

Когда вариационные задачи оптимизации ступени турбины будут решаться в рамках более полных моделей, указанные нежелательные особенности "отсекут" сами уравнения течения. Выше их пришлось "вносить" в постановку задачи извне. Несмотря на это полученные оптимальные распределения параметров дают представление о том, чего следует ожидать при решении подобных задач в рамках моделей, учитывающих пространственность потока и неидеальность газа.

Рассмотренная в качестве примера задача оптимизации ступени по снимаемой мощности может представлять и самостоятельный интерес, в первую очередь для турбин энергетических установок. Здесь при фиксированном потоке перед первой ступенью (а следовательно, – при фиксированном подводе тела  $Q$ ) и неизменном числе ступеней увеличение мощности, снимаемой с каждой ступени, приближает отношение  $W_{\Sigma}/Q$ , где  $W_{\Sigma}$  – мощность всей турбины, к его максимально возможной величине, равной термодинамическому коэффициенту полезного действия тепловой машины в целом. В том же направлении действует и уменьшение потерь, вызванных неидеальностью газа, однако второе не исключает первого.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01825 и 96-15-96158).

Авторы благодарят А.Л. Ни, привлечшего их внимание к данной проблеме, а Г.Г. Черного и Г.Л. Подвидза за полезные обсуждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черный Г.Г. Режимы наибольшей работы ступени лопаточной машины // Теоретическая гидромеханика. М.: Оборонгиз, 1953. № 11. Вып. 3. С. 115–151.
2. Черный Г.Г. Режим наибольшей работы ступени без направляющего аппарата на входе в рабочее колесо и с ограниченной скоростью на выходе из него // Теоретическая гидромеханика. М.: Оборонгиз, 1956. № 19. Вып. 7. С. 137–146.
3. Ржезников Ю.В., Индурский М.С. Оптимизация газодинамических параметров последней ступени паровой турбины // Теплоэнергетика. 1972. № 4. С. 79–81.
4. Бойко А.В., Говорущенко Ю.Н. Метод оптимального проектирования осевой турбинной ступени // Теплоэнергетика. 1977. № 4. С. 76–79.
5. Шубенко-Шубин Л.А., Стоянов Ф.А. Автоматизированное проектирование лопаточных аппаратов тепловых турбин. Л.: Машиностроение, 1984. 236 с.
6. Okuy O., Kiral N.C., Dener C., Ucer A.S. A preliminary design system for axial flow spools using numerical optimization // Proc. 13th Intern. Symp. Air Breathing Engines. Chattanooga, Tennessee, USA, 1997. V. 1. P. 233–242.
7. Федоров А.В. Задачи оптимизации течений в проточных частях турбомашин // Журн. техн. физики. 1983. Т. 53. № 1. С. 15–22.
8. Reuther J., Jameson A., Farmer J., Martinelli L., Saunders D. Aerodynamic shape optimization of complex aircraft configurations via an adjoint formulation // AIAA Paper. 1996. № 0094. P. 1–14.
9. Altenstedt F., Lindeblad M., Martensson H. A two-level approach to turbine blade optimization // Proc. 13th Intern. Symp. Air Breathing Engines. Chattanooga, Tennessee, USA, 1997. V. 1. P. 243–249.
10. Нечаев Ю.Н., Федоров Р.М. Теория авиационных газотурбинных двигателей. Ч. 1. М.: Машиностроение, 1978. 312 с.