

УДК 532.546

© 1999 г. В.Н. ЭМИХ

ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗ ПОДПОЧВЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ

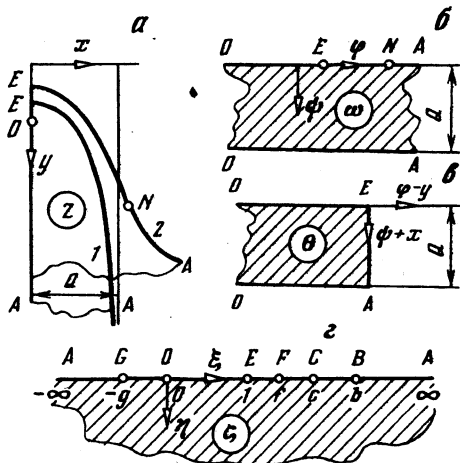
В рамках многопараметрических краевых задач фильтрации со свободными границами исследован комплекс двумерных течений из одиночного подпочвенного источника и из системы источников. Отмечается связь отдельных из рассматриваемых схем со сходными схемами, описанными в литературе.

В основополагающей для современной гидродинамической теории безнапорной фильтрации работе Н.Е. Жуковского [1], опубликованной в 1923 г., решена задача об обтекании непроницаемой шпунтовой завесы, заглубленной в однородный грунт, неограниченный по глубине и простиранию. При этом была введена аналитическая функция (функция Жуковского), позволяющая отразить в краевой задаче специфическое для течений такого типа условие постоянства давления на свободной поверхности потока.

Здесь и в некоторых последующих работах по фильтрации из каналов предполагалось, что при движении вглубь поток не испытывает противодействия, или подпора, происходя в условиях так называемой свободной фильтрации. Такое допущение согласуется с реальностью в тех случаях, когда под покровным слоем на достаточно большой по сравнению с размерами канала глубине залегает пласт относительно высокой водопроницаемости, не содержащий напорных подземных вод и способный поэтому беспрепятственно поглощать нисходящий фильтрационный поток. Если же, напротив, покровный слой подстилается слабопроницаемыми или водоупорными пластами, то они частично и полностью противодействуют просачиванию грунтовых вод вглубь, вызывая вместе с тем их растекание в стороны.

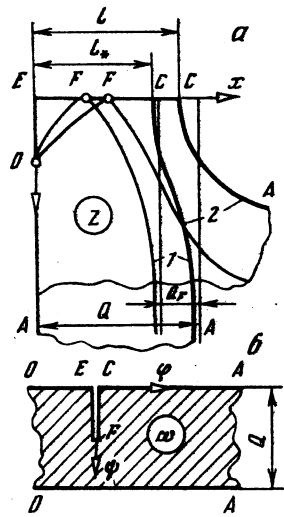
В настоящей статье представлен комплекс разработанных автором математических моделей двумерных фильтрационных течений из подпочвенных источников. Их анализ осуществляется на фоне известной [2] и описываемой в начале разд. 1 схемы свободной фильтрации под поверхностью почвы из одиночного источника. Изложенные в статье теоретические разработки могут быть использованы для расчетов фильтрации при захоронении загрязнений, аккумуляции в подземных пластах пресных вод и как одно из звеньев – в моделях подпочвенного орошения, при построении которых необходим также учет влагопереноса в корневой зоне.

1. Свободная фильтрация из одиночного источника. Рассмотрим в качестве отправной свободную фильтрацию с расходом $2Q$ из подпочвенного точечного источника O в однородном неограниченном пласте. В пределах правой половины области течения, изображенной на фиг. 1, *a*, поставим задачу о нахождении приведенного к коэффициенту фильтрации комплексного потенциала $\omega = \varphi + i\psi$ (φ – потенциал скорости фильтрации, ψ – функция тока) – аналитической функции комплексной координаты $z = x + iy$ точек области течения. Для построения решения воспользуемся также функцией Жуковского $\theta = \omega + iz = (\varphi - y) + i(\psi + x)$ [2, гл. IV, § 1]. С учетом зависимости $p = -\text{Re } \theta = y - \varphi$ (p – давление, приведенное к удельному весу жидкости) и при условиях $p = \psi = 0$ на кривой депрессии EA области функций ω и θ изображены на фиг. 1, *b*, *в*.



Фиг. 1

Фиг. 1. Области фильтрации (а), комплексного потенциала (б), функции Жуковского (в) и вспомогательная полуплоскость (г) для схемы фильтрации из одиночного источника под поверхностью почвы



Фиг. 2

Фиг. 2. Области фильтрации (а) и комплексного потенциала (б) в схеме фильтрации из одиночного источника с выходом части потока на поверхность почвы

Конформно отображая их на полуплоскость $\text{Im } \zeta \geq 0$ (фиг. 1, г), имеем

$$\omega = \frac{Q}{\pi} \int_1^{\zeta} \frac{du}{u} + y_E = \frac{Q}{\pi} \ln \zeta + y_E \quad (\zeta = \xi + i\eta) \quad (1.1)$$

$$\theta = i \frac{Q}{\pi} \int_1^{\zeta} \frac{du}{u\sqrt{u-1}} = i \frac{2Q}{\pi} \arctg \sqrt{\zeta-1} \quad (1.2)$$

$$z = i(\omega - \theta) = \frac{2Q}{\pi} \arctg \sqrt{\zeta-1} + i \left(\frac{Q}{\pi} \ln \zeta + y_E \right) \quad (1.3)$$

Особые точки B, C, F, G на фиг. 1, г относятся к последующим схемам течения.

При $\eta = 0, 1 \leq \xi < \infty$ равенство (1.3) представляет собой комплексно-параметрическое уравнение правой ветви EA кривой депрессии; в исследуемом случае свободной фильтрации она отмечена цифрой 1. Из (1.3) заключаем, что $x \rightarrow Q$ при $\xi \rightarrow \infty$ и, следовательно, течение имеет место в пределах вертикальной полосы шириной $2Q$, границы которой являются асимптотами ветвей кривой депрессии потока.

Преобразуя зависимость (1.3) для участка AOE , получим

$$y = (2Q/\pi) \ln(1 + \sqrt{1-\xi}) + y_E; \quad -\infty < \xi \leq 1$$

Отсюда при $\xi = 0$ вытекает связь между задаваемой глубиной y_0 заложения источника O и ординатой y_E наивысшей точки E потока; закрепим за ней в рассматриваемой схеме специальное обозначение

$$y_* = y_0 - (2Q/\pi) \ln 2 \quad (1.4)$$

Согласно (1.4) имеем $y_* > 0$, т.е. поток не достигает поверхности земли, если интенсивность источника подчинена ограничению

$$Q < Q_0 = \pi y_0 / \ln 4 \quad (1.5)$$

Если же $Q > Q_0$, то часть воды, фильтрующейся из источника, выходит на поверхность земли и растекается по ней в пределах некоторой полосы. Будем считать, что затем вся эта жидкость возвращается в почву. В такой ситуации, схематично представленной на фиг. 2, а, в области функции ω (фиг. 2, б) появляется вертикальный разрез, а ее отображение на полуплоскость $\text{Im } \zeta \geq 0$ (фиг. 1, з) определяется следующим образом:

$$\omega = i \frac{Q\sqrt{c}}{\pi f} \int_1^{\zeta} \frac{(f-u)du}{u\sqrt{(u-1)(c-u)}} = i \frac{Q}{\pi} \left[\arccos \frac{2c-(1+c)\zeta}{(c-1)\zeta} - \frac{\sqrt{c}}{f} \arccos \frac{1+c-2\zeta}{c-1} \right]$$

Из условия $\omega(c) = 0$ найдем $f = \sqrt{c}$, и предыдущее равенство примет вид

$$\omega = i \frac{2Q}{\pi} \arcsin \frac{\sqrt{(\zeta-1)(c-\zeta)}}{(\sqrt{c}+1)\sqrt{\zeta}} \quad (1.6)$$

Для функции θ сохраняется формула отображения (1.2).
На участке AOE получим после преобразований

$$y = \frac{2Q}{\pi} \ln \frac{(1+\sqrt{1-\xi})(\sqrt{c-\xi}+\sqrt{1-\xi})}{\sqrt{c-\xi}+\sqrt{c(1-\xi)}}; \quad -\infty < \xi \leq 1$$

При $\xi = 0$, $y = y_0$ из последнего равенства следует

$$y_0 = \frac{2Q}{\pi} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{c}} \right), \quad c = \left\{ \exp \left[\frac{\pi y_0}{2Q} \right] - 1 \right\}^{-2} \quad (1.7)$$

В пределах полосы затопления EC имеем с учетом (1.2) и (1.6)

$$z = x = i(w - \theta) = \frac{2Q}{\pi} \arcsin \frac{\sqrt{\xi-1}(\sqrt{c+\xi}-\sqrt{c-\xi})}{\xi(\sqrt{c}+1)} \quad (1.8)$$

При $\xi = c$ это соотношение в сочетании с (1.7) определит ширину полосы EC

$$l_* = \frac{2Q}{\pi} \arcsin \sqrt{1 - \frac{1}{c}} = \frac{2Q}{\pi} \arccos \left\{ \exp \left[\frac{\pi y_0}{2Q} \right] - 1 \right\} \quad (1.9)$$

Здесь отражено расширение полосы затопления с интенсификацией источника. Сама же интенсификация при свободной фильтрации ничем не регламентируется, вызывая пропорциональное расширение вертикальной полосы шириной $2Q$, в пределах которой поток формируется и в случае его частичного выхода на поверхность земли, поскольку сохраняется зафиксированная выше асимптотика депрессионной кривой; последняя также отмечена на фиг. 2, а цифрой l .

Полагая $\xi = f$ в правых частях формул (1.6) и (1.8), получим соответственно расход Q_F жидкости, проникающей через участок EF на поверхность, а через участок FC – с поверхности в почву, и абсциссу x_F точки разделения этих потоков

$$Q_F = \frac{2Q}{\pi} \arcsin \frac{f-1}{f+1}, \quad x_F = \frac{2Q}{\pi} \arcsin \frac{2\sqrt{f^2-f}-f+1}{(f+1)\sqrt{f}}; \quad f = \sqrt{c} \quad (1.10)$$

В силу второго равенства (1.7) параметр c неограниченно возрастает с уменьшением глубины y_0 заложения источника. Согласно (1.9) и (1.10), при этом $l \rightarrow Q$, $x_F \rightarrow 0$, $Q_F \rightarrow Q$ и, следовательно, ширина полосы затопления стремится к ширине всего потока, доля просачивающейся на поверхность жидкости приближается к расхо-

ду источника, а участок EF сокращается сообразно со структурой течения в окрестности источника O . Однако предельный переход $y_0 \rightarrow 0$, $c \rightarrow \infty$ приводит к вырождению рассматриваемой краевой задачи, при котором зависимость (1.6) отождествляется с зависимостью (1.2), в результате чего равенство (1.3) превращается в тождество $z \equiv 0$.

В гидродинамической трактовке такое вырождение означает своего рода "короткое замыкание" фильтрационной схемы при совмещении точечного источника O с эквипотенциалью EC . Учитывая выявленную выше трансформацию области течения в полуплоску по мере приближения источника к поверхности, естественно в отменном предельном случае передать функцию источника участку поверхности EC . В результате возникнет простейшая схема одномерного нисходящего потока в полуплоскости шириной $2Q$ с постоянной скоростью фильтрации, равной по величине коэффициенту фильтрации грунта.

2. Фильтрация из источника с подпором. Исследуем теперь течение из источника при наличии подпора снизу. Его воздействие состоит в том, что с углублением гидродинамическое давление в потоке, как и в других случаях, вначале убывает, а затем неограниченно возрастает [2]. С этим связан разрез на граничном участке OA области функции θ ; вершина G разреза соответствует точке минимума давления (фиг. 3). Отображение области на полуплоскость $\text{Im } \zeta \geq 0$ (фиг. 1, 2) осуществляется посредством функции (ср. с (12))

$$\theta = i \frac{Q}{\pi g} \int_1^{\zeta} \frac{(u+g)du}{u\sqrt{u-1}} = i \frac{2Q}{\pi} \left(\text{arctg} \sqrt{\zeta-1} + \frac{\sqrt{\zeta-1}}{g} \right) \quad (2.1)$$

Для функции $\omega(\zeta)$ сохраняется одно из двух полученных представлений – (1.1) или (1.6) – в зависимости от того, остается ли весь поток в почве или часть его выходит на поверхность.

В первом случае на участке AOE имеем

$$y = \left(\frac{2Q}{\pi} \right) \left[\ln(1 + \sqrt{1-\xi}) + \left(\frac{1}{g} \right) \sqrt{1-\xi} \right] + y_E; \quad \infty < \xi \leq 1 \quad (2.2)$$

Полагая здесь $\xi = 0$, $y = y_0$, получим соотношение, из которого с использованием (1.4) можно определить параметр g

$$y_E = y_* - 2Q/(\pi g) \quad (2.3)$$

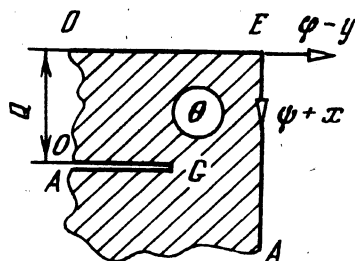
Вытекающее отсюда неравенство $y_E < y_*$ означает более высокое, чем при свободной фильтрации, положение наивысшей точки E области z и может служить индикатором присутствия подпора.

При $\xi = -g$ найдем, исходя из зависимостей (2.2), (2.3) и (1.4)

$$y_G = y_0 + \frac{2Q}{\pi} (\mu - \ln(2\mu)), \quad \frac{dy_G}{dg} = \frac{Q}{\pi} \frac{\mu(1-\mu)}{\sqrt{1+g}}; \quad \mu = \frac{1}{1 + \sqrt{1+g}}$$

и, следовательно, с уменьшением параметра g точка G в области течения приближается к источнику, что можно истолковать как расширение зоны подпора в результате его усиления.

В подтверждение такой интерпретации установим характер зависимости давления в произвольной фиксированной точке участка AOE от параметра g . Будем основываться при этом на следующих соотношениях, получаемых с использованием формул



Фиг. 3. Область функции Жуковского при фильтрации из одиночного источника с подпором

(1.1), (2.3) и (1.4):

$$p = y - \varphi, \quad y = y_0 + \frac{2Q}{\pi} \left(\ln \frac{\sqrt{1-\xi} + 1}{2} + \frac{\sqrt{1-\xi} - 1}{g} \right)$$

$$\varphi = y_0 + \frac{Q}{\pi} \left(\ln \frac{|\xi|}{4} - \frac{2}{g} \right); \quad -\infty < \xi \leq 1 \quad (2.4)$$

Отсюда с учетом обусловленного выше равенства $y = \text{const}$ найдем

$$\frac{dp}{dy} = - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dg} - \frac{\partial \varphi}{\partial g} = - \frac{2Q(1+g)(1+\sqrt{1-\xi})}{\pi g^2(1+g+\sqrt{1-\xi})} < 0 \quad (2.5)$$

Таким образом, усиление подпора связано с уменьшением параметра g , которое, как установлено выше, сопровождается приближением точки G к источнику.

В прямой физической постановке интенсивность подпора должна определяться давлением на той глубине, где этот подпор создается, распространяясь на водоносный пласт. Но в исследуемой схеме пласта неограниченной мощности задать подпор можно лишь косвенно, зафиксировав какое-либо из его проявлений в сформировавшемся под его воздействием фильтрационном потоке. Реализовать такой подход на практике проще всего путем задания координаты некоторой точки депрессионной кривой [3-5]; варианты ее расположения в рассматриваемом случае представлены на фиг. 1, а, и 2, а под цифрой 2.

Для выявления особенностей кривой, связанных с подпором, обратимся к ее параметрическим уравнениям. Представим их на основе зависимостей (1.1), (2.1), (2.3) и соотношения $z = i(\omega - \theta)$ в записи

$$x = \frac{Q}{\pi g} \int_1^\xi \frac{(u+g)du}{u\sqrt{u-1}} = \frac{2Q}{\pi} \left(\arctg \sqrt{\xi-1} + \frac{\sqrt{\xi-1}}{g} \right)$$

$$y = \frac{Q}{\pi} \int_1^\xi \frac{du}{u} + y_E = \frac{Q}{\pi} \left(\ln \xi - \frac{2}{g} \right) + y_*, \quad 1 \leq \xi < \infty \quad (2.6)$$

Отсюда следует, что в отличие от свободной фильтрации $x \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \infty$, т.е. в горизонтальном направлении протяженность кривой депрессии, а следовательно, и всего потока становится неограниченной. Далее найдем из интегральных представлений (2.6)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{g\sqrt{\xi-1}}{\xi+g}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{d\xi}{dx} = \frac{\pi g^2 \xi (2+g-\xi)}{2Q(\xi+g)^3} \quad (2.7)$$

Первая группа этих равенств отражает выполаживание кривой депрессии при удалении от источника; асимптота у нее теперь отсутствует. Из выражения для второй производной вычисляется аффикс $\xi_N = 2 + g$ точки перегиба N кривой AE , причем $\xi_N \rightarrow \infty$ при $g \rightarrow \infty$: с исчезновением подпора исчезает и точка N .

Зафиксируем при некотором значении абсциссу x ; тогда из равенства (2.6) для x определится зависимость $\xi(g)$. С ее использованием получим из выражения (2.6) для ординаты y соответствующей точки кривой депрессии

$$\frac{dy}{dg} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dg} + \frac{\partial y}{\partial g} = \frac{2Q(1+g)\xi}{\pi g^2(\xi+g)} > 0$$

Полученное неравенство отражает сущность подпора: его усиление, связанное выше с убыванием параметра g , приводит к подъему кривой депрессии и, в частности,

точки E . Как и при свободной фильтрации, этому в силу соотношения (2.3) способствует также увеличение расхода Q источника.

Конечным результатом воздействия отмеченных факторов оказывается трансформация потока с выходом его на поверхность почвы. В этом случае по-прежнему условимся считать, что вся жидкость, профильтровавшаяся на поверхность, возвращается затем в почву и, следовательно, для функции ω сохраняется формула (1.6). На ее основе в сочетании с представлением (2.1) для функции θ имеем на участке AOE после преобразований

$$y = \frac{2Q}{\pi} \left[\ln \frac{(1 + \sqrt{1 - \xi})(\sqrt{c - \xi} + \sqrt{1 - \xi})}{\sqrt{c - \xi} + \sqrt{c(1 - \xi)}} + \frac{\sqrt{1 - \xi}}{g} \right]; \quad -\infty < \xi \leq 1$$

Полагая здесь $\xi = 0$, $y = y_0$, а в соотношении (2.1) $\xi = c$, $\theta = il$, получим систему уравнений относительно параметров c и g

$$F_1(c, g) = (2Q/\pi)[\ln(1 + 1/\sqrt{c}) + 1/g] = y_0 \quad (2.8)$$

$$F_2(c, g) = (2Q/\pi)(\operatorname{arctg} \sqrt{c-1} + \sqrt{c-1}/g) = l \quad (2.9)$$

Представим функцию $F_2(c, g)$ как сложную функцию параметра g , определяя в ней зависимость $c(g)$ из равенства (2.8) с фиксированным значением величины y_0 . При этом $dc/dg < 0$, и далее имеем на основании (2.9)

$$\frac{dF_2}{dg} = \frac{\partial F_2}{\partial c} \frac{dc}{dg} + \frac{\partial F_2}{\partial g} < 0 \quad (2.10)$$

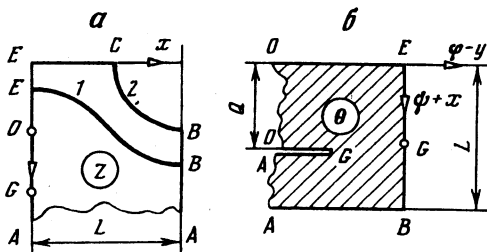
Из (2.10) вытекает однозначная разрешимость уравнения (2.9) относительно параметра g в некотором интервале (g_0, g_1) при условиях $F_2(g_0) > l$, $F_2(g_1) < l$. За его левый конец можно принять значение $g_0 = 2Q/(\pi y_0)$, получаемое из (2.8) при $c = \infty$ ($l = \infty$); оно соответствует подпоры, приводящему к заполнению водой всего пласта. Правым концом интервала при выполнении условия (1.5) является значение $g_1 = 2Q/(\pi y_0 - Q \ln 4)$, также получаемое из соотношения (2.8) при $c = 1$ ($l = 0$) и соответствующее тому подпоры, по достижении которого точка E выходит на поверхность. В противоположном случае, когда часть жидкости просачивается на поверхность уже при свободной фильтрации, следует положить $g_1 = \infty$; при этом равенства (2.8) и (2.9) перейдут в равенства (1.7) и (1.9). Определяемая вторым из них величина l_* удовлетворяет в силу (2.10) неравенству $l > l_*$, которое может служить индикатором наличия подпора.

Из соотношений $z = i(\omega - \theta)$, $dz/d\omega$, где $w = w_x - iw_y$ — комплексная скорость фильтрации [2], найдем с использованием интегральных представлений для функций ω и θ

$$\frac{1}{w} = i \left(1 - \frac{d\theta}{d\omega} \right), \quad \frac{d\theta}{d\omega} = \frac{(\zeta + g)\sqrt{c - \zeta}}{g(\sqrt{c} - \zeta)}$$

Отсюда заключаем, что при $g = \infty$, т.е. в случае свободной фильтрации, $w \rightarrow -i$ при $\zeta \rightarrow \infty$, по мере углубления течение приближается к одномерному нисходящему, а величина скорости фильтрации — к коэффициенту фильтрации грунта. При воздействии же подпора, когда параметр g принимает конечное значение, $w \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$. Такая альтернатива служит исходным классификационным критерием [2]; в конкретных же случаях для задания подпора в краевой задаче целесообразно, как указывалось выше, использовать легко измеряемые координаты наивысшей точки депрессионной кривой.

Отметим рассмотренную ранее [6] (см. также [2, гл. IV, § 5]) задачу о фильтрации



Фиг. 4. Области фильтрации (а) и функции Жуковского (б) при фильтрации с подпором из системы источников в неограниченном пласте

процессам. Здесь же была введена специальная аналитическая функция, нашедшая в дальнейшем применение при моделировании безнапорных фильтрационных течений с равномерно распределенной инфильтрацией или испарением.

3. Система источников в неограниченном пласте. Предположим, что в пласте неограниченной мощности функционируют с одинаковым фильтрационным расходом $2Q$ точечные источники, заложенные на одинаковой глубине y_0 от поверхности земли и отстоящие друг от друга на расстоянии $2L$. Такая постановка имеет смысл лишь при наличии подпора. Действительно, как отмечалось в разд. 1, свободная фильтрация из источника происходит в пределах вертикальной полосы шириной $2Q$, границы которой – асимптоты кривой депрессии. При этом области течения из отдельных источников изолированы друг от друга, если $Q < L$. По достижении величины Q ее максимально возможного значения L зоны действия соседних источников лишь вступают в соприкосновение своими вертикальными асимптотическими границами; сами же потоки из источников и в этом предельном случае останутся разобщенными.

Между тем воздействие сколь угодно малого подпора вызывает неограниченное растекание фильтрационного потока в стороны из одиночного источника при сколь угодно малом его расходе. Вследствие этого потоки из соседних источников войдут в контакт по некоторой разграничивающей их линии, образовав в совокупности неограниченную по протяженности область течения. При обусловленной периодичности расположения источников и их равнодебитности периодичной окажется и общая картина течения. Ограничимся поэтому его изучением в пределах одного полупериода, изображенного на фиг. 4, а.

В области функции Жуковского (фиг. 4, б) появляется дополнительный к схеме одиночного источника граничный участок, соответствующий линии AB разграничения потоков из выделенного источника и соседнего с ним справа. Отображение указанной области на полуплоскость $\text{Im } \zeta \geq 0$ (фиг. 1, з) примет вид (ср. с (2.1))

$$\theta = i \frac{Q\sqrt{b}}{\pi g} \int_1^{\zeta} \frac{(u+g)du}{u\sqrt{(u-1)(b-u)}} = i \frac{2Q}{\pi} \left[\arctg \sqrt{\frac{b(\zeta-1)}{b-\zeta}} + \frac{\sqrt{b}}{g} \arcsin \sqrt{\frac{\zeta-1}{b-1}} \right] \quad (3.1)$$

Отсюда следует при $\zeta = b$, $\theta = iL$

$$Q(1 + \sqrt{b}/g) = L \quad (3.2)$$

Предположим вначале, что поток не достигает поверхности земли; его свободная поверхность отмечена на фиг. 4, а цифрой 1. Функция $\omega(\zeta)$ определяется при этом формулой (1.1), которая с учетом зависимостей (3.1) и (3.2) приводит после преобразований на основе соотношения $z = iy = i(\omega - \theta)$ для участка AOE к равенству

$$y = \frac{2Q}{\pi} \ln \frac{\sqrt{b(1-\xi)} + \sqrt{b-\xi}}{\sqrt{b-1}} + \frac{2(L-Q)}{\pi} \text{arcth} \sqrt{\frac{b-\xi}{1-\xi}} + y_E; \quad -\infty < \xi \leq 1$$

из оросителя с подпором, создаваемым встречным восходящим потоком подземных вод. Общее поступление в почву компенсируется испарением со свободной поверхности, интенсивность которого считается постоянной. Несмотря на искусственный характер такого допущения при неограниченном углублении свободной поверхности с удалением от источника, работа [6] ценна прежде всего тем, что в ней впервые выявлены отмеченные выше особенности формы кривой депрессии, присущие описываемым

Полагая здесь $\xi = 0, y = y_0$, имеем

$$y_E = y_* + \frac{Q}{\pi} \ln \left(1 - \frac{1}{b} \right) - \frac{2(L-Q)}{\pi} \operatorname{arcth} \sqrt{b}; \quad y_* = y_0 - \frac{Q}{\pi} \ln 4 \quad (3.3)$$

Согласно (3.3), условие (1.5) является необходимым для реализации исследуемого варианта течения; в противном случае $y_* \leq 0$ и высачивание на поверхность происходит даже при свободной фильтрации. Первое равенство (3.3) отражает воздействие подпора на величину y_E через параметр b , причем $dy_E/db > 0$. Это означает, что при фиксировании величин L и Q уменьшение параметра b сопутствует подъему свободной поверхности потока, в чем проявляется усиление подпора. Последнее было связано ранее с уменьшением параметра g и, таким образом, здесь обнаруживается прямая связь между обоими параметрами, отраженная в соотношении (3.2); роль "носителя" подпора во всех аналитических зависимостях играет теперь параметр b .

Отмеченный выше монотонный характер зависимости $y_E(b)$ обеспечивает при $Q \in (0, Q_*)$, $y_E \in (0, y_*)$ однозначную разрешимость первого равенства (3.3) относительно параметра $b \in (b_1, \infty)$. Граница b_1 интервала допустимых значений параметра b определяется как корень уравнения $y_E(b) = 0$.

Вариации параметра b можно отнести также на счет величин Q или L , подчиненных в силу (3.2) ограничению $Q(1 + 1/g) < L$, поскольку $b > 1$. На границе его нарушения $b \rightarrow 1$, $y_E \rightarrow -\infty$ и, следовательно, в результате интенсификации источников или их взаимного сближения течение перестанет удовлетворять условиям обсуждаемого варианта. Последнее означает усиление подпора по отношению к потоку из какого-либо источника со стороны соседних.

Для второй из возможных ситуаций, при выходе потока на поверхность почвы его свободная поверхность отмечена на фиг. 4, а цифрой 2. Зависимость $\omega(\xi)$ выражена в этом случае формулой (1.6). Преобразуя ее, а также зависимость (3.1) применительно к участкам OE и OA и используя соотношение (3.2), можем записать для всего участка AOE ($\eta = 0, -\infty < \xi \leq 1$)

$$y = \frac{2Q}{\pi} \ln \frac{[\sqrt{b(1-\xi)} + \sqrt{b-\xi}](\sqrt{c-\xi} + \sqrt{1-\xi})}{\sqrt{b-1}[\sqrt{c(1-\xi)} + \sqrt{c-\xi}]} + \frac{2(L-Q)}{\pi} \operatorname{arcth} \sqrt{\frac{b-\xi}{1-\xi}}$$

Полагая здесь $\xi = 0, y = y_0$, а в (3.1) $\xi = c, \theta = il$, получим с учетом (3.2) систему уравнений относительно параметров b и c

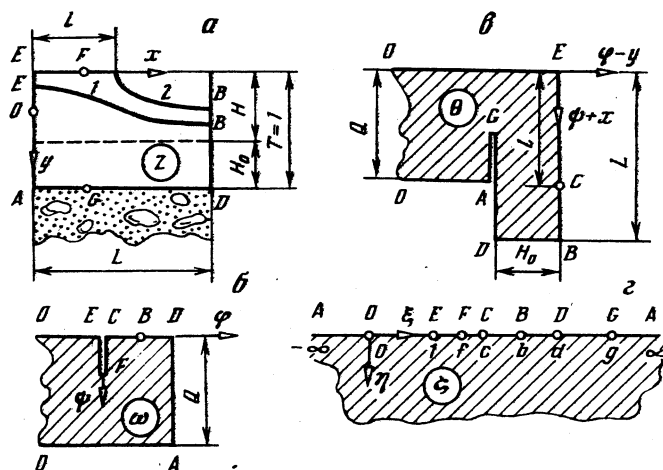
$$F_1(b, c) = \frac{Q}{\pi} \ln \frac{(1 + 1/\sqrt{c})^2}{1 - 1/b} + \frac{2(L-Q)}{\pi} \operatorname{arcth} \sqrt{b} = y_0 \quad (3.4)$$

$$F_2(b, c) = \frac{2Q}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b(c-1)}{b-c}} + \frac{2(L-Q)}{\pi} \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{c-1}{b-1}} = l \quad (3.5)$$

При $c = 1$ соотношение (3.4) отождествляется с соотношением (3.3) при $y_E = 0$ — на стыке двух исследуемых вариантов течения.

Аналитически выявляется монотонный характер зависимости функций $F_1(b, c)$ и $F_2(b, c)$ от параметров b и c ; на этой основе устанавливается в конечном итоге однозначная разрешимость системы уравнений (3.4), (3.5) относительно указанных параметров. Как и в случае одиночного источника, признаком подпора в обсуждаемой схеме может служить одно из соотношений: $y_E > y_*$ или $l > l_*$.

В статье [7] намечено к рассмотрению в числе нескольких других течение из системы подпочвенных источников с выходом на поверхность некоторой части потока, которая затем не возвращается в почву, а отводится за пределы территории. При



Фиг. 5. Области фильтрации (а), комплексного потенциала (б), функции Жуковского (в) и вспомогательная полуплоскость (з) при фильтрации из системы источников в почвенном слое с сильнопроницаемым основанием

этом, однако, предполагается наличие точек заострения на кривых депрессии посредине между соседними источниками, что возможно лишь в предельном (критическом) режиме дренируемого фильтрационного потока [8, 9]. В итоге поставленная в [7] краевая задача совершенно не соотносится с исходной схемой течения.

4. Источники в почвенном слое с сильнопроницаемым основанием. Остановимся на ситуации, типичной для районов орошаемого земледелия и характеризуемой залеганием под почвенным пластом на некоторой глубине T водоносного горизонта относительно высокой водопроницаемости, напор грунтовых вод H в котором формируется за пределами рассматриваемой территории и не подвержен воздействию со стороны фильтрационных процессов в почвенном слое, сохраняя постоянное значение и создавая подпор по отношению к потоку из оросителей. Картина течения представлена для одного из полупериодов на фиг. 5, а.

Условимся оперировать в дальнейшем приведенными координатами точек z области течения, связанными с соответствующими физическими координатами z_ϕ соотношением $z = z_\phi T$.

В отличие от исследованных выше фильтрационных течений в пластах неограниченной мощности с подпором последний может быть теперь задан с полной определенностью величиной $H_0 = 1 - H$ превышения поверхности пьезометрического напора в подстилающем горизонте над его кровлей. В терминах безразмерных координат имеем $0 \leq H_0 \leq 1$; при этом первое равенство соответствует предельному случаю свободной фильтрации, второе – насыщению всего почвенного слоя вплоть до его поверхности грунтовыми водами. Будем считать, что указанные соотношения выполняются в виде строгих неравенств.

В случае, когда влага из оросителей не достигает поверхности почвы (кривая депрессии – l на фиг. 5, а), область комплексного потенциала ω является полуполосой (фиг. 5, б – без разреза). Отображая ее и область функции θ (фиг. 5, в) на полуплоскость $\text{Im } \zeta \geq 0$ (фиг. 5, з), имеем

$$\omega = \frac{Q\sqrt{d}}{\pi} \int_1^\zeta \frac{du}{u\sqrt{d-u}} + y_E = \frac{2Q}{\pi} \left(\text{arch } \sqrt{d} - \text{arch } \sqrt{\frac{d}{\zeta}} \right) + y_E \quad (4.1)$$

$$\theta = i \frac{Q\sqrt{bd}}{\pi g} \int_1^{\zeta} \frac{(u+g)du}{u\sqrt{(u-1)(b-u)(d-u)}} = iq \left[\Pi(\beta, 1-b, k) + \frac{1}{g} F(\beta, k) \right] \quad (4.2)$$

$$q = \frac{2Q}{\pi} \sqrt{\frac{bd}{d-1}}, \quad \beta = \arcsin \sqrt{\frac{\zeta-1}{b-1}}, \quad k = \sqrt{\frac{b-1}{d-1}}$$

Здесь содержатся неполные эллиптические интегралы F и Π первого и третьего рода при модуле k в лежандровой нормальной форме [10, формулы 110.02, 110.04]. При $\zeta = d$, $\omega = H$ получим из (4.1)

$$y_E = H - (2Q/\pi) \operatorname{arch} \sqrt{d} \quad (4.3)$$

На основе зависимостей (4.1), (4.2), равенства $z(\zeta) = i(\omega - \theta)$ и условий $\theta(b) = iL$, $\theta(d) = -H + iL$, $y(0) = y_0$ (фиг. 5) выведены уравнения относительно параметров b , d и g . Последний затем исключается, а эллиптические интегралы и функции в уравнениях подвергаются преобразованиям, суть которых для задач такого типа подробно описана в монографии [9]. В итоге система уравнений относительно оставшихся параметров b и d приводится к виду

$$F_1(b, d) = [H_0 K + QF(\delta, k')] / K' = L \quad (4.4)$$

$$F_2(b, d) = \left[\frac{H_0}{K'} - \frac{q}{d} - \frac{2Q}{\pi} Z(\delta, k') \right] F(\delta, k') + \frac{2Q\sqrt{d}}{\pi} \int_0^1 \frac{(1+bu^2)du}{V(b)V(d)\sqrt{bu^2+V(b)}} = 1 - y_0 \quad (4.5)$$

$$\delta = \arcsin \sqrt{1 - \frac{1}{d}}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad K' = F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right)$$

В левую часть уравнения (4.5) входит эллиптическая дзета-функция Якоби $Z(\delta, k')$ [10, формула 140.01].

При y_E равенство (4.3) определит значение

$$Q = Q_0 = (\pi H / 2) / \operatorname{arch} \sqrt{d} \quad (4.6)$$

при котором поток достигает поверхности. И хотя само представление решения остается в силе также для значений $Q > Q_0$ (в этом случае получим лишь $y_E < 0$), будем соблюдать ограничение $Q < Q_0$, регламентирующее исследуемую схему течения. В конкретных расчетных вариантах, определяемых заданием величин L , y_0 , H_0 , система уравнений (4.4), (4.5) решается на первом этапе относительно параметров b и d с подстановкой в уравнения вместо Q выражения (4.6) для величины Q_0 и попутным ее вычислением. Дальнейшие расчеты можно производить затем при произвольном значении $Q < Q_0$.

Для нескольких комбинаций входных физических параметров в таблице приведены значения величин Q_0 и y_B . При $L = 0,1$ выполняются асимптотические соотношения

$$k \sim 4 \exp\left(-\frac{2}{\pi L}\right) \approx 0, \quad Q \sim \frac{LH}{1-y_0}, \quad y_B \sim \frac{4}{\pi} Q \exp\left(-\frac{\pi y_0}{L}\right) \quad (4.7)$$

Малость величины y_B означает практически полное насыщение влагой почвы при $Q = Q_0$ вследствие частого расположения источников. Напротив, при $L = 3$ они фактически разобщены и крайне слабо влияют на уровень грунтовых вод посредине между ними: $y_B \approx H$. В подобных случаях основой для расчетов должна служить схема одиночного источника, получить которую можно из рассмотренной как предел при $k = 1$, $k' = 0$, $b = d$. Уравнение (4.4) утрачивает при этом силу, уравнение же (4.5)

y_0	$L = 0,1$		1		3	
	Q_0	y_B	Q_0	y_B	Q_0	y_B
$H = 0,1$						
0,1	0,0111	$6,16 \cdot 10^{-4}$	0,0549	0,0723	0,0576	0,0992
0,5	0,0200	$3,84 \cdot 10^{-9}$	0,1544	0,0421	0,1734	0,0980
0,9	0,1000	$6,68 \cdot 10^{-14}$	0,8415	0,0310	0,9742	0,0975
$H = 0,5$						
0,1	0,0554	$3,20 \cdot 10^{-3}$	0,1985	0,4596	0,1989	0,4999
0,5	0,1000	$1,92 \cdot 10^{-8}$	0,7377	0,2771	0,7696	0,4995
0,9	0,5000	$3,34 \cdot 10^{-14}$	4,1233	0,1926	4,4404	0,4992
$H = 0,9$						
0,1	0,0997	$6,02 \cdot 10^{-3}$	0,2261	0,9000	0,2261	0,9000
0,5	0,1800	$3,45 \cdot 10^{-8}$	1,2055	0,8544	1,2056	0,9000
0,9	0,9000	$6,01 \cdot 10^{-13}$	7,1559	0,5410	7,2157	0,9000

относительно единственного неизвестного параметра отображения d преобразуется к виду

$$\left[H_0 - \frac{Q}{\sqrt{d-1}} \right] \delta + Q \sqrt{d} \int_0^1 \frac{(1+du^2)}{V^2(d)[\sqrt{du^2} + V(d)]} = \frac{\pi}{2} (1 - y_0)$$

При расчетах выявляется понижение и выполаживание свободной поверхности потока по мере заглубления источников с фиксированием их дебита. Так, в варианте $L = 1, H = 0,5, Q_0 = 0,1985$ при $y_0 = 0,1$ найдено $y_E = 0, y_B = 0,4596$, тогда как при функционировании источников той же интенсивности на глубинах 0,5 и 0,9 имеем соответственно $y_E = 0,2929; 0,4617$ и $y_B = 0,4676; 0,4928$. Вместе с тем расширяются возможности интенсификации источников, на максимуме которой, при $y_E = 0$, рассчитаны величины Q_0 и y_B , содержащиеся в таблице.

При наличии в рассматриваемой схеме течения физического параметра H_0 , определяющего интенсивность подпора, параметр отображения g фактически исключен из вычислительного алгоритма; тем не менее точка $G(g)$ остается характерной точкой потока. В зависимости от соотношения между входными параметрами она оказывается на одном из трех граничных участков: OA, AD или BD . В первом и третьем случаях она является соответственно точкой максимума и точкой минимума давления; схемы же на фиг. 5, а, в, г соответствуют второму варианту. В силу равенства $w(G) = i$, присущего свободной фильтрации, точка G разграничивает участки, на одном из которых, примыкающем к источнику, выполняется соотношение $w_y > 1$, отражающее преимущественное воздействие источника; на другом участке, где $w_y < 1$, преобладает подпор. С интенсификацией источника точка G отдалается от него вдоль границы.

Исследуем теперь течение с выходом потока на поверхность в пределах участка AF при последующем возврате ее в почву через участок FC ; на границе области ω затопленный участок поверхности отмечен разрезом (фиг. 5, б). Отображение этой области на полуплоскость $\text{Im} \zeta \geq 0$ (фиг. 5, г) осуществляется зависимостью (ср. с (4.2))

$$\omega = i \frac{Q \sqrt{cd}}{\pi f} \int_1^\zeta \frac{(f-u) du}{u \sqrt{(u-1)(c-u)(d-u)}} = i \sigma \left[\Pi(\gamma, 1-c, \lambda) - \frac{1}{f} F(\gamma, \lambda) \right] \quad (4.8)$$

$$\sigma = \frac{2Q}{\pi} \sqrt{\frac{cd}{d-1}}, \quad \gamma = \arcsin \sqrt{\frac{\zeta-1}{c-1}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{c-1}{d-1}}$$

Полагая здесь $\zeta = c$, $\omega = 0$, получим

$$\sigma[\Pi(1-c, \lambda) - (1/f)K(\lambda)] = 0$$

При $\zeta = d$, $\omega = H$ зависимость $\omega(\zeta)$, записанная предварительно для участка CD , приводит к равенству

$$\sigma \left\{ \frac{1-c}{c} \Pi \left[\frac{d-c}{c(d-1)}, \lambda' \right] + \left(1 - \frac{1}{f} \right) K(\lambda') \right\} = -H; \quad \lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$$

Преобразуя полные эллиптические интегралы третьего рода и исключая из уравнений параметр f , придем к соотношению

$$QF(\delta, \lambda')/K(\lambda) = H \tag{4.9}$$

По своей структуре оно сходно с уравнением (4.4), которое и в рассматриваемом случае войдет в систему уравнений относительно остающихся неизвестными параметров отображения b , c и d . Замыкает же систему следующее уравнение, также фиксирующее здесь заданную ординату y_0 источника O на основе равенства $z(\zeta) = i(\omega - \theta)$ и интегральных представлений (4.8) и (4.2) функций ω и θ , преобразованных к участку $AE(\eta=0, -\infty < \xi \leq 1)$.

$$q \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g} \right) F(\beta, k') - \frac{Q(b-c)\sqrt{d}}{\pi} \int_0^1 V(v) dv = y_0 \tag{4.10}$$

$$V(v) = \frac{1-u/f}{\sqrt{[b(c-u) + \sqrt{c(b-u)}] \sqrt{(b-u)(c-u)(d-u)}}$$

$$\beta = \arcsin \sqrt{\frac{1}{b}}, \quad u = 1-v^2$$

В запрограммированном алгоритме реализована процедура нахождения параметров b , c и d из системы уравнений (4.4), (4.9) и (4.10), однозначная разрешимость которой обосновывается на аналитическом и отчасти на численном уровне.

Верхняя граница Q_* допустимых значений Q соответствует заполнению жидкостью всего грунта с выходом на поверхность точки B при ее совмещении с точкой C ; в результате имеем $b = c$, $k = \lambda$, $k' = \lambda'$. Совершая предельные переходы в полученных зависимостях, найдем

$$Q_* = HL/(1-y_0) \tag{4.11}$$

С этим равенством согласуется первая из асимптотик (4.7).

Дальнейшее увеличение расхода источников приведет к образованию на поверхности почвы слоя воды глубиной h , определяемой из соотношения (4.11) при замене в нем Q_* на Q и H на $H+h$. С точки зрения фильтрационного расхода в отмеченном предельном случае и за его рамками течение эквивалентно одномерному нисходящему потоку сквозь почвенный слой мощности $1-y_0$.

Схема фильтрации с выходом на поверхность вплоть до ее полного затопления реализуется при $Q_0 < Q < Q_*$. Искомые параметры отображений удовлетворяют при этом неравенствам

$$b_* < b < b_0, \quad c_0 < c < c_*, \quad d_* < d < d_0$$

Здесь $b_0, c_0 = 1, d_0$ и $b_* = c_*, d_*$ – значения параметров, вычисляемые соответственно при $Q = Q_0$ и $Q = Q_*$.

Для варианта $L = 1, H = 0,5, y_0 = 0,1$ в изложенном выше примере расчета было вычислено $Q_0 = 0,1985$ (см. таблицу), $b_0 = 619,6, d_0 = 685,2$. При максимально допустимом и определяемом равенством (4.11) фильтрационном расходе источника $Q_* = 0,5556$ рассчитаны соответствующие предельные значения параметров отображения $b_* = c_* = 29,59, d_* = 58,18$. Далее при значении $Q = 0,3$, выбранном в интервале (Q_0, Q_*) , из уравнений (4.4), (4.9), (4.10) найдены параметры $b = 104,1, c = 4,943, d = 123,9$ и величины $l = 0,2712, y_B = 0,4188$, расчетные формулы для которых выводятся на основе зависимостей (4.2) и (4.8). Для вычисления эллиптических интегралов и функций использовались экономичные компьютерные программы [11].

Заключение. В комплексе рассмотренных здесь двумерных фильтрационных течений из подпочвенных источников центральное место занимают схемы фильтрации с подпором. При схематизации таких течений в пластах неограниченной глубины, а следовательно, и при постановке соответствующих краевых задач невозможно задать ключевой физической фактор процесса – степень подпора. Выходом из положения является предлагаемый различными исследователями косвенный учет этого фактора посредством измерения одной из гидродинамических характеристик потока, сформировавшегося под воздействием подпора. Последовательное осуществление такого подхода в настоящей работе позволило максимально приблизить к прямой постановку всех изложенных выше многопараметрических краевых задач, описывающих течения указанного типа. Выявленная связь отдельных параметров конформных отображений с интенсивностью подпора использована для изучения его влияния на моделируемые течения.

При залегании под почвенным слоем водоносного горизонта напор в последнем определяет степень подпора по отношению к фильтрации из источников, благодаря чему прямой подход к решению соответствующих краевых задач и основанный на нем анализ течений удастся осуществить уже в строгом смысле слова. В ходе такого анализа исследуется и иллюстрируется числовыми расчетами влияние интенсивности подпора, глубины заложения источников и расстояния между ними на положение свободной поверхности потока. Для конкретных комбинаций указанных входных физических параметров устанавливаются два пороговых значения фильтрационного расхода источников, при первом из которых поступающая из них вода достигает поверхности земли, а при втором реализуется предельный режим течения с заполнением всего почвенного слоя.

Автор выражает признательность Н.Б. Ильинскому, который привлек внимание автора к вопросам фильтрации из подпочвенных источников.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01971).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н.Е. Просачивание воды через плотины // Собр. соч. М.: Гостехиздат, 1950. Т. 7. С. 297–332.
2. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
3. Аверьянов С.Ф. Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод // Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод. М.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 85–447.
4. Цицкишвили А.Р. Фильтрация из канала трапециевидного сечения // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 3. С. 125–133.
5. Ильинский Н.Б., Касимов А.Р. Фильтрационная оптимизация формы земляного канала методом обратных краевых задач // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 125–133.

6. *Ризенкамф Б.К.* Гидравлика грунтовых вод // Учен. зап. Саратов. ун-та. 1940. Т. 15. Вып. 5. С. 3–93.
7. *Терентьев А.Г.* Краевые задачи для систем подпочвенных оросителей // Актуальные задачи гидродинамики. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1989. С. 107–117.
8. *Ведерников В.В.* Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.; Л.: Госстройиздат, 1939. 247 с.
9. *Эмих В.Н.* Гидродинамика фильтрационных течений с дренажем. Новосибирск: Наука, 1993. 209 с.
10. *Byrd P.F., Friedman M.D.* Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists. Berlin etc.: Springer, 1971. 358 p.
11. *Bulirsch R.* Numerical calculation of elliptic integrals and elliptic functions // Num. Math. 1965. В. 7. Н. 1. S. 78–90; Н. 4. S. 353–354; 1969. В. 13. Н. 4. S. 305–315.

Новосибирск

Поступила в редакцию
14.11.1997