

УДК 533.6.011.72:519.6

© 1999 г. Е.И. ВАСИЛЬЕВ

ЧЕТЫРЕХВОЛНОВАЯ СХЕМА СЛАБОГО МАХОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНЫХ ВОЛН В УСЛОВИЯХ ПАРАДОКСА НЕЙМАНА

Проведены расчеты повышенной точности для маховского отражения слабой ударной волны от клина. По результатам расчетов с выделением разрывов построена схема течения, предполагающая существование централизованной волны разрежения за отраженным скачком. Новая схема дополняет классическую трехударную схему и устраняет теоретический аспект парадокса Неймана. Показано, что форма отраженного фронта имеет логарифмическую особенность. Приводится сравнение с экспериментальными данными.

Проблема слабого маховского отражения ударных волн характеризуется отсутствием схемы, адекватно описывающей течение идеального газа в окрестности тройной точки. Впервые противоречия с классической трехударной схемой Неймана [1] были выявлены в экспериментах [2]. Для слабых ударных волн с $M_i < 1,5$ помимо количественных расхождений с теорией Неймана были обнаружены маховские конфигурации, для которых трехударная теория вообще не имеет решения. Многочисленные последующие эксперименты (например, [3–7]) подтвердили упомянутое несоответствие, получившее название "парадокс Неймана". До сих пор отсутствует непротиворечивая схема течения около тройной точки, которая позволила бы объяснить парадокс Неймана и была бы подтверждена натурным или вычислительным экспериментом.

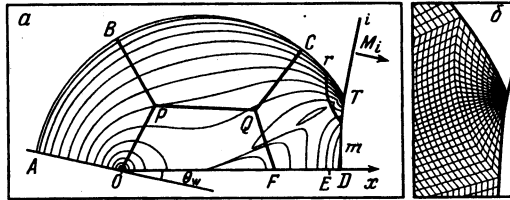
Попытки теоретического обоснования парадокса в основном сводятся к ревизии тех или иных положений трехударной теории. В работах [3, 6, 8, 9] рассматривается так называемая нетрадиционная схема течения, в которой отбрасывается требование параллельности потоков за отраженным фронтом и фронтом Маха. Для замыкания уравнений в [9] используется принцип экстремального поворота потока, прошедшего через отраженную волну вблизи тройной точки. Этот принцип, допускающий разворот потока в отраженном скачке в сторону стенки, был предложен в [3] на основе экспериментов, в которых впервые обнаружена область локального минимума давления в тройной точке.

В работе [5] в дополнение к нетрадиционной схеме отбрасывается требование равенства давлений на тангенциальном разрыве и постулируется линейная связь между давлением за отраженным скачком и углом траектории тройной точки с фронтом падающей волны. Удастся получить хорошее согласие с экспериментами в широком диапазоне, однако теоретическая обоснованность такого подхода отсутствует.

Первая серьезная попытка численного моделирования процесса отражения ударных волн в условиях парадокса Неймана предпринята в [4] с применением метода второго порядка точности. Авторами этой работы по результатам вычислений на неподвижной ортогональной сетке была выдвинута гипотеза о том, что вблизи тройной точки отраженная волна вырождается в непрерывную волну сжатия. Однако результаты работы [5] показали, что эксперименты согласуются с этой гипотезой

лишь при $M_i < 1,05$ или при угле отражающего клина $\theta_w < 10^\circ$. При иных условиях отраженная волна движется со сверхзвуковой скоростью и является скачком с конечной интенсивностью. Это позволяет сделать вывод о том, что размазывание фронта отраженной волны в работе [4] является численным эффектом из-за применения метода сквозного счета и что для моделирования течения в окрестности тройной точки требуется гораздо более высокая точность.

В данной работе предлагается и обосновывается четырехволновая схема, которая была обнаружена в результате численного моделирования с выделением разрывов.



Фиг. 1. Отражение ударной волны от клина для случая $M_i = 1,47$, $\theta_w = 12,5^\circ$: *a* – изолинии плотности и границы расчетных областей, *б* – структура расчетной сетки в области тройной точки

Новая схема сохраняет основные положения теории Неймана и предполагает существование централизованной волны разрежения за отраженным скачком именно в той области параметров, в которой трехударная схема не имеет физически реального решения. Показано, что четырехволновая схема удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными.

1. Постановка задачи и метод численного решения. Рассматривается нестационарное течение идеального газа, возникающее при косом отражении плоской ударной волны i с числом Маха M_i от бесконечного клина, угол полураствора которого θ_w (фиг. 1, *a*).

Дифференциальные уравнения, описывающие двумерное нестационарное течение невязкого и нетеплопроводного совершенного газа с постоянными теплоемкостями, имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{G}(\mathbf{a}) = 0$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho u v \\ (e + p)u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ p + \rho v^2 \\ (e + p)v \end{bmatrix}$$

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho(u^2 + v^2)}{2}$$

Здесь x – координата вдоль поверхности клина, y – ортогональная к x координата, ρ и p – плотность и давление, u и v – компоненты скорости вдоль осей x и y соответственно, e – полная энергия единицы объема, показатель адиабаты $\gamma = 5/3$.

В силу того, что в области течения имеются разрывы, под искомым подразумевается слабое решение, удовлетворяющее уравнениям в интегральном смысле.

Численное решение задачи проводилось монотонным методом второго порядка точности по пространству и времени [10, 11], который представляет собой одну из модификаций (W-модификацию) метода Годунова [12]. Расчеты выполнялись на криволинейной подвижной

сетке, границы которой даны на фиг. 1, *a*. Граница *ABCT* представляет фронт отраженной ударной волны *r*, *TD* – фронт ножки Маха *m*, *OD* и *OA* – участки поверхности клина и плоскости симметрии. Отрезок *OE*, где *E* – точка пересечения продолжения фронта падающей волны *i* с клином, принимался за отрезок характерной длины *L*.

Для выделения фронтов *m* и *r* применялся модифицированный алгоритм, основанный на методе работы [13]. Начальное положение фронта *r* задавалось дугой окружности, вычисляемой из акустического приближения, в котором предполагалось, что клин создает бесконечно малые возмущения. Начальное положение фронта *m* задавалось в виде отрезка, перпендикулярного оси *x*.

Все расчетное поле разрезалось на пять областей, одна из которых непосредственно примыкала к тройной точке *T* (фиг. 1, *a*). Точки *B* и *C* на фронте *r* задавались в начале расчета и в его процессе могли перемещаться только вдоль фиксированных лучей, проходящих через *O*. Отрезок *OF* = 0,7*OD*. Точки *P* и *Q* внутри поля вычислялись из условия, что прямолинейные границы областей в этих точках составляют между собой равные углы по 120°.

В четырех областях основного поля строились согласованные между собой по количеству ячеек четырехугольные сетки. Структура сетки в пятой области, примыкающей к тройной точке, изображена на фиг. 1, *b*. Все сеточные линии горизонтального семейства в этой области сходились в тройную точку, и непосредственно около тройной точки располагался слой из нескольких десятков треугольных ячеек. В процессе расчета одна из сеточных линий, выходящая из тройной точки, подстраивалась под тангенциальный разрыв с помощью алгоритма минимизации потока массы.

В качестве граничных условий на *AO* и *OD* задавались условия непротекания, на *DT* и *ABCT* задавались параметры перед и за фронтом падающей ударной волны соответственно. Реализация граничных условий осуществлялась введением дополнительных рядов внешних приграничных ячеек. В качестве начальных параметров во всех расчетных областях задавались параметры газа за фронтом падающего скачка.

В каждой из четырех областей основного поля течения использовалась сетка 100 × 100 и в области тройной точки – 36 × 48 ячеек. Расчет проводился методом установления по времени до тех пор, пока течение не выходило на автомоделный режим точностью $\epsilon = 10^{-3}$. Степень установления контролировалась на каждом временном шаге по приращениям плотности. Критерием установления являлось выполнение во всех ячейках расчетных областей условия $|\Delta\rho| < \epsilon\rho\Delta t$.

Для повышения точности решения около тройной точки применялась процедура поэтапного сгущения сетки. В процессе расчета временные интервалы установления чередовались с интервалами постепенного сгущения вертикального семейства сеточных линий в пятой области (фиг. 1, *b*) в направлении к тройной точке. В процессе каждого этапа сгущения размеры ячеек в непосредственной близости тройной точки уменьшались в 2 раза при сохранении общего количества ячеек в пятой области. Всего осуществлялось семь–восемь этапов двухкратного сгущения сетки в процессе расчета. В результате такой процедуры сетка становилась крайне неравномерной и для ускорения расчетов область тройной точки разбивалась на четыре подобласти, численное интегрирование в каждой из которых осуществлялось со своим шагом по времени.

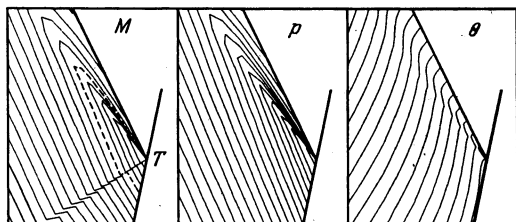
Расчет по описанной выше технологии требовал около 120 ч машинного времени ПЭВМ Pentium-S 133 для каждого варианта, причем более 90% этого времени приходилось на область тройной точки.

2. Результаты численного моделирования. Расчеты проводились для отражающего клина с углом раствора θ_w в диапазоне от 5 до 40° при числе Маха падающей волны $M_i = 1,47$.

На фиг. 1, *a* изображены изолинии плотности для случая $\theta_w = 12,5^\circ$ с дискретностью $0,01\rho_0$. Как видно, используемый метод [11] позволяет обеспечить гладкое сопряжение параметров на границах между областями, где сетка существенно нерегулярна. Для $M_i = 1,47$ трехударная схема не имеет решения при $\theta_w + \chi < 32,75^\circ$, где χ – угол траектории тройной точки с осью *x*, что как раз выполняется в представленном варианте, для которого получено $\theta_w + \chi = 30,1^\circ$. Наибольший интерес в этом случае

представляет течение в окрестности тройной точки. На фиг. 2 представлены изолинии параметров течения в окрестности тройной точки в сильно увеличенном масштабе. Размер окрестности составляет $0,0024L \times 0,003L$. Изображены изолинии числа Маха, давления и угла наклона вектора скорости. Здесь и везде далее по тексту под скоростью и углом наклона вектора скорости понимается скорость относительно автоматодельной системы координат, в которой течение является стационарным.

По изолиниям числа Маха отчетливо виден выделяемый в расчете тангенциальный разрыв. На тангенциальном разрыве давление и направление скорости



Фиг. 2. Изолинии числа Маха, давления и угла наклона вектора скорости около тройной точки в малой окрестности с размером по высоте $H = 3 \cdot 10^{-3}L$; $\Delta M = 0,001$; $\Delta p = 0,0025p_0$; $\Delta \theta = 0,015^\circ$

непрерывны, что согласуется с положениями трехударной теории, однако предположения об однородности течения вблизи тройной точки не выполняются. Угол между тангенциальным разрывом и фронтом отраженного скачка больше 90° , т.е. поток отклоняется в сторону стенки. За отраженным скачком располагается веер сверхзвуковой волны разрежения с вершиной в тройной точке. Штриховой линией изображена звуковая линия. Это подтверждает гипотезу А.Н. Крайко о возможности существования волны разрежения за отраженным скачком и сверхзвуковой зоны за фронтом Маха.

Существование волны разрежения объясняется большой кривизной отраженного скачка. Непосредственно за его фронтом относительное число Маха потока $M < 1$, но при стремлении к тройной точке число $M \rightarrow 1$. В соответствии с теорией косых скачков выше тройной точки обязательно будет существовать участок фронта, вдоль которого угол поворота потока в отраженном скачке уменьшается при стремлении к тройной точке. Этот участок заключен между точкой максимального разворота потока и тройной точкой T . Дозвуковой поток за этим участком фронта является сходящимся и может перейти в сверхзвук. Ниже по потоку за волной разрежения находится небольшая область сверхзвукового течения. Обратный безударный переход к дозвуковому течению объясняется большим встречным градиентом давления.

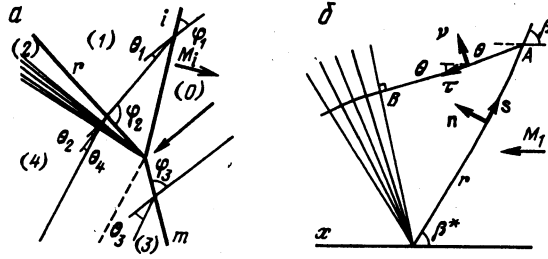
В точке T имеет место локальный минимум давления, что согласуется с серией экспериментов [3], где впервые обнаружена область пониженного давления в окрестности тройной точки. В то же время предложенный в [3] принцип экстремального поворота потока не выполняется ни для отраженного скачка, ни для фронта Маха.

В реальных экспериментах характерный размер L составляет ~ 200 мм (например, [4, 5]), а предел разрешимости деталей около $0,5-1$ мм [5], что превышает размеры рассматриваемой на фиг. 2 окрестности. Это объясняет, почему отмеченные выше особенности течения не фиксируются в экспериментах.

3. Четырехволновая схема. Приведенные выше численные результаты позволяют скорректировать трехударную схему течения около тройной точки введением нового элемента центрированной волны разрежения (фиг. 3, а). Основными дополнительными положениями новой четырехволновой схемы являются: 1) наклон отраженного скачка к потоку $\varphi_2 > 90^\circ$ и подчиняется условию $M_2 = 1$ в тройной точке за его фрон-

том: 2) за отраженным скачком расположена центрированная в тройной точке сверхзвуковая волна разрежения, которая согласовывает по давлению и по направлению скорости прошедший через нее поток с потоком за фронтом Маха; 3) угол разворота потока в секторе между отраженным скачком и границей волны разрежения пренебрежимо мал.

В этой модели важным моментом является кривизна отраженного фронта, благодаря чему за фронтом $M = 1$ только в тройной точке, а вне ее $M < 1$ и, следовательно, отраженная волна не является приходящей.



Фиг. 3. Схема течения вблизи тройной точки с центрированной волной разрежения; а – полная конфигурация, б – окрестность отраженной волны и волны разрежения

Связь параметров для совершенного газа по разные стороны от каждого j -го скачка ($j = 1, 2, 3$ соответственно для скачков i, r, m) вблизи тройной точки, представляется в виде

$$\rho_k \operatorname{tg} \varphi_j = \rho_j \operatorname{tg} (\varphi_j - \theta_j) \quad (3.1)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_k}{\rho_k} + \frac{q_k^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_j}{\rho_j} + \frac{q_j^2}{2}$$

$$p_k + \rho_k q_k^2 \sin^2 \varphi_j = p_j + \rho_j q_j^2 \sin^2 (\varphi_j - \theta_j)$$

$$q_k \cos \varphi_j = q_j \cos (\varphi_j - \theta_j)$$

где φ_j и θ_j – угол входа и угол поворота потока в j -м скачке. Индексы k и j у величин ρ, p, q обозначают состояние перед и за j -м скачком соответственно.

Для давления p_4 и угла поворота потока θ_4 в волне разрежения используем изэнтропические формулы и соотношение вдоль левой характеристики

$$p_2 (1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M_2^2)^{\gamma/(\gamma - 1)} = p_4 (1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M_4^2)^{\gamma/(\gamma - 1)} \quad (3.2)$$

$$\theta_4 = \Phi(M_4) - \Phi(M_2), \quad \Phi(M) = \sigma \operatorname{arctg} (\sigma^{-1} \sqrt{M^2 - 1}) - \operatorname{arctg} \sqrt{M^2 - 1}$$

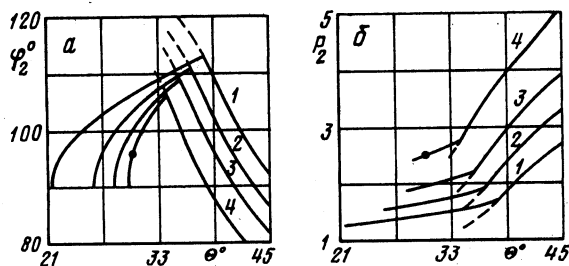
$$\sigma^2 = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$$

где M_2, M_4 – числа Маха потока перед и за волной разрежения (области 2 и 4). В соответствии со сделанными предположениями для замыкания системы (3.1), (3.2) требуем

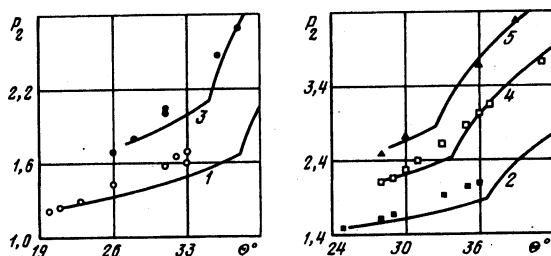
$$M_2 = 1, \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_4 = \theta_3, \quad p_4 = p_3 \quad (3.3)$$

В (3.1)–(3.3) ρ_0, p_0, q_0 и φ_1 являются исходными данными, причем два последних связаны с M_i и θ_w

$$q_0 = a_0 \frac{M_i}{\cos(\theta_w + \chi)}, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2} - (\theta_w + \chi)$$



Фиг. 4. Зависимости угла входа потока φ_2° в отраженный скачок (а) и давления $P_2 = p_2/p_0$ за скачком (б) от угла траектории тройной точки по результатам представленной и классической теорий. Кривым 1–4 соответствуют $M_i = 1, 1, 2; 1, 3$ и $1, 47$, $\Theta^\circ = (\theta_w + \chi)^\circ$



Фиг. 5. Сравнение обобщенной трехударной теории с экспериментами [5]. Кривым 1–5 соответствуют $M_i = 1, 1; 1, 19; 1, 28; 1, 4$ и $1, 53$. $\Theta^\circ = (\theta + \chi)^\circ$

Здесь a_0 – скорость звука в невозмущенной области 0, χ – угол траектории тройной точки с осью x , который из локальной теории не определяется и выступает как внешний параметр.

На фиг. 4 приведено сравнение результатов классической трехударной схемы и описанной выше четырехволновой схемы с волной разрежения. Представлены зависимости угла входа потока в отраженный скачок (фиг. 4, а) и давления $P_2 = p_2/p_0$ за отраженным скачком (фиг. 4, б) как функции переменной $\theta_w + \chi$. Каждая сплошная кривая состоит из двух ветвей, левая из которых соответствует четырехволновой, а правая трехударной схеме. Пунктиром изображены физически нереализуемые для данной задачи участки классической теории с приходящей отраженной волной ($M_2 > 1$). Крайние левые точки на ветвях четырехволновой схемы соответствуют случаям, когда отраженная волна вырождается в акустический фронт с $\varphi_2 = 90^\circ$. Видно, что предложенная схема гармонично дополняет трехударную именно в той области параметров, в которой последняя не имеет физического реального решения. Черным кружком отмечены результаты приведенных выше расчетов для $M_i = 1, 47$, $\theta_w = 12,5^\circ$, которые очень хорошо согласуются с представленной теорией.

Сравнения результатов обобщенной теории с экспериментальными данными [5] для давления за отраженным скачком приведены на фиг. 5. Показатель адиабаты $\gamma = 1, 4$. Согласно [5], ошибки измерений были в пределах $\pm 1^\circ$ для угла траектории тройной точки и $\pm 5\%$ для давления. Согласие с теоретическими кривыми выглядит вполне удовлетворительным. Существенное расхождение наблюдается лишь в переходной области между предложенной и классической теориями.

4. Кривизна фронта отраженной ударной волны. Рассмотрим форму фронта отраженного скачка, за которым может быть реализовано течение с центрированной

волной разрежения Прандтля – Майера. Направим ось x вдоль вектора скорости потока, входящего в криволинейный отраженный скачок r (фиг. 3, б). Число Маха набегающего потока – M_1 . Угол наклона $\beta(s)$ фронта к набегающему потоку есть функция расстояния s вдоль фронта от тройной точки T . Угол в тройной точке $\beta(0) = \beta^*$ и определяется из условия, что за фронтом число Маха $M = 1$.

Уравнения для баротропного течения относительно переменных годографа q, θ и плотности ρ в криволинейных ортогональных координатах (τ, ν) , связанных с линиями тока, приводятся к виду

$$\rho q \frac{\partial q}{\partial \tau} + a^2 \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0, \quad \rho q^2 \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial \nu} = 0, \quad \rho q^2 \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + (a^2 - q^2) \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0 \quad (4.1)$$

Производные $\partial \theta / \partial \tau$ и $\partial \theta / \partial \nu$ описывают кривизну линии тока и сужение трубки тока.

В рассматриваемом транзвуковом течении число Маха M_1 сверхзвукового потока перед отраженной ударной волной r близко к единице и скачком энтропии в отраженной волне можно пренебречь. Постоянство энтропии за фронтом r допускает существование центрированной волны разрежения Прандтля – Майера с вершиной в точке O и позволяет заменить первое уравнение системы (4.1) на соотношение в дифференциалах

$$\frac{1}{\rho} d\rho = - \frac{M}{1 + (\gamma - 1)M^2/2} dM$$

где M – число Маха потока. Тогда последние два уравнения системы (4.1) преобразуются к виду

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = - \frac{2}{M(2 + (\gamma - 1)M^2)} \frac{\partial M}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = \frac{2(1 - M^2)}{M(2 + (\gamma - 1)M^2)} \frac{\partial M}{\partial \tau} \quad (4.2)$$

Между веером волны разрежения и фронтом r находится сектор дозвукового потока с числом Маха $M = 1$ на границе веера и в вершине сектора. В веере Прандтля – Майера линия тока перпендикулярна звуковой линии. Аналогичное требование по непрерывности со стороны дозвукового потока приводит в силу уравнений (4.2) к условиям нулевой кривизны линии тока и нулевого локального сужения трубки тока на звуковой линии

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right|_B = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|_B = 0 \quad (4.3)$$

Учитывая близость M к единице в дозвуковом секторе, получим упрощенную систему

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = - \frac{2}{\gamma + 1} \frac{\partial M}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = \frac{4}{\gamma + 1} (1 - M) \frac{\partial M}{\partial \tau} \quad (4.4)$$

Интегрируя последнее уравнение из (4.4) вдоль линии тока AB с учетом (4.3), считая для простоты, что сужение вдоль трубки тока меняется линейным образом, получим

$$b \left. \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|_A = \frac{4}{\gamma + 1} (1 - M)^2 \Big|_A \quad (4.5)$$

Здесь b – длина линии тока AB . Непосредственно за фронтом отраженной волны в точке A

$$\frac{\partial \theta}{\partial \nu} = \sin(\beta - \theta) \frac{\partial \theta}{\partial s} + \cos(\beta - \theta) \frac{\partial \theta}{\partial n}$$

где $\partial/\partial s$ и $\partial/\partial n$ – производные вдоль касательной и нормали к фронту. В рассматриваемых условиях

$$\sin(\beta - \theta) > \cos(\beta - \theta), \quad \frac{\partial\theta}{\partial s} \gg \frac{\partial\theta}{\partial n} \quad (4.6)$$

Второе неравенство из (4.6) подтверждается результатами ранее приведенных расчетов на фиг. 2, где хорошо видно, что изолинии угла скорости θ вблизи тройной точки практически перпендикулярны фронту ударной волны. Подставляя в (4.5) следующие соотношения, получим уравнение (4.8) вдоль фронта r :

$$\frac{\partial\theta}{\partial v} \approx \sin(\beta - \theta) \frac{\partial\theta}{\partial s}, \quad b \approx s \cos(\beta - \theta), \quad \frac{\partial\theta}{\partial s} = \frac{\partial\theta}{\partial\beta} \frac{\partial\beta}{\partial s} \quad (4.7)$$

$$s \frac{\partial\beta}{\partial s} \frac{\partial\theta}{\partial\beta} \cos(\beta - \theta) \sin(\beta - \theta) = \frac{4}{\gamma + 1} (1 - M)^2 \quad (4.8)$$

Для соотношений Гюгоню на косом скачке при M_1 , близких к единице, справедливы разложения в окрестности β^*

$$\cos(\beta - \theta) \sin(\beta - \theta) \approx \sqrt{M_1 - 1},$$

$$\theta \approx \theta^* + \frac{2}{\gamma + 1} (M_1 - 1) (\beta - \beta^*), \quad M \approx 1 - 2\sqrt{M_1 - 1} (\beta - \beta^*)$$

которые позволяют преобразовать (4.8) в простое дифференциальное уравнение относительно $\beta(s)$

$$s \frac{d\beta}{ds} = \frac{8}{\sqrt{M_1 - 1}} (\beta - \beta^*)^2 \quad (4.9)$$

Отличным от константы решением уравнения (4.9) является

$$\beta(s) = \beta^* - \frac{\sqrt{M_1 - 1}}{8 \ln s / s_0} \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{M_1 - 1} \left(1 + \frac{1}{8 \ln s / s_0} \right) \quad (4.10)$$

Здесь s_0 – некоторый масштаб длины ($s \ll s_0$). Таким образом, при наличии центрированной волны разрежения за отраженным скачком форма фронта скачка имеет логарифмическую особенность. Кривизна фронта $d\beta(s)/ds$ в тройной точке обращается в бесконечность. В случае, когда скачок является акустической волной ($M_1 = 1$), особенность исчезает и $\beta = \pi/2$.

С помощью (4.3), (4.6), (4.7) и (4.9) можно оценить угол поворота потока вдоль линии тока в дозвуковом секторе

$$\Delta\theta = \int_A^B \frac{\partial\theta}{\partial\tau} d\tau \approx s \frac{d\beta}{ds} \text{const} \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow 0)$$

что обосновывает предположение, принятое в четырехволновой схеме о нулевом угле поворота потока в дозвуковом секторе вблизи тройной точки.

Заключение. Обнаруженная в вычислительных экспериментах центрированная сверхзвуковая волна разрежения в тройной точке при маховом отражении слабых ударных волн и построенная обобщенная трехударная теория с волной разрежения устраняют теоретический аспект парадокса Неймана. Новая четырехволновая схема течения демонстрирует удовлетворительное согласие с экспериментами по давлению за отраженной волной. В то же время наличие логарифмической особенности на фронте отраженного скачка может являться причиной большой погрешности измерений углов наклона фронтов ударных волн около тройной точки в натурных экспериментах и приводить к неправильной их интерпретации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Neumann J., von.* Oblique reflection of shocks // Explosive research. Report № 12. Navy Dept. Bureau of Ordnance, Washington, 1943.
2. *White D.R.* An experimental survey of the Mach reflection of shock waves // Proc. 2nd Midwest Conf. on Fluid Mechanics. Ohio: State Univ., 1952. P. 253–262.
3. *Заславский Б.И., Сафаров Р.А.* О маховском отражении слабых ударных волн от жесткой стенки // ПМТФ. 1973. № 5. С. 26–33.
4. *Colella P., Henderson L.F.* The von Neuman paradox for the diffraction of weak shock waves // J. Fluid Mech. 1990. V. 213. P. 71–94.
5. *Olim M., Dewey J.M.* A revised three-shock solution for the Mach reflection of weak shocks ($1,1 < M_i < 1,5$) // Shock Waves. 1992. V. 2. P. 167–176.
6. *Adachi T., Suzuki T., Kobayashi S.* Mach reflection of a weak shock waves // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. B. 1994. V. 60. № 575. С. 2281–2286.
7. *Sasoh A., Takayama K.* Characterization of disturbance propagation in weak shock-wave reflections // J. Fluid Mech. 1994. V. 277. С. 331–345.
8. *Дулов В.Г.* О движении тройной конфигурации ударных волн с образованием следа за точкой ветвления // ПМТФ. 1973. № 6. С. 67–75.
9. *Шиндяпин Г.П.* Маховское отражение и взаимодействие слабых ударных волн в условиях парадокса Неймана // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 2. С. 183–190.
10. *Васильев Е.И.* Монотонная схема повышенной точности для решения двумерных нестационарных уравнений Эйлера на подвижных сетках на основе схемы Годунова // Аннот. докл. 7-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. М., 1991. С. 73.
11. *Васильев Е.И.* W-Модификация метода С.К. Годунова и ее применение для двумерных нестационарных течений запыленного газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36. № 1. С. 122–135.
12. *Годунов С.К., Забродин А.В. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
13. *Крайко А.Н., Макаров В.Е., Тилляева Н.И.* К численному построению фронтов ударных волн // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20. № 3. С. 716–723.

Волгоград

Поступила в редакцию
16.III.1998