

УДК 532.526.4

© 1999 г. Б.И. КУРМАНОВ, Г.Л. ПОДВИДЗ

РАСЧЕТ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В РЕШЕТКАХ ТУРБОМАШИН ПО УРАВНЕНИЯМ НАВЬЕ – СТОКСА В ПРИБЛИЖЕНИИ ТОНКОГО СЛОЯ

Двумерное течение вязкого теплопроводного газа в плоских решетках турбомашин на базе системы уравнений Навье – Стокса в приближении тонкого слоя рассчитано по неявной монотонной схеме. Использована двухпараметрическая $(k - \epsilon)$ -модель турбулентности в модификации для низких чисел Рейнольдса. Значения локального давления газа, коэффициентов внешней теплоотдачи на контуре профиля и профильных потерь, угла выхода потока сопоставлены с экспериментальными данными для четырех турбинных решеток и с расчетами пограничного слоя.

Газодинамическая эффективность решеток турбин и локальный коэффициент внешней теплоотдачи на контуре профиля определяются из расчетов по уравнениям пограничного слоя и различным приближениям уравнений Навье – Стокса [1–8]. Подробный обзор современных методов расчета течения в решетках турбомашин представлен в [1].

Для течения в решетке турбомашин с преобладающим продольным направлением вдоль хорды l со скоростью c_2 за решеткой с числом $Re_2 = c_2 l / \nu_2$ используется совместное решение уравнений Эйлера и пограничного слоя [1,5]. При больших числах Re_2 введен малый параметр $\epsilon = 1/Re_2^{1/2}$ и в уравнениях движения сохранены только члены первого и порядка малости.

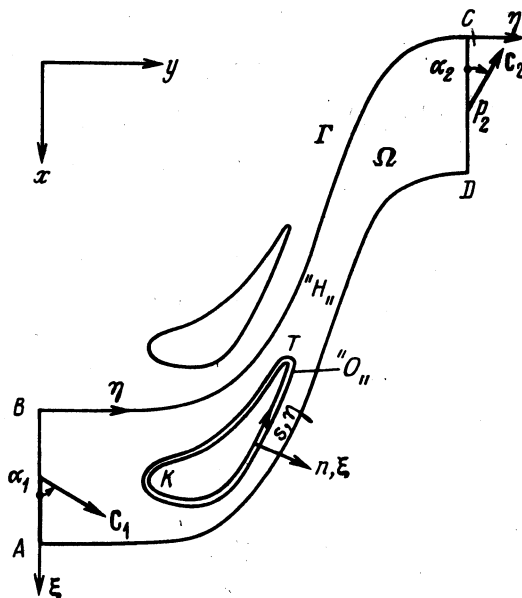
В данной работе уравнения Навье – Стокса решаются в приближении тонкого слоя [1–4]. В уравнениях движения сохранены члены порядка ϵ и опущены вязкие члены с производными вдоль твердой стенки порядка ϵ^2, ϵ^3 [3, 4]. Эта модель применяется во всей области течения – с преобладанием вязких членов вблизи профиля и невязких членов в межлопаточном канале, и позволяет рассчитывать и отрывные области течения. Расчет сложнее и продолжительнее, чем совместное решение уравнений Эйлера и пограничного слоя [5], но более экономичен, чем решение полных уравнений Навье – Стокса [1–3].

В расчете использована уточненная двухпараметрическая модель $(k - \epsilon)$ для кинетической энергии и скорости диссипации турбулентных пульсаций в модификации Лэма и Бремхорста для низких чисел Рейнольдса [6, 7] совместно с полуэмпирической аппроксимацией для безразмерных k^+, ϵ^+ вблизи стенки [8], использованная для турбинных решеток [5].

Для более точного расчета коэффициента теплоотдачи на профиле турбинной решетки применена комбинация сеток из областей типа "H" и "O" (см. фиг. 1).

1. Система уравнений турбулентного течения вязкого теплопроводного газа. Физическая область с координатами x, y двумерного течения газа в решетке профилей (фиг. 1) с помощью преобразования координат

$$\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y) \quad (1.1)$$



Фиг. 1. Области расчета ABCD и сетки типа "O" и "H" двумерного течения газа в решетке турбинных профилей I

отображается в прямоугольную расчетную область. Метрические коэффициенты $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ и якобиан J связаны соотношениями [3]

$$\xi_x = y_\eta J, \quad \xi_y = -x_\eta J, \quad \eta_x = -y_\xi J, \quad \eta_y = x_\xi J, \quad J = 1 / (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)$$

При больших числах Re_2 наибольшее изменение параметров потока происходит вблизи контура профиля по координате ξ , поэтому можно пренебречь вязкими членами, содержащими частные производные по направлению координаты η . Система уравнений сохранения массы, количества движения и энергии Навье-Стокса в приближении тонкого слоя записана в дивергентной векторной форме [3]

$$\frac{\partial U^*}{\partial t} + \frac{\partial E^*}{\partial \xi} + \frac{\partial F^*}{\partial \eta} = \frac{\partial R^*}{\partial \xi} \quad (1.2)$$

$$U^* = \frac{\rho}{J} \begin{vmatrix} 1 \\ u \\ v \\ e^* \end{vmatrix}, \quad E^* = \frac{\rho}{J} \begin{vmatrix} U \\ uU + Jpy_\eta / \rho \\ vU - Jpx_\eta / \rho \\ U(e^* + p / \rho) \end{vmatrix}, \quad F^* = \frac{\rho}{J} \begin{vmatrix} V \\ uV - Jpy_\xi / \rho \\ vV + Jpx_\xi / \rho \\ V(e^* + p / \rho) \end{vmatrix}$$

$$R^* = \mu_{\Sigma J} \begin{vmatrix} 0 \\ m_1 u_\xi + m_2 v_\xi \\ n_1 u_\xi + n_2 v_\xi \\ (m_1 u + n_1 v) u_\xi + (n_1 u + n_2 v) v_\xi + \mu'_{\Sigma T} m_3 \frac{\partial i}{\partial \xi} \end{vmatrix}$$

$$U = J(y_\eta - ux_\eta), \quad V = J(-uy_\xi + vx_\xi)$$

$$m_1 = 4/3y_\eta^2 + x_\eta^2, \quad m_2 = n_1 = -1/3y_\eta x_\eta, \quad n_2 = 4/3x_\eta^2 + y_\eta^2$$

$$m_8 = g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad n_9 = g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2, \quad n_8 = -x_\xi x_\eta - y_\xi y_\eta$$

Здесь t – время, ρ – плотность, p – давление, u, v – проекции скорости газа на оси $x, y, c = (u^2 + v^2)^{1/2}$ – скорость газа, e – внутренняя энергия, i – энтальпия, $e^* = e + c^2/2$ – полная внутренняя энергия, $\mu_{\Sigma T} = \mu_{\Sigma T}/\mu_\Sigma$; U, V – контравариантные составляющие вектора скорости газа в системе координат ξ, η ; $m_1, m_2, m_8, g_{22}, n_1, n_2, n_8, n_9, g_{11}$ – коэффициенты, связанные с преобразованием координат (1.1); μ, ν, λ – коэффициенты молекулярной, кинематической вязкости, теплопроводности газа; $\text{Pr} = \rho \nu c_p / \lambda$, $\text{Pr}_t = \rho \nu_t c_p / \lambda_t$ – ламинарное и турбулентное числа Прандтля (индекс t относится к турбулентным величинам); $\mu_\Sigma = \mu + \mu_t$ – коэффициент суммарной (ламинарной и турбулентной) вязкости газа

$$\mu_{\Sigma T} = \frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t}$$

Использованы уравнения состояния термодинамически совершенного газа и соотношения

$$\rho = p/(RT), \quad e = c_v T, \quad i = c_p T \quad (1.3)$$

$$c_v = R/(\gamma - 1), \quad c_p = R\gamma/(\gamma - 1), \quad s = \ln(p/\rho^\gamma)$$

Здесь T – температура, c_p, c_v – теплоемкости при постоянном объеме, давлении, s – функция энтропии газа; γ, R – показатель адиабаты и газовая постоянная; $a = (\gamma p/\rho)^{1/2}$ – скорость звука в газе.

Коэффициент молекулярной вязкости газа в диапазоне $T = 873$ – 1800 К аппроксимирован известной формулой

$$\mu = 44,3 \cdot 10^{-6} (T/1073)^{0,678}, \quad \text{Па} \cdot \text{с} \quad (1.4)$$

Предполагается, что молекулярный и турбулентный переносы импульса, тепла (и других физических величин) протекают независимо. Суммарные касательные напряжения и поток тепла по нормали n у профиля равны

$$\tau_\Sigma = \mu_\Sigma \frac{\partial c_{s\eta}}{\partial n}, \quad q_\Sigma = \mu_{\Sigma T} \frac{\partial i}{\partial n} \quad (1.5)$$

$$c_{s\eta} = (ux_\eta + vy_\eta) / \sqrt{g_{22}}, \quad n = \sqrt{g_{11}} \xi$$

где вблизи контура профиля координата ξ направлена по нормали n к стенке, а координата η – по касательной s к контуру (фиг. 1).

Система уравнений (1.2)–(1.5) представляется в "дельте-форме" [3, 4], для чего его члены линеаризируются с использованием разложений в ряд Тейлора. Для конвективных членов вводятся матрицы Якоби

$$\mathbf{A}^* = \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \mathbf{U}^*}, \quad \mathbf{B}^* = \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \mathbf{U}^*}$$

которые с использованием матриц преобразования $\mathbf{S}_\xi, \mathbf{S}_\eta$ приводятся к диагональному виду

$$\frac{\mathbf{A}^*}{J} = \mathbf{S}_\xi \cdot \frac{\Lambda_A}{J} \cdot \mathbf{S}_\xi^{-1}, \quad \frac{\mathbf{B}^*}{J} = \mathbf{S}_\eta \cdot \frac{\Lambda_B}{J} \cdot \mathbf{S}_\eta^{-1} \quad (1.6)$$

Диагональные матрицы Λ_A/J , Λ_B/J составлены из собственных значений λ_A^i , λ_B^i матриц \mathbf{A}^*/J , \mathbf{B}^*/J ($i = 1, 4$)

$$\begin{aligned}\lambda_A^1 &= \lambda_A^2 = U/J, \quad \lambda_A^3 = U/J + a\sqrt{g_{22}}, \quad \lambda_A^4 = U/J - a\sqrt{g_{22}} \\ \lambda_B^1 &= \lambda_B^2 = V/J, \quad \lambda_B^3 = V/J + a\sqrt{g_{11}}, \quad \lambda_B^4 = V/J - a\sqrt{g_{11}}\end{aligned}\quad (1.7)$$

Столбцы \mathbf{S}_ξ , \mathbf{S}_η составлены из собственных векторов матриц \mathbf{A}^*/J , \mathbf{B}^*/J .

Матрицы \mathbf{A}^*/J , \mathbf{B}^*/J расщепляются на составляющие с положительным и отрицательным собственными значениями

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{A}^*}{J} &= \frac{\mathbf{A}^{*+}}{J} + \frac{\mathbf{A}^{*-}}{J} = \mathbf{S}_\xi \cdot \left(\frac{\Lambda_A^+}{J} + \frac{\Lambda_A^-}{J} \right) \cdot \mathbf{S}_\xi^{-1} \\ \frac{\mathbf{B}^*}{J} &= \frac{\mathbf{B}^{*+}}{J} + \frac{\mathbf{B}^{*-}}{J} = \mathbf{S}_\eta \cdot \left(\frac{\Lambda_B^+}{J} + \frac{\Lambda_B^-}{J} \right) \cdot \mathbf{S}_\eta^{-1}\end{aligned}\quad (1.8)$$

Это позволяет учесть локальную структуру течения и для расчета конвективных членов в (1.2) брать приращение параметров потока из той области течения, из которой с ростом t распространяются характеристики.

Линеаризация вязкого члена R^* проводится в предположении [3], что коэффициент вязкости μ_Σ и метрические коэффициенты J , x_ξ , x_η , y_ξ , y_η преобразования (1.1) локально не зависят от ξ , U^*

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R}_1^* \left(U^*, \frac{\partial U^*}{\partial \xi} \right), \quad \mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial U^*}, \quad \mathbf{M} \partial U^* = \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{H} \partial U^*)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \mathbf{R}^*}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\mathbf{M}}{J} \partial U^* \right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\mathbf{H}}{J} \partial U^* \right) \quad (1.9)$$

$$\frac{\mathbf{H}}{J} = \frac{\mu_\Sigma J}{\rho} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(m_1 u + m_2 v) & m_1 & m_2 & 0 \\ -(m_2 u + n_2 v) & m_2 & n_2 & 0 \\ -(m_1 u^2 + m_2 2uv + \\ + n_2 v^2) - \mu'_{\Sigma T} m_8 \gamma \left(e - \frac{c^2}{2} \right) & m_1 u + m_2 v - \mu'_{\Sigma T} m_8 \gamma u & m_2 u + n_2 v - \mu'_{\Sigma T} m_8 \gamma v & \mu'_{\Sigma T} m_8 \gamma \end{vmatrix}$$

В системе уравнений (1.2) использован коэффициент турбулентной вязкости ν_t . Для его определения применена дифференциальная двухпараметрическая $(k - \epsilon)$ -модель турбулентности для кинетической энергии k пульсаций скорости газа и скорости диссипации ϵ турбулентности [3, 6].

Модель турбулентности описывается системой уравнений, имеющей в преобразованной системе координат ξ , η вид

$$\frac{\partial U^*}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{S}^*}{\partial \eta} + \mathbf{Q}^* \quad (1.10)$$

$$U^* = \frac{\rho}{J} \mathbf{P}, \quad \mathbf{E}^* = \frac{\rho \mathbf{U}}{J} \mathbf{P}, \quad \mathbf{F}^* = \frac{\rho \mathbf{V}}{J} \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \begin{vmatrix} k \\ \epsilon \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{R}^* = J \begin{vmatrix} \mu_{\Sigma k} (m_8 k_\xi + n_8 k_\eta) \\ \mu_{\Sigma \varepsilon} (m_8 \varepsilon_\xi + n_8 \varepsilon_\eta) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{S}^* = J \begin{vmatrix} \mu_{\Sigma k} n_8 k_\xi \\ \mu_{\Sigma \varepsilon} n_8 \varepsilon_\xi \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^* = \left| J \mu_f 2\Phi_{\xi\eta}^2 - \rho \varepsilon / J \right.$$

$$\left. c_1 f_1 J \mu_f 2\Phi_{\xi\eta}^2 \varepsilon / k - c_2 f_2 \rho \varepsilon^2 / (Jk) \right|$$

$$v_f = c_v f_v k^2 / \varepsilon \quad (1.11)$$

$$\mu_{\Sigma k} = \mu + \frac{\mu_f}{Pr_k}, \quad \mu_{\Sigma \varepsilon} = \mu + \frac{\mu_f}{Pr_\varepsilon}, \quad Pr_k = \frac{\rho v_f c_p}{\lambda_k}, \quad Pr_\varepsilon = \frac{\rho v_f c_p}{\lambda_\varepsilon}$$

где $\lambda_k, \lambda_\varepsilon$ – коэффициенты турбулентного переноса k, ε . Диссипационная функция в координатах ξ, η записана в виде

$$2\Phi_{\xi\eta}^2 = 2(u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi)^2 + 2(u_\eta x_\xi - u_\xi x_\eta)^2 + (u_\eta x_\xi - u_\xi x_\eta + v_\xi y_\eta - v_\eta y_\xi)^2 \quad (1.12)$$

и приняты константы модели

$$c_v = 0,09, \quad c_1 = 1,44, \quad c_2 = 1,92, \quad Pr_k = 1, \quad Pr_\varepsilon = 1,3$$

Вблизи стенки в вязком подслое ($n_0^+ \leq 8-10$) для безразмерных величин $k^+ = k / c_{tw}^2$, $\varepsilon^+ = \varepsilon v / c_{tw}^4$ ($n^+ = n c_{tw} / v$, $c_{tw} = (\tau_{\Sigma w} / \rho)^{1/2}$) использованы полуэмпирические зависимости для развитого турбулентного течения в каналах [8]. В точке склейки n_0^+ вязкого подслоя и внешней области течения (1.10) функции k, ε и коэффициент v_f непрерывны.

Линеаризация членов системы (1.10) более простая и проводится аналогично (1.2). Матрицы Якоби конвективных членов имеют диагональный вид

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{U}\mathbf{I}, \quad \mathbf{B}^* = \mathbf{V}\mathbf{I}, \quad \mathbf{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.13)$$

Собственные значения матриц $\mathbf{A}^*/J, \mathbf{B}^*/J$ совпадают со значениями (1.7)

$$\lambda_A^1 = \lambda_A^2 = U/J, \quad \lambda_B^1 = \lambda_B^2 = V/J \quad (1.14)$$

При линеаризации вязких членов дополнительно пренебрежем смешанными производными и аналогично (1.9) принято

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R}_1^* \left(\mathbf{U}^*, \frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial \xi} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \mathbf{R}^*}{J} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\mathbf{H}}{J} \partial \mathbf{U}^* \right) \quad (1.15)$$

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{S}_2^* \left(\mathbf{U}^*, \frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial \eta} \right), \quad \frac{\mathbf{H}}{J} = \frac{m_8 J}{\rho} \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mu_{\Sigma k} & 0 \\ 0 & \mu_{\Sigma \varepsilon} \end{vmatrix}$$

Источниковый член \mathbf{Q}^* (1.10) линеаризуется в предположении, что диссипативная функция $2\Phi_{\xi\eta}^2$ (1.12) локально не зависит от \mathbf{U}^*

$$\mathbf{W} = \frac{\partial \mathbf{Q}^*}{\partial \mathbf{U}^*} \quad (1.16)$$

$$\frac{\mathbf{W}}{J} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -(z_1 + z_2)\varepsilon/k & z_1 + 2z_2 \end{vmatrix}$$

$$z_1 = J\mu_1 2\Phi_{\xi\eta}^2 c_1 f_1 / (\rho k), \quad z_2 = -c_2 f_2 \varepsilon / (Jk)$$

Область расчета Ω течения с границей Γ содержит полосу одного периода решетки (фиг. 1). Число задаваемых граничных условий на Γ должно быть равным числу характеристик в нестационарном течении невязкого газа $d\xi/dt = \Lambda_A$, $d\eta/dt = \Lambda_B$, распространяющихся от границы Γ внутрь области Ω [11].

Для системы уравнений течения вязкого газа (1.2) в качестве граничных условий заданы: а) во входном сечении AB – температура T_1^* и давление p_1^* заторможенного потока, угол α_1 набегающего потока с фронтом решетки; б) в выходном сечении CD – постоянное вдоль фронта решетки статическое давление $p_2(x) = \text{const}$; в) на контуре профиля $KT - n = 0$; $u = 0$, $v = 0$, $T = T_w(s)$; г) на линиях BC , AD – условие периодичности течения.

Для задания граничных условий в системе уравнений (1.10) модели $(k - \varepsilon)$ использована гипотеза Прандтля, по которой ν_t , k и масштаб пульсаций L связаны соотношением [9]

$$\nu_t = c_3 k^{1/2} / L, \quad c_3 \approx 0,1$$

Выражение для ε в ядре потока получено из (1.11) для $f_v = 1$ в виде

$$\varepsilon = c_\varepsilon k^{3/2} / L, \quad c_\varepsilon = c_v / c_3 \approx 0,9 \quad (1.17)$$

В сечении AB перед решеткой задаем пульсации скорости v_1' (или степень турбулентности $Tu_1 = v_1' / c_1$) и масштаб пульсаций L_1 . Отсюда, согласно (1.17), известны k_1 и ε_1 : $k_1 = 3 / 2\nu_1'^2$.

На твердом непроницаемом контуре найдено по зависимостям [8] при $n = 0$: $k_w^+ = 0$, $\varepsilon_w^+ = 0,1$.

2. Метод решения системы уравнений. Неявная по времени процедура последовательного интегрирования систем (1.2), (1.10) основана на разложении неизвестной функции U^* в ряд Тейлора по t на двух временных слоях $(n + 1, n)$ [1–3]

$$\left(\frac{\partial U^*}{\partial t} \right)^{n+1} - \theta \tau \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} \right)^{n+1} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^n + O((\theta - 1)\tau + \frac{\theta}{2}\tau^2 + \tau^3) \quad (2.1)$$

где $\tau = t^{n+1} - t^n$ – временной шаг, $0 < \theta < 1$ – параметр разностной схемы.

В левой части соотношения (2.1) на временном слое $(n + 1)$ выражение конвективных, вязких и источниковых членов для системы (1.2) взяты в виде (1.6)–(1.9) и для системы (1.10) – в виде (1.13)–(1.16). В правой части (2.1) на слое (n) использованы основные уравнения (1.2), (1.10).

Заменяя производные в (2.1) конечными разностями с общепринятой индексацией сеточных функций [3], получаем разностную схему в "дельта-форме" для производной ячейки сетки (i, j) .

Вычислительная сетка – комбинированная (фиг. 1). Сетка типа "O" вблизи профиля образована линиями $\eta = \text{const}$, ортогональными к поверхности профиля со сгущением узлов вблизи входной и выходной кромок, и линиями $\xi = \text{const}$, сгущающимися к контуру профиля. Сетка типа "H" в областях перед решеткой и внутри канала строится по линиям тока и равного потенциала для течения идеальной несжимаемой жидкости вокруг внешнего контура сетки "O", полученным из решения интегрального уравнения [13], и близка к ортогональной. За решеткой сетка плавно поворачивается так, чтобы выходное сечение CD было параллельно фронту решетки. Для преобразования (1.1) координат узлов сетки (x, y) области течения на прямоугольную расчетную область (ξ, η) принято $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$.

Неявный оператор в левой части (2.1) рассчитан по центрам ячеек (i, j) . В конвективных членах с расщепленными матрицами (1.8) для \mathbf{A}^{*+} , \mathbf{B}^{*+} применяются левосторонние разности, для \mathbf{A}^{*-} , \mathbf{B}^{*-} – правосторонние. В матрице \mathbf{W} источникового члена (1.6) для диссипативной функции $2\Phi_{\xi\eta}^2$ (1.12) использованы разности со вторым порядком аппроксимации.

Явный оператор в правой части (2.1) рассчитан по границам ячеек $(i \pm 1/2, j)$, $(i, j \pm 1/2)$. В конвективных членах использованы характеристические переменные W_ξ , W_η для направлений ξ , η [3, 11], определяемые соотношениями, следующими из (1.2), (1.6) (например, для направления ξ), в виде

$$\Delta_\xi \mathbf{W}_\xi = \mathbf{S}_\xi^{-1} \cdot \Delta_\xi \mathbf{U}^*, \quad \Delta_\xi \mathbf{U}^* = \mathbf{S}_\xi \cdot \Delta_\xi \mathbf{W}_\xi$$

Приняты кусочно-параболические распределения параметров по координатам ξ , η [11, 14] для определения левого \mathbf{U}^{*-} и правого \mathbf{U}^{*+} значений вектор \mathbf{U}^* на границах ячейки (i, j) .

Монотонность решения \mathbf{U}^* разностной схемы (2.1) обеспечена ограничением модуля приращения характеристических переменных с параметром $\phi < 1$ [2, 11, 14].

Из задачи о распаде произвольного разрыва [15] на границе ячейки $(i + 1/2, j)$ по левому $\mathbf{U}_{i+1/2,j}^{*-}$ и правому $\mathbf{U}_{i+1/2,j}^{*+}$ значениям рассчитаны \mathbf{U}^* и поток $\mathbf{E}_{i+1/2,j}^*$ на границе ячейки.

Вязкие члены \mathbf{R}^* , \mathbf{S}^* общего вида

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \xi} + \mathbf{c} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \eta}$$

на границе ячейки аппроксимированы центральными разностями.

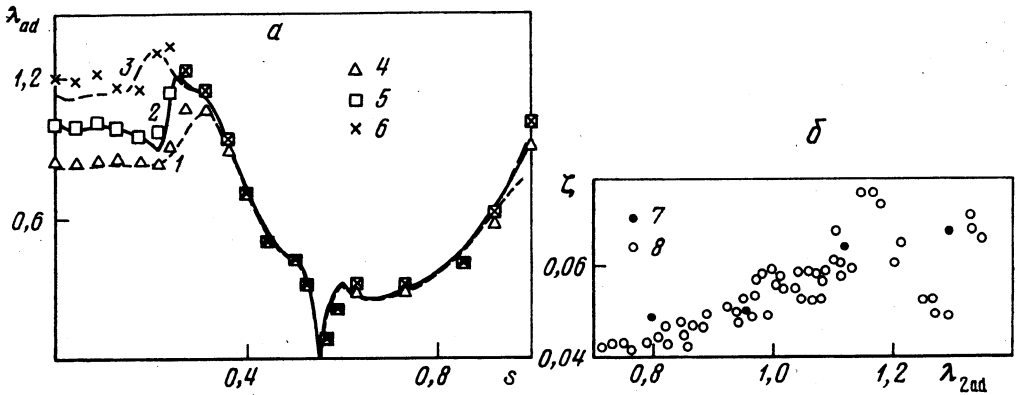
Источниковый член $\mathbf{Q}_{i,j}^*$ (1.10) рассчитан в центре ячейки.

Система разностных уравнений (2.1) в области $ABCD$ относительно $\Delta(\mathbf{U}^* J)_{i,j}^{n+1}$ на пятиточечном шаблоне для ячейке (i, j) имеет матрицу ленточной структуры с блоками размерности 4×4 для системы (1.2) и 2×2 для системы (1.10). На временном слое $(n + 1)$ система решается итерационным методом (2–3 итерации) последовательной верхней релаксации [3, 16] с перебором линий $n_j = \text{const}$ от сечения AB к CD в каждый из областей сеток "O" и "H" (фиг. 1).

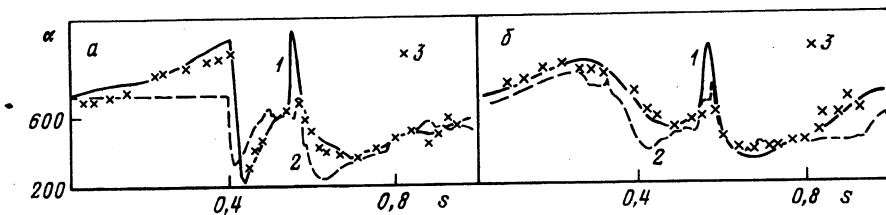
На каждой линии $n_j = \text{const}$ вдоль координаты ξ , система линейных уравнений с блочной трехдиагональной матрицей решается методом матричной прогонки. В каждой ячейке (i, j) для коэффициентов прямой прогонки использованы представление произвольной матрицы \mathbf{A} в виде произведения нижней \mathbf{L} и верхней \mathbf{U} треугольных матриц: $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$, и ее эффективное обращение $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{L}^{-1}$ [17].

Граничные условия для приращений $\Delta(\mathbf{U}^* J)_{i,j}^{n+1}$ во входном AB и выходном CD сечениях, а также на контуре профиля реализованы в неявном виде с использованием приращений характеристических переменных ΔW и дифференциальной формы граничных условий. На линиях периодичности течения BC , AD принято $\Delta(\mathbf{U}^* J)_{i,j}^{n+1} = 0$.

3. Примеры расчетов течений в решетках турбин. Все расчеты выполнены при значениях параметров разностной схемы $\theta = 1$, $\phi = 1/3$. Начальные параметры поля течения (на временном слое $n = 1$) взяты из расчета течения несжимаемой жидкости, проведенного для построения сетки. Число Куранта $K = \alpha t / \Delta \xi$ на начальных $n = 500$ шагах по времени было принято 3–5 и затем увеличивалось до 10. Максимальная по



Фиг. 2. Расчет распределения $\lambda_{ad}(s)$ (а) по контуру профиля s в приближении тонкого слоя в решетке 1 при $Re_2 = 0,54 \cdot 10^6$, $Tu_1 = 0,06$: 1 – $\lambda_{2ad} = 0,8$; 2 – $0,95$; 3 – $1,12$; 4, 5, 6 – эксперимент; коэффициент профильных потерь $\zeta(\lambda_{2ad})$ (б): 7 – расчет, 8 – эксперимент.



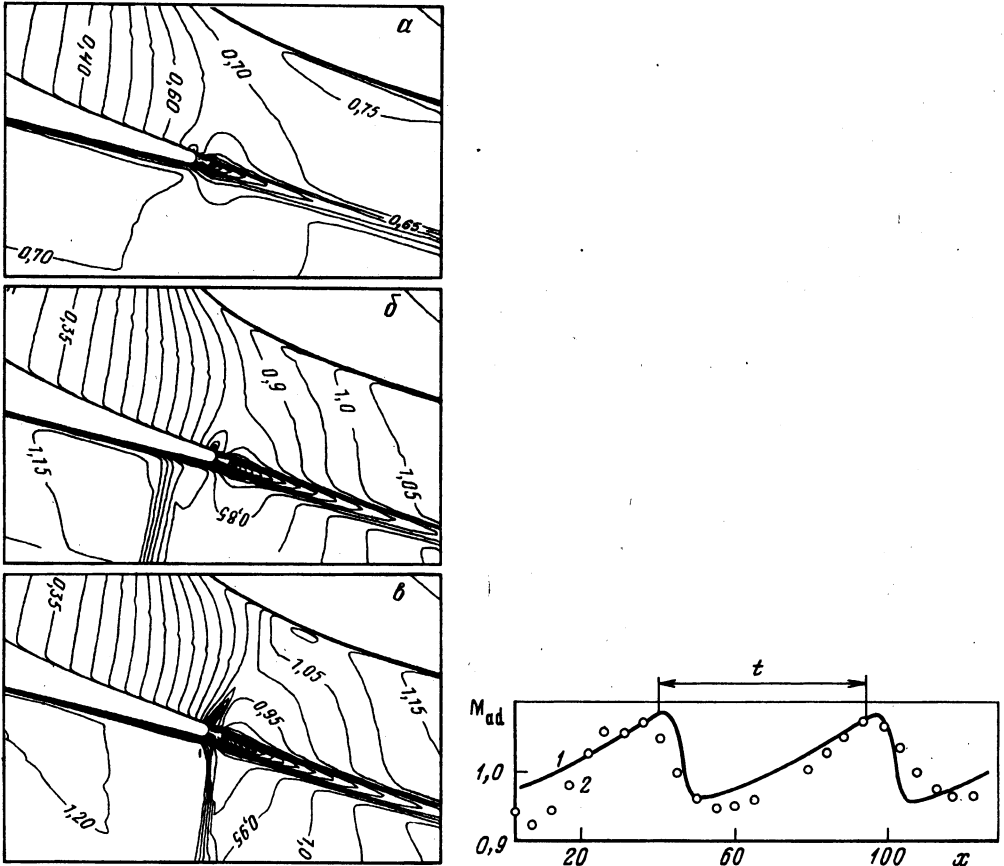
Фиг. 3. Распределения локального коэффициента теплоотдачи α ($Вт/м^2 \cdot К$), (а), (б) – по контуру профиля s решеток 2, 3 при $\lambda_{2ad} = 0,913$, $Re_2 = 2 \cdot 10^6$, $Tu_1 = 0,06$, $T_w/T_1^* = 0,71$: 1, 2 – расчеты по моделям тонкого слоя и пограничного слоя; 3 – эксперимент

всей области расчета $ABCD$ невязка $Z^n = \max Z_{i,j}^n$ правой части разностной схемы (2.1) снижается по шагам n относительно начального поля течения: $Z^1 = \max Z_{i,j}^1$. Окончание расчета соответствует снижению логарифма относительной невязки на $\lg(Z^n/Z^1) = -(3-3,5)$; общее число шагов $n \approx 3000$.

Расчет решетки 1 (решетка 48 атласа [18]) (фиг. 1) проводился на режимах $\lambda_{2ad} = 0,8-1,12$, $Re_2 = 0,54 \cdot 10^6$ с физическими параметрами газа $\gamma = 1,4$, $R = 287,3$ Дж/(кг · К), $Pr = 0,7$, $Pr_t = 0,9$. Уровень турбулентных пульсаций скорости и масштаб турбулентности перед решеткой $c'_1/c_1 = 0,06$, $L_1/l = 0,002$. Расчетная сетка типа "O" по координатам ξ, η содержала 25×114 ячеек, типа "H" – 40×140 с общим числом ячеек 8450.

В модели $(k-\epsilon)$ наибольшее значение коэффициента турбулентной вязкости ν_t достигается в вязком подслое вблизи профиля и уменьшается в области развитого турбулентного слоя, где генерация турбулентности равна ее диссипации. В ядре межлопаточного канала ν_t близок к постоянному значению.

На участке выходного сечения решетки от толстой выходной кромки отходит кромочный скачок уплотнения к выпуклой стороне соседнего профиля. Распределение приведенной скорости λ_{ad} по контуру, полученное при изэнтропическом расширении до расчетного значения давления p , сопоставленно с экспериментальным [18], включая область взаимодействия кромочного скачка уплотнения с вязким слоем на выпуклой стороне профиля, на фиг. 2.



Фиг. 4. Поля течения в области выходной кромки профиля решетки 4 при $Re_2 = 10^6$, $Tu_1 = 0,01$: а, б, в – изолинии числа М при $M_{2ad} = 0,704$; 1,02; 1,104; z – распределение M_{ad} вдоль фронта x за решеткой при $y/t = 0,938$, $M_{2ad} = 1,02$: 1 – расчет, 2 – эксперимент

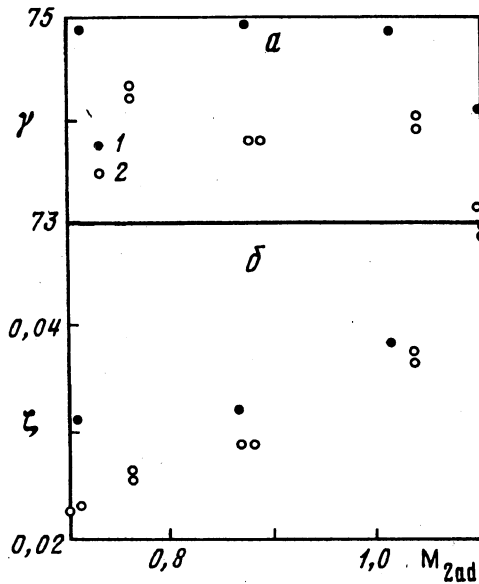
Коэффициент потерь полного давления в решетке ζ , определяющий профильные потери на трение газа на контуре профиля, за кромками конечной толщины, в следе за решеткой до сечения CD и в скачках уплотнения находится в виде

$$\zeta = 1 - (\lambda_2 / \lambda_{2ad})^2$$

$$\lambda_2 = c_2 / a_*, \quad \lambda_{2ad} = \lambda_{ad}(p_2)$$

В ядре потока вязкий член R^* (1.2) и диссипативная функция $2\Phi_{\xi\eta}^2$ (1.12) невелики, они определяют погрешность энтропийной функции $\Delta s(x, y) = 1 - s(x, y) / s_1^* \approx 2 \cdot 10^{-5}$. Вблизи контура профиля и в следе за решеткой члены R^* , $2\Phi_{\xi\eta}^2$ доминируют в коэффициенте потерь ζ ; локальное значение энтропийной функции $\Delta s(x, y)$ в ячейке у контура профиля доходит до 0,4.

Расчет течения вязкого газа и локального коэффициента теплоотдачи $\alpha = q_{\Sigma w} / (T_1^* - T_w)$ на контуре профиля в экспериментальных решетках 2, 3 (решетки MARK II, СЗХ из [19]) проведен на режиме $\lambda_{2ad} = 0,913$, $Re_2 = 2 \cdot 10^6$ при $T_1^* = 811$ К, $T_w / T_1^* = 0,71$, $c'_1 / c_1 = Tu_1 = 0,06$, $L_1/l = 0,001$ (фиг. 3).



Фиг. 5. Зависимости угла выхода потока $\gamma = 90 - \alpha_2$ (град) (а) и коэффициента профильных потерь ζ (б) от M_{2ad} в решетке 4 при $Re_2 = 10^6$, $Tu_1 = 0,01$: 1 – по уравнениям тонкого слоя, 2 – эксперимент

В решетке 2 на начальном участке толстой входной кромки поток резко разгоняется до $\lambda_{ad} = 1,35$. Область сверхзвукового течения замыкается интенсивным скачком уплотнения, за которым $\lambda_{ad} = 0,9$ на профиле, и сопровождается отрывом потока в точке $s = 0,4$ [5, 19]. На последующем участке профиля расположена область с возвратным течением у стенки и отрицательным локальным коэффициентом трения $c_{fw} < 0$. Расчетные значения α уменьшаются с приближением к точке отрыва потока и резко возрастают за ней вследствие конвективного перемешивания, согласуясь с экспериментальными α на всем профиле (фиг 3, а).

Согласно расчетам, в решетке 3 реализуется безотрывное течение без скачков уплотнения и резкого возрастания α (фиг. 3, б).

Расчетные данные α в решетках 2, 3 по моделям пограничного слоя [5] сопоставлены с расчетами по приближению тонкого слоя (1.2), (1.10) и экспериментальными данными [19] только на участках безотрывного обтекания профиля на фиг. 3.

Поля течения вязкого газа, коэффициент профильных потерь ζ и угол выхода потока α_2 в решетке 4 получены при $Re_2 = 10^6, T_w / T_1^* = 0,73, T_1^* = 418 \text{ K}, Tu_1 = 0,01, L_1/l = 0,001$ для трех чисел $M_{2ad} = 0,704, 1,02, 1,104$ и сравнены с тестовым экспериментом [20]. На режиме $M_{2ad} = 0,704$ в области косога среза решетки отсутствует скачок уплотнения (фиг. 4, а). При увеличении M_{2ad} до 1,02 (б) на выпуклой стороне профиля вблизи выходной кромки появляется скачок уплотнения, который при числе Маха, равном 1,104 (в), смещается на выходную кромку.

Расчетное и экспериментальное распределение адиабатического числа $M_{2ad}(p)$ вдоль фронта решетки по координате x на расстоянии $y/l = 0,938$ за выходными кромками для $M_{2ad} = 1,02$ приведены на фиг. 4, г.

Сопоставления с экспериментом в решетке 4 по осредненному в сечении CD углу выхода потока α_2 , коэффициенту потерь ζ представлены на фиг. 5.

Заключение. Приближение тонкого слоя уравнений Навье – Стокса совместно с моделью турбулентности ($k - \epsilon$) позволяет рассчитывать течения в решетках турбомашин при взаимодействии скачков уплотнения в межлопаточном канале и вязкого слоя на профиле с образованием отрывных областей. Расчет дает возможность определять коэффициент потерь в решетках с выходной кромкой профиля конечной толщины с погрешностью энтропийной функции в ядре потока $\Delta s = 0,002\%$. Результаты для локального коэффициента внешней теплоотдачи на контуре профиля сопоставлены с экспериментами, включая области отрывного течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lakshminarayana B.* Fluid dynamics and heat transfer of turbomachinery. N.Y.: Wiley, 1996. 809 p.
2. *Иванов М.Я., Крупа В.Г.* Неявный нефакторизованный метод расчета турбулентных течений вязкого теплопроводного газа в решетках турбомашин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31. № 5. С. 754–766.
3. *Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H.* Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Washington: Hemisphere, 1984. 599 p. (Рус. перев.: *Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 1. 384 с.; Т. 2. 728 с.)
4. *Головачев Ю.П.* Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. М.: Наука, 1996. 374 с.
5. *Курманов Б.И., Подвидз Г.Л.* Расчет внешней теплоотдачи в решетках турбомашин с использованием различных моделей турбулентности // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 5. С. 50–61.
6. *Patel V.C., Rodi W., Scheuerer G.* Turbulence models for near-wall and low Reynolds Number Flows: A Review // AIAA Journal. 1985. V. 23. № 9. P. 1308–1319. (Рус. перев.: *Пейттел В.К., Роду В., Шойперер Г.* Модели турбулентности для течений в пристеночной области с малыми числами Рейнольдса: Обзор. // Аэрокосмич. техника. 1986. № 2. С. 183–197.)
7. *Rodi W., Scheuerer G.* Calculation of heat transfer to convection-cooled gas turbine blades // Trans. ASME J. Eng. Gas Turbines and Power. 1985. V. 107. № 3. P. 620–627. (Рус. перев.: *Роду В., Шойперер Г.* Расчет теплоотдачи к лопаткам турбин с конвективным охлаждением // Энергетические машины и установки. 1985. Т. 107. № 3. С. 29–38.)
8. *Patel V.C., Chen H.C.* Turbulent wake of flat plate // AIAA Journal. 1987. V. 25. № 8. P. 1078–1085. (Рус. перев.: *Пейттел В.К., Чен Х.К.* Турбулентный след за пластиной // Аэрокосмич. техника. 1988. № 3. С. 13–22.)
9. Turbulence / Ed. P. Bradshaw. Berlin: Springer. 1978. 339 p. (Рус. перев.: Турбулентность / Под редакцией П. Бредшоу. М.: Машиностроение, 1980. 343 с.)
10. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
11. *Hirsch C.* Numerical computation of internal and external flows. Chichester: Wiley 1988. V. 1. 515 p.; V. 2. 691 p.
12. *Coakley T.J.* Turbulence modeling methods for the compressible Navier – Stokes equations // AIAA Paper. 1983. № 1693. 13 p.
13. *Богод А.Б., Курманов Б.И., Подвидз Г.Л.* Исследование плоского транзвукового течения газа через решетку объединенным методом интегральных уравнений и установления // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 105–111.
14. *Chakravarthy S.R., Osher S.* A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws // AIAA Paper. 1985. № 363. 11 p.
15. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
16. *Hageman L.A., Young D.M.* Applied iterative methods. N.Y.: Acad. Press, 1981. 386 p. (Рус. перев.: *Хейгеман Л., Янг Д.* Прикладные итерационные методы. М.: Мир, 1986. 446 с.)
17. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. 664 с.

18. Венедиктов В.Д., Грановский А.В., Карелин А.М. и др. Атлас экспериментальных характеристик плоских решеток охлаждаемых газовых турбин. М.: ЦИАМ, 1990. 393 с.
19. Nealy D.A., Michelc M.S., Hylton L.D., Gladden H.J. Measurements of heat transfer distribution over the surfaces of highly loaded turbine nozzle guide vanes // Trans: ASME. J. Eng. Gas Turbines Power. 1984. V. 106. N. P. 149–158. (Рус. перев.: Нили, Михелк, Хилтон, Глэдден. Измерения распределения теплоотдачи на поверхностях высоконагруженных лопаток соплового аппарата турбин // Энергетические машины и установки. 1984. Т. 1. С. 86–96.)
20. Arts T., Lambert de Rouvroit M., Rutherford A.W. Aero-thermal investigation of a highly loaded transonic linear turbine guide vane cascade. A test case for inviscid and viscous flow computations. Von Karman Institute for fluid dynamics. Techn. Note. 1990. № 174. 57 p.

Москва

Поступила в редакцию
26.VI.1997