

УДК 532.592

© 1999 г. С.П. ПОПОВ

ДВУМЕРНЫЕ СОЛИТОНЫ И ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Рассматривается развитие волновых возмущений, описываемых двумерным аналогом уравнения Захарова – Кузнецова. К ним относятся вторичные нелинейные течения в двумерном конвективном потоке газа около вертикальной нагретой пластины, а также ионно-звуковые волны в неизотермической плазме низкого давления, находящейся в однородном магнитном поле. Найденны пространственно локализованные волны солитонного типа. Численно исследованы их основные свойства, определены условия генерации и особенности парных взаимодействий при различных прицельных параметрах.

Впервые на возможность существования плазменных ионно-звуковых волн в виде трехмерных солитонов было указано в [1], где из уравнений магнитной гидродинамики при наличии сильного внешнего однородного магнитного поля были выведены упрощенные уравнения, описывающие изменения плотности и скорости ионов. Рассматривались медленные движения сильно неизотермической плазмы при низком давлении. Найденные простейшие солитонные локализованные решения обладали шаровой симметрией. Распределения вдоль радиуса находились численным решением задачи на собственные значения для обыкновенного уравнения второго порядка.

Позднее в [2] с помощью регулярного метода асимптотических разложений из тех же исходных уравнений и при сходных упрощающих допущениях было получено уравнение, справедливое для более широкого диапазона величины магнитного поля. Записанное относительно плотности ионов, оно имеет вид

$$(u_t + uu_x - u_{xxx})_{xx} + \Omega^2(u_t + uu_x - u_{xxx}) = u_{xyy} + u_{xzz} \quad (0.1)$$

где Ω – безразмерная циклотронная частота. В предельном случае сильных магнитных полей получается уравнение

$$u_t + uu_x - u_{xxx} = (1 + \Omega^{-2})(u_{xyy} + u_{xzz}) \quad (0.2)$$

которое с точностью до множителя $1 + \Omega^{-2}$ совпадает с уравнением Захарова – Кузнецова, выведенным в [1]. В отсутствие магнитного поля уравнение (0.1) переходит в уравнение Кадамцева – Петвиашвили.

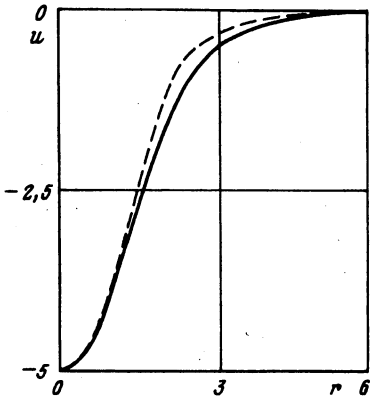
Исследование уравнения (0.2) существенно затруднено зависимостью искомой функции от трех пространственных переменных. В данной работе изучается его двумерный аналог, имеющий в безразмерных переменных вид

$$u_t + uu_x - u_{xxx} - u_{xyy} = F(x, y) \quad (0.3)$$

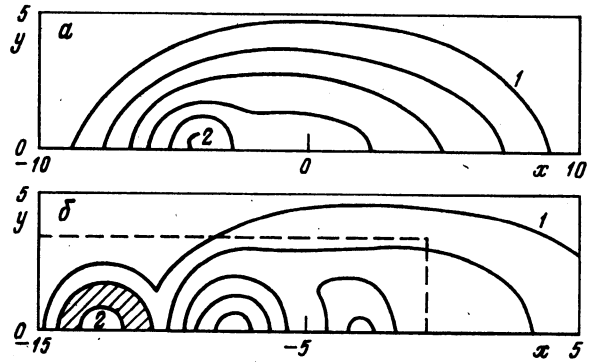
Функция $F(x, y)$ описывает внешние источники возмущений.

К уравнению (0.3) приводит также асимптотический анализ задачи о развитии трехмерных нелинейных возмущений в стационарном ламинарном двумерном конвективном течении около вертикальной нагретой пластины [3].

Для (0.3) можно определить солитонные решения, подобные найденным в [1], а применение методов прямого численного моделирования позволяет проследить дина-



Фиг 1. Профили симметричного солитона и солитона КдВ (штриховая линия) с $a_1 = -5$



Фиг 2. Генерация симметричного солитона локализованным источником: $a - t = 3$; $b - t = 6$

мику их взаимодействий. Включение источника $F(x, y)$ может дать дополнительную информацию об условиях генерации солитонов и выявить иные формы волновых движений.

Проведение непосредственной аналогии (0.3) с уравнением Кортевега – де Вриза позволяет найти простейшие солитонные решения в виде плоских прямых или наклонных к оси y солитонов, не убывающих на бесконечности только вдоль направлений линий равного уровня

$$u(x, y, t) = -3c \operatorname{sech}^2[A(x - ky + ct)], \quad A = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{k^2 + 1} \right)^{1/2} \quad (0.4)$$

Это решение зависит от параметров c, k . При фиксированном c определена амплитуда, равная $-3c$, и скорость $D = -c$. При изменении k от 0 до ∞ угол наклона солитона к оси y варьируется от 0 до $\pi/2$. Прямому солитону отвечает нулевой угол и его форма совпадает с солитоном Кортевега – де Вриза. Полуширина солитона определяется величиной A . Бóльший угол наклона приводит к увеличению ширины. Зависимости от знака k нет.

1. Структура симметричных солитонов. Если в однородное уравнение (0.3) подставить $u(x, y, t) = u(r) = u(\sqrt{(x - D_1 t)^2 + y^2})$, то для $u(r)$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u_{rr} + u_r / r + D_1 u - u^2 / 2 = 0 \quad (1.1)$$

Назовем решение этого вида симметричным солитоном при условии его монотонного затухания на бесконечности. Найти это решение можно известным численным методом "стрельбы". В начале координат $r = 0$ задается $u(r) = a, u_r(r) = 0$. Вариацией D_1 определяется такое D , что $u(r)$ монотонно стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Полученное решение определяет профиль симметричного солитона, а D – скорость его распространения вдоль оси x .

Численный анализ показал, что солитонные решения существуют для $a < 0$ и при $a = -1; -5; -10; -15; -20$ $D = -0,209; -1,03; -2,04; -3,14; -4,12$. Приблизительно $D = a/5$. Масса солитона не зависит от a и равна 20π . На фиг. 1 приведен профиль симметричного солитона с $a = -5$. Для сравнения штриховой линией дан профиль прямого солитона Кортевега – де Вриза, который описывается формулой (0.4) с $k = 0$ и яв-

ляется решением (1.1) без слагаемого u_r/r . Найденные в [1] трехмерные солитоны определяются тоже из уравнения (1.1), в котором слагаемое u_r/r заменено на $2u_r/r$.

Если в (0.3) нелинейное слагаемое имеет более общий вид $u^p u_x$, то для любых нечетных p также есть решения в виде локализованных симметричных солитонов с отрицательной амплитудой. Скорости их распространения D направлены вдоль оси x и зависят как от амплитуды, так и от показателя степени нелинейности p . При $a = -1$ и $p = 3, 5, 7, 9$ соответственно D принимает значения $-0,0275$; $-0,00613$; $-0,00168$; $-0,000515$. Полуширина солитонов возрастает с ростом p , достигая 25 единиц (см. фиг. 1) при $p = 9$.

Уравнение (0.3) допускает образование двумерных малых возмущений в форме осциллирующих в пространстве концентрических волн, затухающих на периферии. К такому выводу приводит рассмотрение уравнения (1.1), которое без слагаемого $u^2/2$ имеет при $a = 1, D = 1$ решением функцию Бесселя нулевого порядка. Эти линейные симметричные волны имеют положительные значения в центральной области и распространяются в положительном направлении x , являясь в данном отношении полной противоположностью солитонам, которые обязаны своим существованием нелинейным эффектам.

Применение численных методов для решения уравнения (0.3) может дать не только независимые от аналитических методов указания на появление упомянутых выше форм решений, но и ответить на целый ряд других важных вопросов. К ним относится определение устойчивости солитонов, характера их взаимодействия и условий генерации. Не исключается возможность обнаружения иных видов характерных решений, особенно среди осциллирующих и периодических.

В данной работе использовался численный метод, построенный по принципу расщепления. Сначала решалось уравнение (0.3) без слагаемого u_{xyy} . Для этого по направлению x при каждом фиксированном y применялась абсолютно устойчивая квази-спектральная фурье-процедура, описанная подробно в [4]. Затем решалось уравнение

$$u_t = u_{xyy} \quad (1.2)$$

2. Генерация симметричных солитонов. Из теории одномерных солитоносодержащих уравнений известно, что действие локализованных источников, по полярности совпадающих со знаком солитонов, порождает цепочки солитонов. Для уравнений Кортевега – де Вриза этот процесс изучен во всех деталях. Выявлены зависимости амплитуд и периодичность появления солитонов от мощности и протяженности источника.

В двумерных случаях исчерпывающий теоретический анализ генерации солитонов источником возмущений затруднен, хотя и в этом случае законы сохранения определяют основное направление процесса развития произвольных возмущений в солитоны. Примером могут служить выявленные закономерности в образовании двумерных рациональных солитонов, описываемых уравнением Кадомцева – Петвиашвили [4,5]. Обнаружена сложная система из взаимодействующих прямых и наклонных рациональных солитонов разной амплитуды, которые чрезвычайно чувствительны не только к мощности источника, но и к его пространственному распределению.

Симметричные солитоны уравнения (0.3) однотипны, имеют простую внутреннюю структуру и распространяются только по оси x . Это предопределяет относительную простоту реализации условий, приводящих к их генерации, и наглядность всех основных фаз этого процесса. Рассмотрим конкретный пример. Пусть локальный источник постоянной мощности имеет вид $b = 25$; $F(x, y) = -2 \exp[-(x^2 + 4y^2)/b]$ и $u(x, y, 0) = 0$. Согласно расчетам, в начальные моменты времени решение повторяет форму функции источника. Затем на оси $y = 0$ происходит постепенное выделение локального экстремума, смещающегося в сторону отрицательных значений x . Эта фаза начального зарождения солитона показана на фиг. 2, a ($t = 3$; $u_1 = -0,5$; $u_2 = -7,5$;

$du = -1$). На всех фигурах, где изображена функция $u(x,y,t)$, изолинии проведены через равные интервалы du от близкого к фоновому значения u_2 (кривые 1) до амплитудного значения u_1 (кривые 2). Зоны, очень плотно заполненные линиями уровня, заштрихованы.

В дальнейшем в области быстрого роста функции $u(x,y,t)$ происходит образование симметричного солитона с $a_1 = 20$. Ко времени $t = 6$ он выходит из области действия источника и заканчивается формирование характерной формы солитона, что изображено на фиг. 2, б, $u_1 = -1$; $u_2 = -18$; $du = -2$. Соотношения между скоростью, амплитудой и характерными размерами близки к точным решениям, определенным по уравнению (1.1). Наблюдаемые в этой окрестности другие локальные экстремумы в дальнейшем также превращаются в солитоны.

Распределение $u(x,y,t)$ стабилизируется всюду за исключением области генерации солитонов и пути их дальнейшего следования. На фиг. 2, б она ограничена штрихом. Независимость массы солитона от его амплитуды и наличие закона сохранения общей массы позволяют оценить среднее время δt , необходимое для образования очередного солитона, покидающего зону источника

$$\delta t^{-1} = \int \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y) dx dy / 20\pi$$

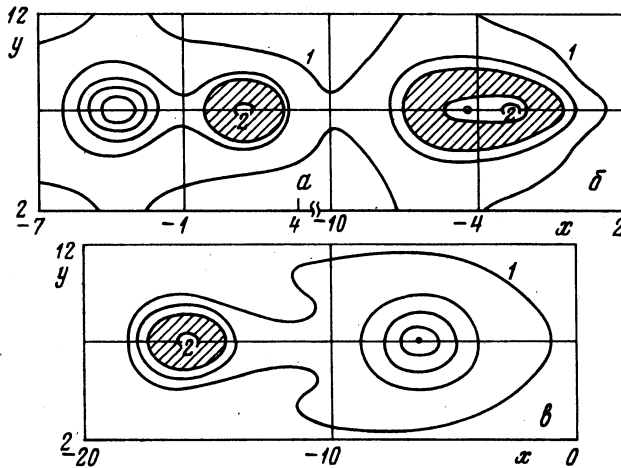
Отсюда определяется число солитонов, появившихся за определенный отрезок времени. Амплитуды солитонов и их точное расположение могут быть определены только из численных расчетов.

3. Особенности парного взаимодействия симметричных солитонов. Появление нескольких симметричных солитонов в ограниченной области пространства приводит к их взаимодействию. Отсутствие составляющей скорости по направлению y уменьшает число прицельных параметров, определяющих столкновение. При фиксированных амплитудах сталкивающихся солитонов может меняться только расстояние между их центрами по x . Компактность пространственной структуры приводит к кратковременности протекания взаимодействия. Все эти причины обуславливают относительную простоту численного моделирования парного и даже тройного взаимодействия – по сравнению с солитонами уравнения Кадомцева – Петвиашвили единственными двумерными объектами, для которых существует теория межсолитонных взаимодействий [6] и проведены некоторые численные эксперименты [4, 5].

Парное взаимодействие рассмотрим на примере симметричных солитонов с амплитудами $a_1 = -15$ и $a_2 = -5$. Все расчеты этой серии выполнялись на сетке $N_x \times N_y = 512 \times 500$ с $dx = 0,04$ и $dy = 0,03$. Данные параметры обеспечивают расчет одиночного солитона a_1 с точностью $\approx 4\%$ на протяжении всего времени расчета. В ходе решения контролировалась точность выполнения законов сохранения "массы", "импульса" и постоянство скорости движения центра масс. Первый закон выполнялся точно, поскольку это следует из конструкции схемы. Две другие величины отклонялись от точных на 3–4% при временах окончания численного расчета ($t \sim 7-9$).

Рассмотрим случай "лобового" столкновения, когда центры солитонов находятся на одной прямой ($\Delta y = 0$). Основные этапы взаимодействия продемонстрированы на фиг. 3. В начальный момент центры солитонов находились на расстоянии $\Delta x = 8,3$. Относительная скорость сближения равна 2. Начальная фаза интенсивного процесса взаимодействия наступает при $t = 1,5$ (фиг. 3, а, $u_1 = -0,1$; $u_2 = -14,5$; $du = -1$), когда расстояние между их центрами уменьшается до 5,5.

Максимальное сближение солитонов наступает при $t = 3$ (фиг. 3, б, $u_1 = 0,1$; $u_2 = -8,8$; $du = -0,8$). Расстояние $\Delta x = 2,1$, а общее распределение, образовавшееся в результате слияния солитонов, имеет практически симметричную форму и два экстремума. Далее сближение приостанавливается. Солитоны становятся на мгновение неразличимыми и происходит очень быстрый обмен их положением в про-



Фиг. 3. Развитие процесса лобового столкновения ($\Delta y = 0$) двух симметричных солитонов $a_1 = -15$ и $a_2 = -5$: $a - t = 1,5$; $b - t = 3$; $v - t = 7$

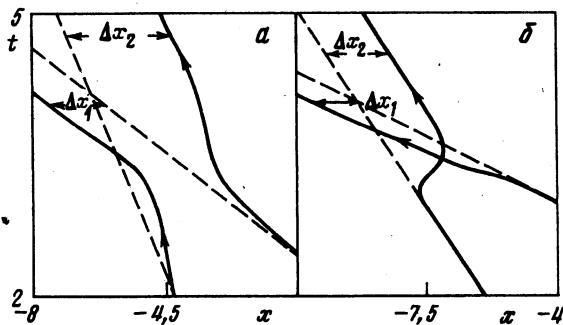
странстве. Такое взаимодействие называется резонансным и встречается в теории одномерных солитонов Бенджамина – Оно, которые все, как и симметричные солитоны, имеют одинаковую массу 4π . Окончательное разделение солитонов и восстановление их формы наступает при $t = 7$ (фиг. 3, в, $u_1 = -0,1$; $u_2 = -14$; $du = -1$). Расстояние между центрами $\Delta x = 7,5$, амплитуды солитонов $a_1 = -14,6$ и $a_2 = -3,5$.

Тонкие особенности взаимодействия демонстрирует x, t -диаграмма движения их центров, приведенная на фиг. 4, а. Штрихом отмечены траектории отдельных свободных солитонов, а сплошные линии показывают пути взаимодействующих солитонов. Большой солитон восстанавливает прежнюю амплитуду и сдвигается вперед по ходу своего движения на $\Delta x_1 = 1,5$ относительно невозмущенной траектории. Второй солитон уменьшается по амплитуде примерно на одну треть и отстает на $\Delta x_2 = -2,5$. Фазовые сдвиги Δx_1 и Δx_2 приобретаются в основном в момент наибольшего сближения (фиг. 3, б).

Сопоставление с x, t -диаграммой для взаимодействия плоских одномерных солитонов Кортевега – де Вриза (фиг. 4, б) с такими же амплитудами указывает на следующие отличия. Точка пересечения траекторий движения центров обозначает момент полного слияния солитонов с образованием профиля с одним экстремумом равным -10 . Резонанс отсутствует. После окончательного разделения восстанавливаются прежние значения амплитуд. Фазовый сдвиг Δx_1 имеет то же значение, что и в случае симметричных солитонов, но Δx_2 меньше и равен $-2,1$.

В теории солитонов факт полного восстановления формы после взаимодействия считается определяющей особенностью, отличающей их от всех прочих бегущих волн. В рассмотренном случае лобового столкновения амплитуда второго солитона не сохраняется.

В наибольшей степени эффекты двумерности проявляются при сближении двух симметричных солитонов, движущихся сначала параллельными курсами с прицельным параметром Δy , отличным от нуля. Пусть амплитуды будут те же, что и при лобовом столкновении: $\Delta x = 8,3$; $\Delta y = 1,8$. На фиг. 5 приведены три последовательные стадии этого взаимодействия. Фигура 5,а отвечает началу слияния солитонов ($t = 2$, $u_1 = -0,1$; $u_2 = -14$; $du = -1$). Амплитуды и формы их мало отличаются от начальных. Фигура 5,б ($t = 4$, $u_1 = -0,1$; $u_2 = -14$; $du = -1$) показывает фазу наибольшего сближения, распределение имеет один четко выраженный пик, который можно отнести к соли-



Фиг. 4. Динамика движения центров симметричных солитонов при лобовом столкновении (а) и солитонов КдВ (б)

тону a_1 . В этот момент происходит быстрое перемещение солитонов в пространстве, сопровождающееся смещением их центров не только по направлению общего движения, но и в перпендикулярном направлении y . Разделение происходит при $t = 7$ (фиг. 5, б, $u_1 = -0,1$; $u_2 = -13,5$; $du = -1$). Амплитуды равны $a_1 = -14$; $a_2 = -3,7$. Сдвиги положения центров следующие: $\Delta x_1 = 0,3$; $\Delta x_2 = -1,4$; $\Delta y_1 = 0,9$; $\Delta y_2 = -2,3$.

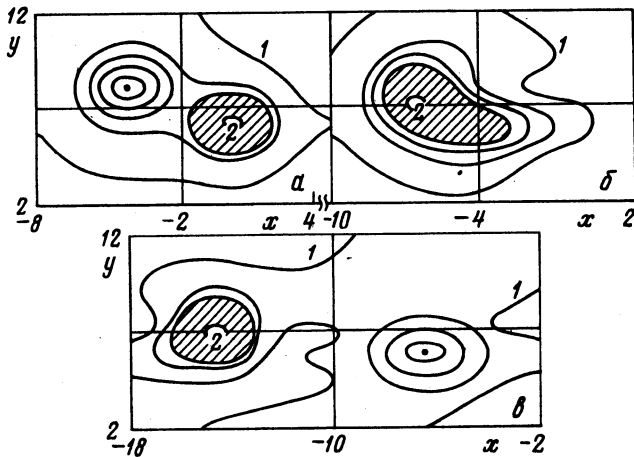
Увеличение начального расстояния Δy до значения 3 приводит к изменению характера взаимодействия. Положение солитонов перед столкновением приведено на фиг. 6, а ($t = 3$; $u_1 = 0,1$; $u_2 = -14$; $du = -1$). В фазе наибольшего сближения (фиг. 6, б, $t = 5$, $u_1 = -0,1$; $u_2 = -10$; $du = -1$) расстояние по y сокращается, но в отличие от предыдущего случая солитоны не меняются местами, т.е. их траектории не пересекаются. В момент $t = 8$ (фиг. 6, в, $u_1 = -0,5$; $u_2 = -13,5$; $du = -0,3$) большой солитон полностью восстановился и получил смещения относительно невозмущенной траектории $\Delta x_1 = -1$; $\Delta x_2 = 0,9$. На другой солитон столкновение оказало наибольшее разрушающее действие. Он превратился в размытую, вытянутую по x структуру с двумя экстремумами: $-2,1$ и $-1,7$. Характерные времена изменений здесь порядка 20 единиц.

Если прицельное расстояние Δy увеличить до 5,1, то реализуется режим скользящего столкновения. При наименьшем расстоянии между центрами значение u в зоне наибольшего перекрытия профилей равно $-1,3$. Весь процесс сближения и последующего разлета происходит без заметного искажения траекторий, форм и амплитуд солитонов. Только a_1 уменьшается на 4%.

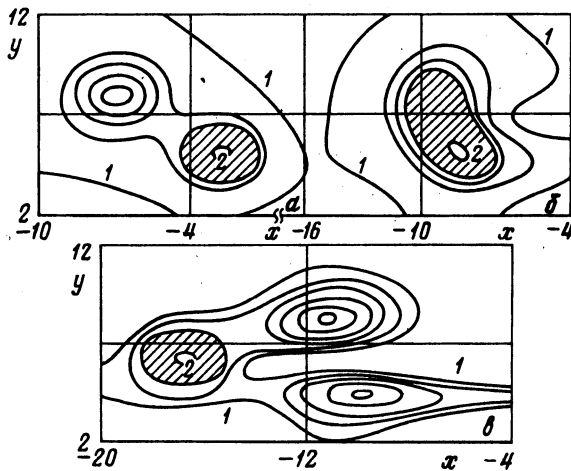
Данный вариант можно рассматривать и как тестовый на устойчивость симметричных солитонов к малым кратковременным возмущениям. Результаты указывают на возможность незначительного уменьшения амплитудных значений при сохранении соответствующих им форм.

Процесс взаимодействия пары симметричных солитонов сильно зависит от прицельного параметра Δy . При лобовом ударе качественное поведение солитонов хорошо описывается одномерной теорией. Увеличение Δy ведет к качественным проявлениям двумерности: солитоны обмениваются своими траекториями, получая значительные сдвиги фаз по обоим направлениям. Амплитуда большого солитона не изменяется, а другая уменьшается почти вдвое.

При достижении Δy критического значения 2,7–3 неупругие эффекты проявляются в наибольшей степени. Хотя один из солитонов сохраняется, другой разрушается полностью. На месте взаимодействия остается образование сложной формы, дальнейшая его эволюция происходит в большем масштабе времени. В данном варианте и некоторых других было замечено появление сильно вытянутых по x фоновых структур с амплитудами порядка ± 1 , что существенным образом осложняет интер-



Фиг. 5. Взаимодействие симметричных солитонов $a_1 = -15$ и $a_2 = -5$ при $\Delta y = 1,8$: $a - t = 2$; $b - t = 4$; $v - t = 7$



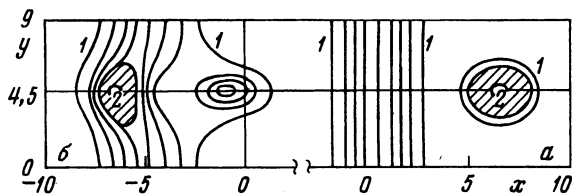
Фиг. 6. Взаимодействие симметричных солитонов $a_1 = -15$ и $a_2 = -5$ при $\Delta y = 3$: $a - t = 3$; $b - t = 5$; $v - t = 8$

претацию результатов и выделение на этом фоне образований солитонного типа. Отметим, что уравнение (3) допускает произвольные решения $u(y)$, которые могут появляться, вероятнее всего, при значительных отклонениях $u(x, y, t)$ от начального вида, что и наблюдается при критических параметрах столкновения.

Поведение солитонов при касательном взаимодействии на больших расстояниях Δy приводит к выводу об их устойчивости к малым кратковременным возмущениям.

4. Взаимодействие плоского прямого солитона с симметричным. Пусть имеется симметричный солитон с амплитудой $a_1 = -15$ и плоский с $a_2 = -5$. Их начальное взаимное расположение изображено на фиг. 7,а ($t = 0$, $u_1 = 0$; $u_2 = -15$; $du = -1$). Плоский солитон движется влево со скоростью 1,7, а симметричный догоняет его с относительной скоростью сближения 1,3. На фиг. 7,б ($t = 4$, $u_1 = -1$; $u_2 = -11$; $du = -1$) изображена активная фаза удара.

В силу локального типа воздействия симметричный солитон воспринимает только находящуюся непосредственно перед ним часть плоского солитона и обменивается с



Фиг. 7. Взаимодействие симметричного солитона $a_1 = -15$ и плоского $a_2 = -5$: $a - t = 0$; $b - t = 4$

ним амплитудами аналогично случаю лобового столкновения двух симметричных солитонов (фиг. 3,б). В результате появляющегося сдвига фаз большой солитон ($a_1 = 11,5$) оказывается перед фронтом плоского солитона и уходит от него. Выделившаяся из плоского солитона область с $a_2 = 4,5$ со временем формируется в новый солитон, остающийся на значительном удалении за ним. В этой фазе не сохраняется число взаимодействующих элементов, хотя соотношения их амплитуд находятся в соответствии с результатами, полученными в предыдущем разделе для лобового столкновения.

Реализующееся соотношение амплитуд способствует последующему пространственному разделению всех солитонов. Влево уходит симметричный солитон с $a_1 = -15$, за ним следует плоский прямой солитон с начальной амплитудой $a_2 = -5$ (за исключением области разрыва в центральной части). Медленнее всех распространяется вновь появившийся симметричный солитон с $a_3 = -4$.

На больших временных интервалах $\sim 15-20$ происходит дальнейшая эволюция только локально возмущенного плоского солитона. Слева и справа от оси симметрии по y в провале, появившемся после прохождения симметричного солитона a_1 , сначала образуются незначительные экстремумы, развивающиеся затем в пару новых симметричных солитонов с амплитудой $a_4 = -12$, рост которой прекращается, как только эти солитоны покидают область действия плоского солитона. В результате вновь воспроизводятся условия, ведущие к генерации второй пары симметричных солитонов на границах уже более расширенной области разрыва плоского солитона. Так начинается процесс непрерывного развала возмущенного плоского солитона на две одинаковые цепи симметричных солитонов.

Заключение. В парных лобовых столкновениях с соотношением амплитуд $1 : 3$ можно говорить о почти упругом характере взаимодействия – не сохраняется лишь значение амплитуды малого солитона. При увеличении прицельного параметра доля неупругих эффектов возрастает и при некотором критическом его значении происходит разрушение малого солитона. Эти эффекты зависят от соотношения амплитуд сталкивающихся пар.

В наибольшей степени отличие от обыкновенных представлений о взаимодействии одномерных солитонов наблюдается при встрече симметричного и плоского солитонов. В этом случае появляются даже новые симметричные солитоны, непрерывно образующиеся в результате развала плоского солитона, который оказывается неустойчивым к кратковременным сильным воздействиям. Симметричные солитоны оказываются в данном случае устойчивыми.

Сравнивая перечисленные закономерности, с обнаруженными для солитонов Кадомцева – Петвиашвили [4,5], можно провести некоторые параллели. Плоские прямые солитоны Кадомцева – Петвиашвили также неустойчивы – под действием значительных возмущений они распадаются на прямые рациональные солитоны, являющиеся стабильными образованиями. Взаимодействие плоского солитона с рациональным происходит по описанной в разд. 3 схеме. Не образуется лишь солитон a_3 . Парные взаимодействия рациональных солитонов значительно сложнее и происходят по другим законам.

Генерация двумерных солитонов Захарова – Кузнецова происходит достаточно

просто при действии локального источника, что моделируется заданием правой части со знаком минус.

Изученные в данной работе закономерности связаны с довольно ограниченным набором численных решений. Это относится к фиксированному соотношению амплитуд взаимодействующих солитонов, не рассмотрены плоские солитоны и не определен порог неустойчивости плоских солитонов для малых возмущений. Только затронут вопрос о возможном существовании концентрических линейных волновых решений и приведен один пример генерации солитонов однополярным источником простого вида. Расширение исследований в этих направлениях приведут к уточнению выявленных здесь закономерностей и обнаружению новых.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. О трехмерных солитонах // ЖЭТФ. 1974. Т. 66. Вып. 2. С. 594–597.
2. Leadke E.W., Spatschek K.H. Nonlinear ion-acoustic waves in weak magnetic fields // Fluids. Phys. 1982. V. 25. № 6. P. 985–989.
3. Жук В.И., Попов С.П. О солитонных решениях двумерного уравнения Захарова – Кузнецова // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 39. № 1. С. 1–14.
4. Попов С.П. Численное решение уравнения Кадомцева – Петвиашвили с источниковыми членами. М.: ВЦ РАН, 1995. 15 с.
5. Попов С.П. Устойчивость и парное взаимодействие солитонов уравнения Кадомцева – Петвиашвили. М.: ВЦ РАН, 1996. 29 с.
6. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. М.: Наука, 1980. 319 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.XI.1997