МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1999

УДК 532.59.013.4:539.3

© 1999 г. А.В. МАРЧЕНКО

УСТОЙЧИВОСТЬ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН И КУБИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Исследуется устойчивость периодической изгибно-гравитационной волны с волновым вектором $\mathbf{k}_W$, где $|\mathbf{k}_W| < k_{\min}$ и величина $k_{\min}$ определена в [1]. Показано, что при $|\mathbf{k}_W| \neq k^{(2)}$ сильные изменения параметров волны не связаны с квадратичными взаимодействиями с шумовыми гармониками. При $|\mathbf{k}_W| = k^{(2)}$ неустойчивость обусловлена процессом генерации второй гармоники. При $|\mathbf{k}_W| = k^{(3)} < k^{(2)}$ неустойчивость связана с генерацией третьей гармоники. В остальных случаях неустойчивость проявляется в распаде огибающей периодической волны на солитоны (неустойчивость Бенджамена – Фейра). При этом, если глубина жидкости меньше или сравнима с длиной волны, возможны ситуации, когда периодическая волна неустойчива только по отношению к возмущениям, направление распространения которых составляет ненулевой угол с $\mathbf{k}_W$. Если глубина жидкости велика, то неустойчивость по отношению к "косым" возмущениям всегда влечет неустойчивость по отношению к возмущениям, не меняющим форму волны в направлении ее гребней.

В [1] показано, что при распространении периодической изгибно-гравитационной волны W с волновым числом $k_W > k_{\min}$ происходит значительное уменьшение начальной амплитуды волны a_W в результате ее взаимодействия с "шумовыми" изгибно-гравитационными волнами малых амплитуд. При этом за время порядка $\varepsilon^{-1} = a_W/l$, где l – длина волны, значительно возрастают амплитуды двух или четырех резонансных шумовых гармоник. Этот процесс – основной механизм неустойчивости волны при $k_W > k_{\min}$ и связан с квадратичными трехволновыми взаимодействиями. Характерное время этих взаимодействий порядка ε^{-1} – наименьшее среди характерных времен нелинейных резонансных взаимодействий более высоких порядков.

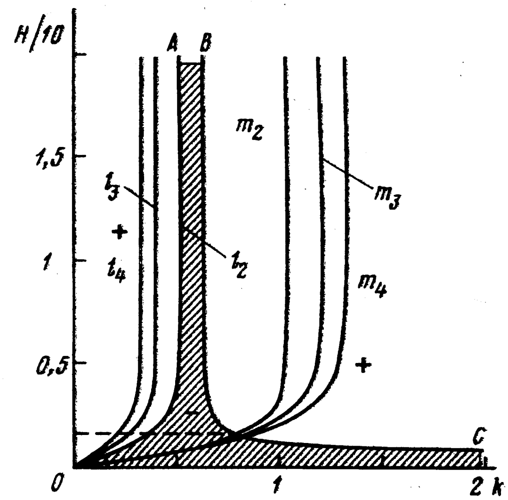
Показано [1], что если $k_W < k_{\min}$ и $k_W \neq k_{\min}/2$, то амплитуда волны W не может сильно изменится за счет квадратичных взаимодействий с шумовыми гармониками. В этом случае сильные изменения параметров волны W могут быть связаны с кубическими взаимодействиями и дисперсионными эффектами. Типичный пример – неустойчивость Бенджамена – Фейра [2], приводящая к распаду огибающей периодической гравитационной волны на уединенные волны. Другой механизм неустойчивости, связанный с резонансным возбуждением нулевой гармоники или среднего течения, исследовался ранее для капиллярно-гравитационных волн [3].

Целью данной работы является исследование нелинейных процессов с характерными временами порядка ε^{-2}, приводящих к сильному искажению начальных параметров волны W при $k_W < k_{\min}$. К таким процессам относятся генерация кратных гармоник, генерация среднего течения, самовоздействие и дисперсионные явления.

При получении асимптотических уравнений использовались асимптотические уравнения, полученные в [1] в обезразмеренном виде.

1. Генерация высших гармоник. Для резонансного возбуждения N-й гармоники необходимо, чтобы волновое число $k = k_W$ удовлетворяло соотношению [1]

$$\omega(Nk) = N\omega(k) \tag{1.1}$$



Фиг. 1. Представление условий резонансного возбуждения 2, 3 и 4-й гармоник изгибно-гравитационных волн на плоскости (k, H). В заштрихованной области коэффициент $\varkappa_1 < 0$

где $\omega^2(k) = k \tanh kH(1 + k^4)$ – дисперсионное соотношение линейного приближения.

На фиг. 1 представлены резонансные кривые для резонансов на второй, третьей и четвертой гармониках на плоскости (k, H). Кривые $l_N(N = 2, 3, 4,\ldots)$ определяют зависимость волнового числа $k^{(N)}$ волны, находящейся в резонансе со своей N-й гармоникой, от глубины H. Кривые m_N определяют зависимость $Nk^{(N)}$ от H. Каждая кривая l_N имеет вертикальную асимптоту $k^4 = ((N-1)(N^2 + N + 1))^{-1}$.

Уравнения генерации третьей гармоники могут быть приведены к виду

$$i\frac{d}{dT}\varphi_1 = (\varkappa_1(k^{(3)})|\varphi_1|^2 + \varkappa_{13}|\varphi_3|^2)\varphi_1 + 3\nu(\varphi_1^*)^2\varphi_3 \tag{1.2}$$

$$i\frac{d}{dT}\varphi_3 = (\varkappa_1(3k^{(3)})|\varphi_3|^2 + \varkappa_{13}|\varphi_1|^2)\varphi_3 + \nu\varphi_1^3$$

$$T = \varepsilon^2 t$$

Коэффициент $\varkappa_1$ приведен в (3.1). Коэффициенты $\varkappa_{13}$ и ν не приводятся, так как не влияют на особенности качественного поведения решения (1.2). Из (1.2) вытекает, что характерное время процесса генерации третьей гармоники порядка ε^{-2}.

Уравнения (1.2) имеют два интеграла. Один из них – аналог соотношений Мэнли – Роу для трехволновых взаимодействий

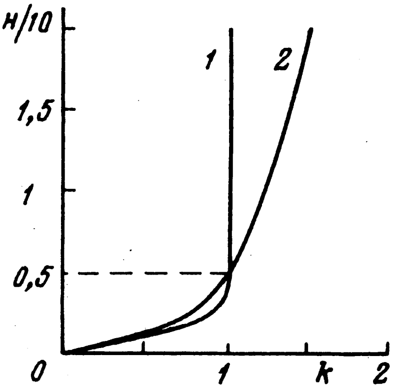
$$E_1 + 3E_3 = E_1^0 + 3E_3^0 \tag{1.3}$$

$$E_j = |\varphi_j|^2$$

Второй интеграл – гамильтониан системы (1.2)

$$\Gamma = \frac{1}{2}(\varkappa_1(k^{(3)})|\varphi_1|^4 + \varkappa_1(3k^{(3)})|\varphi_3|^4) + \varkappa_{13}|\varphi_1|^2|\varphi_3|^2 + \nu((\varphi_1^*)^3\varphi_3 + \varphi_1^3\varphi_3^*) \tag{1.4}$$

Отсюда видно, что если $\varkappa_1(k^{(3)})$ и $\varkappa_1(3k^{(3)})$ имеют разные знаки, то процесс полной передачи энергии из первой в третью гармонику невозможен, если в начальный момент времени вся энергия была заключена в волне $\varkappa_1(k^{(3)})$. Действительно, если это так, то знаки Γ при $t = 0$ и $t = \infty$ различны, что не может выполняться. Поэтому для



Фиг. 2. Представление условия резонансного возбуждения среднего течения на плоскости (k, H)

полной передачи энергии в этом случае необходимо, чтобы амплитуда φ_3 была больше некоторой критической величины. Если же знаки $\varkappa_1(k^{(3)})$ и $\varkappa_1(3k^{(3)})$ совпадают, то процесс полной передачи энергии из первой в третью гармонику возможен. На фиг. 1 в плоскости (k, H) представлены кривые OA и BC, на которых происходит перемена знака коэффициента $\varkappa_1$. Заштрихована область, где $\varkappa_1 < 0$. Видно, что при больших глубинах знаки $\varkappa_1(k^{(3)})$ и $\varkappa_1(3k^{(3)})$ совпадают. Если глубина достаточно мала $H < H_{\text{ст}}^{(3)}$, то знаки этих коэффициентов могут быть различными.

Уравнения (1.2) могут быть проинтегрированы и сведены к квадратуре

$$\left(\frac{dE_3}{dt}\right)^2 = P_4(E_3)$$

$$P_4(E_3) = 4\nu^2 E_3 E_1^2 - [\Gamma - \frac{1}{2}(\varkappa_1(k^{(3)})E_1^2 + \varkappa_1(3k^{(3)})E_3^2) - \varkappa_{13}E_1E_3]^2$$

Правая часть этого уравнения при больших E_3 меньше нуля. В начальный момент времени в силу интеграла (1.4) правая часть больше нуля. Поэтому всегда существует значение $E_3 > 0$, при котором $P_4 = 0$, и решение (1.2) всегда ограничено.

Отметим, что генерация N-й гармоники при $N > 3$ описывается системой уравнений

$$i\frac{d}{dT}\varphi_1 = (\varkappa_1(k^{(N)})|\varphi_1|^2 + \varkappa_{1N}|\varphi_N|^2)\varphi_1 \tag{1.5}$$

$$i\frac{d}{dT}\varphi_N = (\varkappa_1(Nk^{(N)})|\varphi_N|^2 + \varkappa_{1N}|\varphi_1|^2)\varphi_N,$$

$$T = \varepsilon^2 t$$

Из (1.5) следует, что $|\varphi_{1,3}| = \text{const}$. Поэтому при $N > 3$ на временах порядка ε^{-2} обмен энергией между резонансными гармониками не происходит. Их взаимодействие сводится только к взаимным фазовым поправкам.

2. Генерация среднего течения. Волны с волновыми числами, по модулю меньшими $k_{\min}$, могут быть только вторичными в резонансных триадах. Отсюда следует, что их амплитуда не может существенно уменьшиться в результате обмена энергией с шумовыми гармониками малых амплитуд. При распространении таких волн на достаточно больших временах проявляется совокупное влияние дисперсии и самовоздействия. При уменьшении глубины жидкости $k_{\min}$ уменьшается и при $H \to 0$ выполняется $k_{\min} \to 0$. Зависимость $k_{\min}$ от H представлена на фиг. 2.

Исследуем влияние дисперсии и самовоздействия на эволюцию волнового пакета φ_1, спектр которого локализован вблизи одного волнового вектора $\mathbf{k}_W = (k, 0)$, где $k < k_{\min}$. В частном случае для периодической волны W выполняется $\varphi_1 = \varphi_1(T)$. С точностью до $O(\varepsilon^2)$ порядка из уравнений (1.7) в [1] находим

$$i\frac{m^2\omega_1^2 - \omega_m^2}{m\omega_1}\varphi_m + 2\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial T} + \omega_{x,m}\frac{\partial}{\partial X}\right)\varphi_m + \varepsilon\sum_n \alpha_{mn}\varphi_{m-n}\varphi_n + i\varepsilon^2\omega_{\alpha\beta,m}\nabla_{\alpha\beta}\varphi_m + \tag{2.1}$$

$$+i\varepsilon^2\sum_n \beta_{mn}|\varphi_j|^2\varphi_m + i\varepsilon^2(\gamma_m\frac{\partial}{\partial T}\varphi_0 + \delta_m\frac{\partial}{\partial X}\varphi_0)\varphi_m = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial T^2} - H\Delta\right)\varphi_0 + \sum_m \left[\frac{1}{2}((mk)^2 - (\lambda_\eta^m)^2)\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\lambda_\eta^m}{\omega_m} mk \frac{\partial}{\partial X}\right] |\varphi_m|^2 = 0$$

где индекс $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ соответствует m-й гармонике. Индексы α, β равны x или y. Коэффициенты α_{mn}, β_{mn}, γ_m и δ_m выражаются через λ_η^m и λ_φ^m и здесь не приводятся, так как имеют громоздкий вид.

Из (2.1) следует, что если гармоники выше второй имели в начальные моменты времени амплитуды порядка $o(\varepsilon^2)$, то с течением времени порядок амплитуд сохранится. При этом предполагается, что волновое число k не удовлетворяет условиям (1.1) генерации высших гармоник.

Из уравнений (2.1) вытекает, что характерные времена, на которых проявляется влияние самовоздействия и дисперсии, имеют одинаковый порядок со временем генерации нулевой гармоники φ_0, которая обычно называется средним течением. Поэтому асимптотические уравнения (2.1) описывают эффекты самовоздействия, дисперсии, генерации среднего течения и резонансного взаимодействия длинных и коротких волн.

Второе уравнение (2.1) называется уравнением генерации среднего течения φ_0. Видно, что если величины $\varphi_m = 0$, то уравнение для среднего течения переходит в уравнение для распространения длинных поверхностных волн в слое жидкости глубины H.

Решение уравнения для среднего течения состоит из суммы свободной длинной гравитационной волны и вынужденных волн, распространяющихся вместе с пакетами φ_m. Если в начальный момент времени вся волновая энергия содержалась в волновом пакете φ_1, то с течением времени в отсутствие резонансов на кратных гармониках амплитуды φ_m при $m \neq 1$ будут малы по сравнению с амплитудой φ_1. Поэтому главная часть вынужденного среднего течения будет формироваться под влиянием φ_1. В этом случае можно приближенно положить

$$\frac{\partial}{\partial T} = -\omega_{x,1}\frac{\partial}{\partial X} + O(\varepsilon) \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в уравнение для среднего течения и учитывая в правой части только волну φ_1, находим

$$\frac{H - \omega_{x,1}^2}{H}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial Y^2} = -\frac{1}{H}\left[\omega_{x,1}\left(k^2 - \left(\lambda_\eta^1\right)^2\right) + 2\frac{k\lambda_\eta^1}{\omega_1}\right]\frac{\partial}{\partial X}|\varphi_1|^2 \tag{2.3}$$

Отсюда видно, что при перемене знака параметра $\alpha = (H - \omega_{x,1}^2)/H$ уравнение (2.3) меняет свой тип с эллиптического на гиперболический. Условие $\alpha = 0$ эквивалентно условию равенства групповой скорости волны φ_1 и скорости распространения длинных волн.

На фиг. 2 на плоскости безразмерных переменных (k, H) представлена кривая $k = k^{(0)}(H)$ (*2*), на которой $\alpha = 0$, и кривая $k = k_{\min}(H)$ (*1*). Кривая *2* лежит в области $k < k_{\min}$ только при глубинах $H < H_{\text{cr}}^{(0)} \approx 5$. В этом случае резонансное взаимодействие длинной и короткой волн проявляется наиболее заметно. При больших глубинах квадратичные резонансные взаимодействия преобладают, так как короткая волна, резонансно взаимодействующая с длинной волной, может являться волной накачки в трехволновом процессе.

Условие $\alpha = 0$ является условием резонансного взаимодействия длинной и короткой волн. Действительно, предположим, что волновой пакет φ_1 не зависит от Y. В этом случае из (3.3) следует, что амплитуда вынужденной волны φ_0 стремится к бесконечности при $\alpha \to 0$. Условие $\alpha = 0$ может быть получено предельным переходом из условия резонансного взаимодействия трех волн $\omega(k_1) + \omega(k_2) = \omega(k_1 + k_2)$, когда волновое число k_1 или k_2 стремится к нулю.

Сделаем замену переменных $\phi_1 = \varepsilon^{-1/2}\varphi_1$, $T' = \varepsilon T$ и перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью $\omega_{x,1}$. Из (2.1) находим с точностью до членов более высокого порядка по ε

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial T} + i\frac{\omega_{x,1}}{2}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial X^2} + ik\phi_1 u_0 = 0 \tag{2.4}$$

$$\omega_{x,1}\frac{\partial u_0}{\partial T} + \frac{\lambda^1_\eta k}{\omega_1}\frac{\partial |\phi_1|^2}{\partial X} = 0, \quad u_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial X}$$

где штрих у переменной T опущен. Аналогичная система уравнений получена в [3] для капиллярно-гравитационных волн.

Пусть основное движение жидкости вызывается длинной волной u_0, а $|\phi_1| \ll 1$ при $t = 0$. Линеаризуя (2.4) относительно ϕ_1, находим

$$u_0 = u_0(X), \quad i\frac{\partial \phi_1}{\partial T} = L\phi_1, \quad L = \omega_{x,1}\frac{\partial}{\partial X^2} + ku_0 \tag{2.5}$$

Рассмотрим частные решения (2.5), периодические во времени.
Подставляя $\phi_1 = \psi_1 \exp(i\lambda T)$ в (2.5), находим

$$(L + \lambda)\psi_1 = 0 \tag{2.6}$$

Для потенциала $u_0(X)$, достаточно гладкого и обращающегося в нуль при $|x| \to \infty$, уравнение (2.6) имеет ограниченные решения при $\lambda \geqslant 0$ и при некоторых дискретных значениях $\lambda < 0$. Собственные значения дискретного спектра соответствуют убывающим при $|x| \to \infty$ решениям (2.6). Для периодического потенциала $u_0(X)$ ограниченное решение (2.6) существует, если λ не лежит в запрещенных зонах, ограниченных дискретным набором точек λ_n.

В любом случае влияние длинной волны на короткую волну малой амплитуды не приводит к существенному росту ее и сводится только к эффектам амплитудной модуляции короткой волны.

Рассмотрим случай, когда $|u_0| \ll 1$ и движение жидкости в основном вызывается волной ϕ_1. Линеаризуем (2.4) относительно u_0

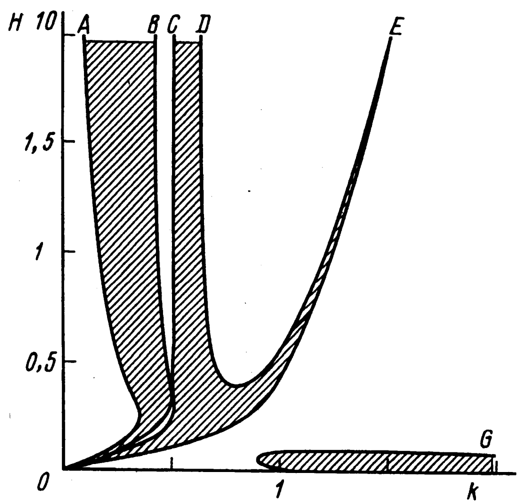
$$i\frac{\partial \phi_1}{\partial T} = \frac{\omega_{x,1}}{2}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial X^2}, \quad \frac{\partial u_0}{\partial T} = -\frac{\lambda^1_\eta k}{\omega_1 \omega_{x,1}}\frac{\partial |\phi_1|^2}{\partial X} \tag{2.7}$$

Из (2.7) видно, что u_0 возрастает пропорционально времени. При выполнении условия $u_0 \approx \phi_1$ необходимо учитывать влияние u_0 на ϕ_1. Переходя к потенциалу φ_1, находим, что амплитуда длинной волны в этом случае должна быть в $\varepsilon^{-1/2}$ раз больше амплитуды короткой волны. Заметим, что если волна W периодическая, то $\varphi_1 = \text{const}$ и возбуждение среднего течения не происходит.

3. Самовоздействие и дисперсия. В случае, когда условие резонансного взаимодействия длинной и короткой волн не выполнено и $\alpha \neq 0$, асимптотические уравнения (2.1) с точностью до малых высшего порядка сводятся к системе уравнений

$$\left(i\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\omega_{xx,1}}{2}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\omega_{x,1}}{2k}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)\varphi_1 = \varkappa_1 |\varphi_1|^2 \varphi_1 + \varkappa_2 \varphi_1 \frac{\partial}{\partial X}\varphi_0 \tag{3.1}$$

$$\left(\alpha\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)\varphi_0 = -\varkappa_3 \frac{\partial}{\partial X}|\varphi_1|^2$$



Фиг. 3. Представление областей устойчивости и неустойчивости периодической изгибно-гравитационной волны по отношению к попутным периодическим возмущениям ее амплитуды на плоскости (k, H). В заштрихованной области волна неустойчива

$$2\omega_1\varkappa_1 = 2(\lambda^1_\eta)^2(\lambda^1_\eta\lambda^2_\eta - k^2) - \lambda^1_\varphi(k^2 - (\lambda^1_\eta)^2)^2 + [4(2k^2 - \lambda^1_\eta\lambda^2_\eta)(\lambda^1_\eta\lambda^2_\varphi(2k^2 - \lambda^1_\eta\lambda^2_\eta) + \omega_1^2(k^2 + (\lambda^1_\eta)^2)) + \lambda^1_\varphi(k^2 + (\lambda^1_\eta)^2)(8\lambda^1_\eta k^2 + \lambda^2_\eta k^2 - 3(\lambda^1_\eta)^2\lambda^2_\eta)][2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)]^{-1}$$

$$2\omega_1\varkappa_2 = \omega_{x,1}\frac{\lambda^1_\varphi(k^2 - (\lambda^1_\eta)^2)}{2\omega_1} + k, \quad \varkappa_3 = \frac{1}{H}\left[\omega_{x,1}(k^2 - (\lambda^1_\eta)^2) + 2\frac{k\lambda^1_\eta}{\omega_1}\right]$$

Аналогичная система уравнений для капиллярно-гравитационных волн получена в [4].

На фиг. 3 на плоскости (H, k) представлены кривые OA, OB, OC, OE, DE и HG. На этих кривых происходит изменение знака одного из параметров, характеризующих свойства определенного типа решений системы (3.1). Рассматриваются следующие параметры: $\omega_{xx,1}$, α, $\varkappa_4 \equiv \varkappa_1 - \varkappa_2\varkappa_3/\alpha$. Характерный размер длины λ, так же как и ранее, выбран так, что $D = 1$.

На кривой OB выполняется условие $\omega_{xx,1} = 0$, при этом слева от OD $\omega_{xx,1} < 0$ и справа от OB $\omega_{xx,1} > 0$. Волновые пакеты малой амплитуды со спектром в окрестности OB испытывают слабое дисперсионное расплывание, их амплитуда уменьшается со временем как $t^{-1/3}$ в отличие от остальных волн, амплитуда которых спадает как $t^{-1/2}$.

На кривой OE выполняется $\alpha = 0$, знак α изменяется с плюса на минус при пересечении кривой OE слева направо. Как отмечалось выше, кривая OE – резонансная, т.е. волновой пакет с волновым числом, лежащим на OE, возбуждает резонансным образом нулевую гармонику или длинную волну. На кривой OE обращается в бесконечность коэффициент $\varkappa_4$, знак этого коэффициента изменяется с минуса на плюс при пересечении OE слева направо.

Другой резонансной кривой является OC. Волновые числа, лежащие на OC, удовлетворяют резонансному условию генерации второй гармоники и равны $k_{min}/2$. На этой кривой обращаются в бесконечность коэффициенты $\varkappa_1$ и $\varkappa_4$. При этом их знаки изменяются с плюса на минус при пересечении OC слева направо. Очевидно, что вблизи резонансных кривых OE и OC нарушаются предположения, сделанные при выводе (3.1).

На кривых OA, DE и HG выполняется $\varkappa_4 = 0$. Знак $\varkappa_4$ при пересечении этих кривых слева направо меняется с минуса на плюс на AB и с плюса на минус на HG. В области, вырезаемой кривой DE на плоскости (H, k), выполняется $\varkappa_4 > 0$.

На фиг. 3 координата H точек A, B, C, D, E равна бесконечности. Точка A лежит на оси H, т.е. кривая OA при больших H асимптотически приближается к оси H. Кривая OC имеет асимптоту $k=(1/14)^{1/4}$, кривая OB имеет асимптоту $k = k_0$, где k_0 удовлетворяет уравнению $-1+30k_0^4+15k_0^8=0$, кривая DE имеет вертикальную асимптоту $k=(2/13)^{1/4}$. При больших k асимптотика кривых DE и OE определяется формулой $H \approx 25/4k^5$. Точка G лежит на оси k, т.е. при больших k кривая HG асимптотически приближается к оси k. Кривые OC и OB пересекаются.

При $H \to \infty$ выполняется $\varkappa_3 \to 0$ и среднее течение исчезает. В этом коротковолновом пределе система уравнений (3.1) сводится к одному нелинейному уравнению Шредингера

$$\left(i\frac{\partial}{\partial T}+\frac{\omega_{xx,1}}{2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\omega_{x,1}}{2k}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)\varphi_1=\frac{k^4(2-13k^4)}{\omega_1(1-14k^4)}|\varphi_1|^2\varphi_1 \tag{3.2}$$

В случае произвольной глубины H среднее течение исключается из (3.1) в случае, когда форма волнового пакета φ_1 постоянна вдоль оси Y. Тогда после интегрирования второго уравнения (3.1) и подстановки выражения для $\partial\varphi_0/\partial X$ в первое уравнение находим

$$\left(i\frac{\partial}{\partial T}+\frac{\omega_{xx,1}}{2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}\right)\varphi_1=\varkappa_4|\varphi_1|^2\varphi_1 \tag{3.3}$$

При выполнении $\omega_{xx,1}\varkappa_4 < 0$ имеет место неустойчивость Бенджамина – Фейра [2], приводящая к распаду периодической волны на волновые пакеты с огибающими – солитонами. Решение (3.1) и (3.3), соответствующее периодической волне, имеет вид $\varphi_1 = \varphi_1^{(0)}\exp(i\varkappa_4 T)$ и $\varphi_0 = 0$, где $\varphi_1^{(0)}$ равно амплитуде волны, а величина $\varkappa_4$ равна стоксовому сдвигу частоты линейной волны. Области неустойчивости заштрихованы на фиг. 3.

Рассмотрим вопрос об устойчивости периодической волны по отношению к малым возмущениям, распространяющимся под произвольным углом к оси X. Положим

$$\varphi_1=(\varphi_1^{(0)}+\varepsilon\psi_1)\exp(i(\varkappa_4T+\varepsilon\theta_1)),\quad \varphi_0=\varepsilon\psi_0 \tag{3.4}$$

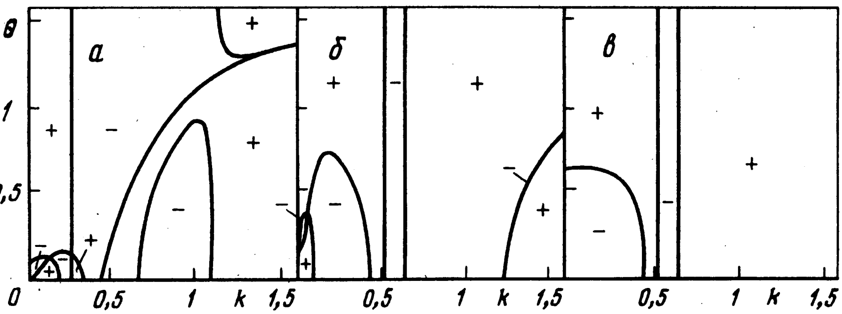
Подставляя (3.4) в (3.1), учитывая только слагаемые первого порядка по ε и представляя решения полученных линейных уравнений в виде Фурье-интегралов, находим, что условие существования ненулевого решения для ψ_1, ψ_0 и θ_1 имеет вид

$$2S^2=\frac{1}{2}\left(\omega_{xx,1}R_x^2+\frac{\omega_{x,1}}{k}R_y^2\right)^2+2\varphi_1^{(0)}\left(\omega_{xx,1}R_x^2+\frac{\omega_{x,1}}{k}R_y^2\right)\left(\varkappa_1-\frac{\varkappa_2\varkappa_3R_x^2}{\alpha R_x^2+R_y^2}\right) \tag{3.5}$$

Здесь вектор (R_x, R_y) – волновой вектор возмущения, величина $\exp(iST)$ определяет временную эволюцию амплитуды возмущения.

Видно, что если правая часть в (3.5) меньше нуля, то величина S мнимая и имеет место неустойчивость. Очевидно, что при $R_y = 0$ условие неустойчивости сводится к критерию Бенджамина – Фейра. При $R_x = 0$ неустойчивость имеет место при $\varkappa_1 < 0$.

В общем случае при отрицательности последнего слагаемого в правой части (3.5)



Фиг. 4. Представление областей устойчивости (+) и неустойчивости (–) периодической изгибно-гравитационной волны по отношению к периодическим возмущениям ее амплитуды, составляющим угол θ с направлением распространения волны; $H = 1(a)$, $10(б)$ и $\infty(в)$

имеет место неустойчивость для достаточно больших амплитуд $\varphi_1^{(0)}$. Это условие совпадает с условием существования солитонов огибающих, модулирующих периодическую волну в направлении, определяемом вектором (R_x, R_y). Действительно, рассмотрим решения (3.1), удовлетворяющие условию

$$\varphi_1 = \varphi_1(T, \xi), \quad \varphi_0 = \varphi_0(T, \xi), \quad \xi = R_x X + R_y Y \tag{3.6}$$

Подставляя (3.6) в (3.1), находим

$$\left(i\frac{\partial}{\partial T} + \lambda\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right)\varphi_1 = \varkappa_4 \mid \varphi_1 \mid^2 \varphi_1 \tag{3.7}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\omega_{xx,1}R_x^2 + \frac{\omega_{x,1}}{k}R_y^2\right), \quad \varkappa_4^* = \varkappa_1 - \frac{\varkappa_2\varkappa_3 R_x^2}{\alpha R_x^2 + R_y^2}$$

Односолитонное решение имеет вид

$$\varphi_1 = A\cos h[B(T+\xi)]e^{i(sT+r\xi)}$$

$$A^2 = -2\frac{s+r^2}{\tilde{\varkappa}_4}, \quad B^2 = \frac{s+r^2}{\lambda}, \quad r = -\frac{1}{2\lambda}$$

Видно, что для положительности A^2 и B^2 должно выполняться $\lambda\varkappa_4^* < 0$.

Легко видеть, что критерий неустойчивости $\lambda\varkappa_4 < 0$ зависит только от направления вектора (R_x, R_y) и не зависит от его модуля. Обозначив $\mathbf{R} = R\,(\cos\theta, \sin\theta)$, запишем критерий неустойчивости в виде

$$\Lambda < 0, \quad \Lambda = \left(\omega_{xx,1}\cos^2\theta + \frac{\omega_{x,1}}{k}\sin^2\theta\right)\left(\varkappa_1 - \frac{\varkappa_2\varkappa_3\cos^2\theta}{\alpha\cos^2\theta + \sin^2\theta}\right) \tag{3.8}$$

На фиг. 4 представлены кривые на плоскости (k, θ), на которых $\Lambda = 0$ для различных значений глубины H. Знаки плюс и минус обозначают области, в которых $\Lambda > 0$ и $\Lambda < 0$ соответственно. Видно, что в бесконечно глубокой жидкости из неустойчивости периодической волны по отношению к возмущениям с $\theta \neq 0$ всегда следует неустойчивость по отношению к возмущениям с $\theta = 0$. Если же глубина жидкости сравнима с длиной волны, то возможна ситуация, когда периодическая волна неустойчива только по отношению к возмущениям, составляющим с направлением распространения волны ненулевой угол.

Заключение. Показано, что при $k_W = k^{(3)}$, где $3\omega(k^{(3)}) = \omega(3k^{(3)})$, неустойчивость волны W обусловлена энергетическим обменом с третьей гармоникой. Характерное время этого процесса порядка ε^{-2}. При этом если глубина жидкости меньше критического значения $H_{cr}^{(3)}$, то полная передача энергии волны W своей третьей гармонике возможна, если амплитуда третьей гармоники больше некоторого порогового значения. При $H > H_{cr}^{(3)}$ пороговый эффект отсутствует и волна W может передать всю свою энергию третьей гармонике, амплитуда которой как угодно мала в начальный момент времени. Размерная глубина $H_{cr}^{(3)}$ зависит от жесткости пластины и имеет порядок длины l.

Если $k_W \in (0, k_{min})$ и $k_W \neq k_{min}/2$, $k_W \neq k^{(3)}$, то неустойчивость Бенджамена – Фейра может в зависимости от глубины жидкости приводить к распаду огибающей волны W на прямые или косые солитоны. При этом, если глубина жидкости сравнима с длиной волны, возможны ситуации, когда волна W неустойчива только по отношению к возмущениям, волновые векторы которых составляют ненулевой угол с направлением $\mathbf{k}_W$. Если глубина жидкости велика, то неустойчивость по отношению к "косым" возмущениям всегда означает неустойчивость по отношению к возмущениям, не меняющим форму волны в направлении ее гребней.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-010-1746) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза и Российского фонда фундаментальных исследований (INTAS-RFBR 95-0435).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марченко А.В.* Устойчивость изгибно-гравитационных волн и квадратичные взаимодействия // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 1.
2. *Benjamin T.B., Feir J.F.* The desintegration of wave trains on deep water. Pt 1 // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. Pt. 3. P. 471–430.
3. *Benney D.J.* A general theory for interactions between short and long waves // Stud. Appl. Math. 1976. V. 56. № 1. P. 81–94.
4. *Davey A., Stewartson K.* On three-dimensional packets of surface waves // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1974. V. 338. № 1613. P. 101–110.

Москва

Поступила в редакцию 18.VIII.1997