

УДК 532.59+539.3:534.1

© 1999 г. А.В. МАРЧЕНКО

УСТОЙЧИВОСТЬ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН И КВАДРАТИЧНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Исследуются процессы, приводящие к сильному искажению амплитуды периодической изгибно-гравитационной волны, распространяющейся в слое жидкости конечной глубины под неограниченной тонкой упругой пластиной. Показано, что причиной неустойчивости волны с волновым вектором \mathbf{k}_w , где $|\mathbf{k}_w| < k_{min}$, может быть трехволновой резонанс с шумовыми гармониками изгибно-гравитационных волн. В зависимости от величины $|\mathbf{k}_w|$ наибольшее усиление в начальные моменты движения получают либо две попутные шумовые гармоники, либо две шумовые гармоники с волновыми векторами, составляющими ненулевой угол с вектором \mathbf{k}_w .

Упругие свойства пластины характеризуются безразмерным параметром жесткости D , зависящим от характерного горизонтального масштаба движений l . Параметр l может быть выбран из условия $D = 1$. В этом случае он характеризует масштаб волновых чисел, при котором влияние силы тяжести и изгибных сил на свойства волны одного порядка. Волны таких длин называются изгибно-гравитационными.

Свойства периодической волны W определяются частотой ω_w , волновым вектором \mathbf{k}_w и амплитудой a_w . В слабонелинейном приближении волны W распространяется без искажения синусоидального профиля и амплитуды с постоянной скоростью $c_w = \omega_w/k_w$, где частота волны связана с волновым числом $k_w = |\mathbf{k}_w|$ дисперсионным соотношением $\omega_w = \omega(k_w, a_w)$.

Представляет интерес исследование влияния периодических изгибно-гравитационных волн малых амплитуд на волну W , которые будем называть "шумовыми" гармониками или "шумом". Полагается, что в начальный момент времени амплитуды шумовых гармоник много меньше a_w .

Причиной взаимодействия волны W с шумом являются нелинейные взаимодействия. В работе рассматриваются наиболее сильные квадратичные трехволновые взаимодействия, приводящие к искажению формы волны W на временах порядка ε^{-1} , где $\varepsilon = a_w/l \ll 1$. Процессы трехволнового резонанса исследовались ранее в различных областях физики [1]. Особо отметим работы по теории капиллярно-гравитационных [2, 3] и изгибно-гравитационных [4, 5] нелинейных волн малых амплитуд, где были получены асимптотические уравнения.

Основным механизмом неустойчивости гравитационных волн является неустойчивость Бенджамена – Фейра [6], приводящая к распаду периодической волны W на волновые пакеты, огибающие которых взаимодействуют солитонным образом на временах порядка ε^{-2} . Источником неустойчивости являются малые периодические возмущения с волновым вектором, параллельным \mathbf{k}_w .

Учет поверхностного натяжения или упругой пластины на поверхности жидкости приводит к тому, что спектр поверхностных волн становится "распадным" [1]. В этом случае возможны процессы энергетического обмена между тремя волнами, волновые

векторы и частоты которых удовлетворяют резонансным условиям. Характерные времена этих процессов порядка ε^{-1} . Поэтому распадная неустойчивость является более сильной по сравнению с неустойчивостью Бенджамена – Фейра.

Цель данной работы состоит в исследовании устойчивости периодической волны W по отношению к шуму широкого спектрального состава и выделении шумовых гармоник, приводящих к наиболее сильному искажению волны W на временах порядка ε^{-1} .

1. Асимптотические уравнения. Рассматривается слой жидкости конечной глубины H_d , на поверхности которого плавает бесконечная упругая пластина постоянной толщины h . Каноническими переменными для уравнений движения жидкости являются возвышение поверхности жидкости над горизонтальным положением равновесия η и значение потенциала скоростей частиц жидкости на ее поверхности φ^s [7, 8]. Выберем в качестве характерных значений потенциала φ , времени t и координат x, y, z величины $a\sqrt{gl}, \sqrt{l/g}$ и l , где a – характерная амплитуда волн и l характеризует длину волн. Будем предполагать, что $\varepsilon = a/l \ll 1$.

В безразмерных переменных уравнения движения жидкости имеют вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi^s} \frac{\partial \varphi^s}{\partial t} = - \frac{\delta \Gamma}{\delta \eta} \quad (1.1)$$

$$2\Gamma = \int [\varphi^s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^s + \eta^2 + D(\Delta \eta)^2] dx dy$$

при условии, что потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа и на дне выполняется условие непротекания.

Интеграл в (1.1) берется в пределах всей плоскости (x, y) , безразмерная жесткость пластины определяется формулой

$$D = \frac{Eh^3}{12\rho g(1 - \nu^2)l^4}$$

где E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона пластины, ρ – плотность жидкости, l – характерный горизонтальный масштаб.

В выражение для гамильтониана в (1.1) входит нормальная производная от потенциала $(\partial \varphi / \partial n)^s$ на границе жидкости, являющаяся функционалом φ^s и η . Внешняя нормаль к границе жидкости определяется формулой

$$\mathbf{n} = \frac{(-\varepsilon(\partial \eta / \partial x), -\varepsilon(\partial \eta / \partial y), 1)}{\sqrt{1 + (\varepsilon \nabla \eta)^2}}, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Отсюда вытекает

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^s = -\varepsilon \nabla \eta \nabla \varphi^s + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^s \left(1 - \frac{3}{2} (\nabla \eta)^2 \right) + O(\varepsilon^3) \quad (1.2)$$

Подставляя (1.2) в выражение для гамильтониана (1.1), находим

$$2\Gamma = \int [\varphi^s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^s \left(1 - \frac{3}{2} \varepsilon^2 (\nabla \eta)^2 \right) - \varepsilon \varphi^s \nabla \varphi^s \nabla \eta + \eta^2 + D(\Delta \eta)^2] dx dy \quad (1.3)$$

Предположим, что при $t = 0$ в жидкости имеются медленно меняющиеся в пространстве возмущения. Начальные условия для системы уравнений (1.1) имеют вид

$$t = 0: \quad \eta = \sum_{j=\pm 1}^{\pm N} \eta_j(X, Y) e^{\pm i\theta_j}, \quad \varphi^s = \sum_{j=\pm 1}^{\pm N} \varphi_j(X, Y) e^{\pm i\theta_j} \quad (1.4)$$

$$\theta_j = \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (x, y), \quad X = \varepsilon x, \quad Y = \varepsilon y, \quad \eta_j = \eta_{-j}^*, \quad \varphi_j = \varphi_{-j}^*$$

Со временем начальные возмущения (1.4) развиваются и в жидкости появляются колебания с кратными волновыми векторами, которые обозначаются буквами с жирными нижними индексами

$$\mathbf{k}_m = \sum_{j=1}^N m^j \mathbf{k}_j, \quad m_j \in Z$$

Генерация кратных гармоник обусловлена степенной нелинейностью гамильтониана при $\varepsilon \ll 1$. Для обоснования этого приближения заметим, что потенциал скоростей φ , удовлетворяющий условию непротекания на дне и уравнению Лапласа в объеме, может быть представлен в форме интеграла Фурье

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \varphi_f(\mathbf{k}) \frac{\cosh(k(z+H))}{\cosh(kH)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad k = |\mathbf{k}|$$

Здесь $H = H_d/l$ – безразмерная глубина жидкости. При $z = \varepsilon \eta$ можно написать разложения

$$\varphi^s = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \varphi_f(\mathbf{k}) [1 + \tanh(kH)k\varepsilon\eta + \frac{1}{2}(k\varepsilon\eta)^2 + O(\varepsilon^3)] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (1.5)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^s = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \varphi_f(\mathbf{k}) k [\tanh(kH) + k\varepsilon\eta + \frac{1}{2} \tanh(kH)(k\varepsilon\eta)^2 + O(\varepsilon^3)] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}$$

Начальные условия (1.4) означают, что при $t = 0$ фурье-образы φ_f и η_f отличны от нуля только в ε -окрестностях векторов \mathbf{k}_j . Поэтому из (1.5) вытекает

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_m^s = \lambda_\eta^m \varphi_m - i\varepsilon \nabla \lambda_\eta^m (\varphi_m + \varepsilon \sum_r (k_r^2 - \lambda_\eta^m \lambda_\eta^r) \varphi_r \eta_{m-r}) + O(\varepsilon^2) \quad (1.6)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^s = \sum_m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_m^s e^{i\theta_m}, \quad \theta_m = \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{x}$$

$$\lambda_\eta^m = \lambda_\eta(\mathbf{k}_m), \quad \lambda_\eta(\mathbf{k}) = k \tanh(kH)$$

$$\nabla \lambda_\eta = \left(\frac{\partial \lambda_\eta}{\partial k_x}, \frac{\partial \lambda_\eta}{\partial k_y} \right), \quad \nabla \varphi_m = \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial X}, \frac{\partial \varphi_m}{\partial Y} \right)$$

Суммирование в первом уравнении (1.6) осуществляется при $t = 0$ только по векторным индексам, соответствующим волновым векторам, входящим в начальные условия (1.4). Видно, что в выражении для $(\partial \varphi / \partial z)^s$ присутствуют кратные гармоники.

Подстановка выражения (1.6) в (1.1) приводит к уравнениям

$$\frac{\partial \eta_m}{\partial t} = \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_m^*}, \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \eta_m^*} \quad (1.7)$$

Правая часть этих уравнений содержит нелинейные члены степенного типа, которые играют роль вынуждающей силы, приводящей к появлению кратных гармоник.

Решение уравнений (1.7) с начальными условиями (1.4) будем искать в виде [9]

$$\eta = \sum_m \eta_m(X, Y, t) e^{i\theta_m}, \quad \varphi^s = \sum_m \varphi_m(X, Y, t) e^{i\theta_m} \quad (1.8)$$

$$\eta_m = \eta_{-m}^*, \quad \varphi_m = \varphi_{-m}^*$$

Коэффициенты η_m , φ_m удовлетворяют бесконечномерной системе уравнений (1.7), каждое из которых имеет вид

$$\frac{\partial \eta_m}{\partial t} = \lambda_\eta^m \varphi_m + \varepsilon N_\eta^m, \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = -\lambda_\varphi^m \eta_m + \varepsilon N_\varphi^m \quad (1.9)$$

$$\lambda_\varphi^m = \lambda_\varphi(\mathbf{k}_m), \quad \lambda_\varphi(\mathbf{k}) = 1 + Dk^4$$

Здесь N_η^m , N_φ^m обозначают нелинейные и дисперсионные слагаемые.

Из (1.9) следует, что в начальные моменты времени эволюция гармоник, входящих в начальные условия (1.4), описывается формулами

$$\varphi_{\pm m} = \varphi_{\pm m}^{(0)} \exp[\pm i\omega_{\pm m} t], \quad \eta_{\pm m} = \eta_{\pm m}^{(0)} \exp[\pm i\omega_{\pm m} t] \quad (1.10)$$

$$\omega_m^2 = \lambda_\eta^m \lambda_\varphi^m$$

$$\mathbf{m} \in \{(\pm 1, 0, \dots, 0), (0, \pm 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, \pm 1)\}$$

Начальные значения амплитуд кратных гармоник равны нулю. Поэтому их возбуждение происходит вследствие нелинейного взаимодействия имеющихся при $t = 0$ гармоник. Условие резонансного возбуждения \mathbf{m} -й гармоники имеет вид

$$\sum_{j=1}^N m^j \omega_j = \omega_m \quad (1.11)$$

где ω_j равна одной из частот, определяемых третьей формулой (1.10), а j -я координата вектора \mathbf{m} равна единице. Сумма $\sum_{j=1}^N m_j$ равна степени нелинейного члена в уравнениях (1.9), приводящего к резонансному возбуждению \mathbf{m} -й гармоники. На временах порядка T_N резонансное возбуждение описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial t^2} = -\omega_m^2 \varphi_m + T_N^{-1} F_m e^{i\omega_m t}, \quad T_N = \varepsilon^{1 - \sum_{j=1}^N m_j} \quad (1.12)$$

Решение этого уравнения при нулевых начальных условиях имеет вид

$$\varphi_m = t F_m e^{i\omega_m t} (2i\omega_m T_N)^{-1} \quad (1.13)$$

где F_m степенным образом зависит от амплитуд волн, нелинейное взаимодействие которых приводит к резонансному возбуждению \mathbf{m} -й гармоники.

Видно, что амплитуда \mathbf{m} -й гармоники линейно растет со временем и за время порядка T_N станет сравнима с амплитудами волн, нелинейное взаимодействие которых привело к возбуждению \mathbf{m} -й гармоники. Поэтому на временах порядка T_N необходимо учитывать обратное влияние \mathbf{m} -й гармоники на возбуждающие ее волны. Для описания этого эффекта в первом приближении достаточно учесть в гамильтониане слагаемые порядка не выше T_N^{-1} . При этом из рассмотрения бесконечной системы (1.9) следует, что в гамильтониане можно с заданной степенью точности учитывать конечное число гармоник, амплитуды которых в результате нелинейных взаимодействий имеют порядки не выше T_N^{-1} .

Очевидно, что квадратичные резонансные взаимодействия самые интенсивные, так как их характерные времена порядка ε^{-1} . Исключение составляет генерация нулевой гармоники, которая обычно называется средним течением. Из (1.6), (1.7) вытекает, что уравнение генерации среднего течения имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} = O(\varepsilon^2) \quad (1.14)$$

Этот эффект связан с алгебраическими выражениями коэффициентов при кубических членах в гамильтониане.

Условие существования квадратичных резонансов имеет вид

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_3) \quad (1.15)$$

и является хорошо известным условием резонансного взаимодействия трех волн.

К кубическим взаимодействиям относятся самовоздействие и четырехволновые взаимодействия. Характерные времена этих процессов пропорциональны ε^{-2} . При самовоздействии происходит резонансное возбуждение волны за счет ее взаимодействия со второй гармоникой. Условия четырехволнового резонанса имеют вид

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) + \omega(\mathbf{k}_3) = \omega(\mathbf{k}_4) \quad (1.16)$$

Частными случаями N -волновых взаимодействий являются процессы генерации $N-1$ гармоники. Условия их реализации имеют вид

$$\omega(Nk) = N\omega(k) \quad (1.17)$$

В жидкости со свободной поверхностью квадратичные резонансы и процессы генерации N -й гармоники не реализуются, в жидкости под упругой пластиной эти резонансы возможны.

2. Резонансные триады в жидкости под упругой пластиной. Рассмотрим свойства резонансных триад, вытекающих из условий (1.15). Предположим, что жидкость бесконечно глубокая. Выберем в качестве характерного горизонтального масштаба величину $l = (Eh^3 / (12\rho g(1 - v^2)))^{1/4}$, при которой $D = 1$. Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 = k(1 + k^4) \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует, что частота определяется по волновому вектору с точностью до знака. Изменение знака ω соответствует изменению направления распространения волны. Если в условиях (1.15) все $\omega(\mathbf{k}_j) > 0$, то волна φ_3 называется волной накачки. Если же знаки $\omega(\mathbf{k}_j)$ неопределенны, то волной накачки может быть любая из трех взаимодействующих волн.

Представим волновые векторы взаимодействующих волн в виде

$$\mathbf{k}_3 = k(1, 0), \quad \mathbf{k}_2 = -\alpha k(\cos \theta, \sin \theta), \quad \mathbf{k}_1 = k(1 + \alpha \cos \theta, \alpha \sin \theta) \quad (2.2)$$

Здесь θ – угол между векторами \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_1 , α – отношение длин этих векторов.

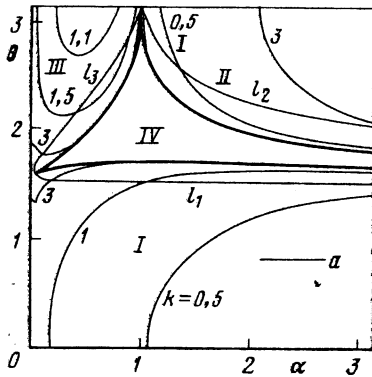
Условие резонансного взаимодействия трех волн (1.15) сводится к кубическому уравнению относительно k^2 , решение которого имеет вид $k^2 = f(\alpha, \theta)$. Поэтому должно выполняться $f > 0$. Таким образом, для любых значений α и θ , удовлетворяющих условию $f > 0$, может быть построена резонансная триада.

На фиг. 1 на плоскости (α, θ) в области IV выполняется $f < 0$. Для любой точки из области I, II, III может быть построена резонансная триада. В областях I, II и III волнами накачки являются соответственно волны \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 . Линии a на фиг. 1 соответствуют $k = \text{const}$. На кривых l_1, l_2, l_3 обращается в нуль коэффициент Ω при нелинейных членах в (2.3).

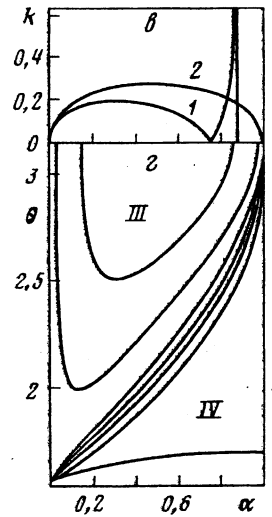
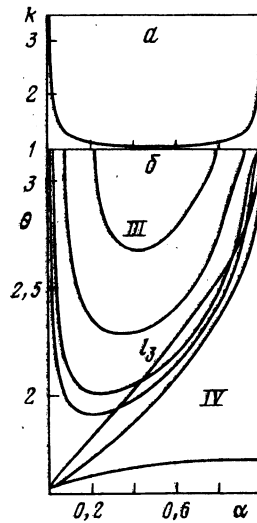
Из фиг. 1 видно, что для волны W с волновым вектором $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_W$ можно подобрать много резонансных триад, в которых она участвует как волна накачки или как вторичная волна.

Предположим, что волна накачки φ_3 взаимодействует с вторичными волнами $\varphi_1^{(n)}$ и $\varphi_2^{(n)}$, где $n = 1, \dots, N$, и каждая из троек $\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, \varphi_3$ при фиксированном значении n резонансная. Уравнения резонансного взаимодействия монохроматических волн имеют вид

$$i \frac{d}{dT} \varphi_1^{(n)} = V_1^{(n)} \varphi_2^{(n)*} \varphi_3, \quad i \frac{d}{dT} \varphi_2^{(n)} = V_2^{(n)} \varphi_1^{(n)*} \varphi_3, \quad i \frac{d}{dT} \varphi_3 = \sum_n V_3^{(n)} \varphi_1^{(n)} \varphi_2^{(n)} \quad (2.3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Параметрическое представление резонансных триад k_1, k_2, k_3 на плоскости (α, θ)

Фиг. 2. Параметрическое представление коэффициентов, характеризующих взаимодействие резонансных триад различной ориентации: a – зависимость $k(\alpha, \theta)$ от α при $\theta = \pi$, b – линии уровня $k = \text{const}$, ϵ – зависимость $\chi(\alpha, \theta)$ от α при $\theta = 2,5 \pi$ (кривая 1) и $\theta = \pi$ (кривая 2), z – линии уровня $\chi = \text{const}$

где $n = 1, \dots, N$ и N – общее число резонансных триад. Коэффициенты $V_j^{(n)}$ определяются формулами

$$V_j^{(n)} = V_j, \quad k_{1,2} = k_{1,2}^{(n)}, \quad V_j \frac{\omega_j \Omega}{2\lambda_\eta^i \omega_1 \omega_2 \omega_3} \quad (2.4)$$

$$\Omega = \omega_1 \omega_2 \lambda_\eta^3 (k_1 k_2 + \lambda_\eta^1 \lambda_\eta^2) + \omega_1 \omega_3 \lambda_\eta^2 (k_1 k_3 - \lambda_\eta^1 \lambda_\eta^3) + \omega_2 \omega_3 \lambda_\eta^1 (k_2 k_3 - \lambda_\eta^2 \lambda_\eta^3)$$

Проведем замену

$$\varphi_{1,2}^{(n)} \rightarrow a_3 \sqrt{\frac{V_{1,2}^{(n)}}{V_3^{(n)}}} \varphi_{1,2}^{(n)}, \quad \varphi_3 \rightarrow a_3 \varphi_3$$

и обозначим $\kappa^{(n)} = \sqrt{V_1^{(n)} V_2^{(n)}} a_3$. Тогда уравнения (2.3) запишутся в виде

$$i \frac{d}{dT} \varphi_1^{(n)} = \kappa^{(n)} \varphi_2^{(n)*} \varphi_3, \quad i \frac{d}{dT} \varphi_2^{(n)} = \kappa^{(n)} \varphi_1^{(n)*} \varphi_3, \quad i \frac{d}{dT} \varphi_3 = \sum_n \kappa^{(n)} \varphi_1^{(n)} \varphi_2^{(n)} \quad (2.5)$$

Будем считать, что амплитуды всех шумовых гармоник $\varphi_{1,2}^{(n)}$ одного порядка и много меньше амплитуды $a_w \equiv \varphi_3$ в начальный момент времени $T = 0$. Параметр $\kappa^{(n)}$ при заданных начальных условиях определяет характерное время энергетического обмена между гармониками $\varphi_{1,2}^{(n)}$ и φ_3 в пределах одной триады. В общем случае характерное время изменения φ_3 определяется экстремальным значением $\kappa^{(n)}$.

Определим в соответствии с формулами (2.4) функцию $\kappa_0(\alpha, \theta, k) = \sqrt{V_1 V_2}$. Если параметры α, θ и k соответствуют одной резонансной триаде, то $k^2 = f(\alpha, \theta)$ и можно написать $\kappa_0(\alpha, \theta, k) = \kappa(\alpha, \theta)$. Очевидно, что каждой резонансной триаде, обозначаемой индексом (n) , соответствуют определенные значения $\alpha^{(n)}$ и $\theta^{(n)}$, так что $\kappa^{(n)} = \kappa(\alpha^{(n)}, \theta^{(n)})$.

На фиг. 2, б, г представлены линии уровня $k = \text{const}$ (или $f(\alpha, \theta) = \text{const}$) и $\kappa(\alpha, \theta) = \text{const}$ соответственно. Если имеется волна накачки, модуль волнового числа которой равен k_0 , то параметры θ, α всех резонансных с волной k вторичных волн лежат на линии уровня $k = k_0$. График зависимости $k(\alpha, \theta)$ при $\theta = \pi$ представлен на фиг. 2, а и определяет точки на оси $\theta = \pi$, из которых выходят линии уровня с заданным k_0 . При стремлении α к нулю или единице волновое число $k \rightarrow \infty$. Существует минимальное волновое число волны накачки k_{\min} , соответствующее волне накачки при генерации второй гармоники: $\omega(k_{\min}) = 2\omega(k_{\min}/2)$. В бесконечно глубокой жидкости выполняется $k_{\min} = 2(1/14)^{1/4} \approx 1,06$.

На фиг. 2, в представлены зависимости $\kappa(\alpha, \theta)$ при $\theta = \pi$ и 2,5. Видно, что при приближении к кривой, разграничивающей области III и IV, выполняется $\kappa(\alpha, \theta) \rightarrow \infty$. Все линии уровня $\kappa = \text{const}$ начинаются на оси $\theta = \pi$. Причем часть этих линий уровня исходит из точки $\alpha = 1$. При любом фиксированном θ кривая $\kappa(\alpha, \theta)$ имеет один локальный максимум на отрезке, где $\Omega > 0$. Функция $\kappa(\alpha, \theta)$ монотонно убывает при фиксированном значении α и достигает нуля на кривой l_1 , затем она монотонно возрастает и, как отмечалось выше, стремится к бесконечности при приближении к границе областей III и IV.

Каждая кривая $k = k_0$ пересекает кривую $\kappa(\alpha, \theta) = \text{const}$ в двух точках или вообще не пересекает. Для каждой кривой $k = k_0$ имеется одна касающаяся ее кривая $\kappa(\alpha, \theta) = \text{const}$. Если точка касания лежит правее l_3 , то в ней достигается локальный максимум коэффициента $\kappa(\alpha)$, определенного на кривой $k = k_0$ и равного значению функции $\kappa(\alpha, \theta)$ в точках этой кривой. Если же точка касания находится левее кривой l_3 , то в ней достигается локальный минимум коэффициента $\kappa(\alpha)$. Если $k_0 = k_{cr}^1 > k_{\min}$, то точка касания лежит на кривой l_3 , описываемой уравнением $\kappa(\alpha, \theta) = 0$.

Таким образом, при $k = k_0 \in (k_{\min}, k_{cr}^1)$ коэффициент $\kappa(\alpha)$ имеет два максимума на оси $\theta = \pi$ и минимум в точке касания с соответствующей кривой $\kappa(\alpha, \theta) = \text{const}$. При $k = k_0 > k_{cr}^1$ максимальные значения $\kappa(\alpha)$ достигаются на оси $\theta = \pi$ и в точке касания с соответствующей кривой $\kappa(\alpha, \theta) = \text{const}$, а в точках пересечения с кривой l_3 имеются локальные минимумы, в которых $\kappa(\alpha) = 0$. Коэффициент $\kappa(\alpha) = \kappa_1$ при $\theta = \pi$. При $k = k_0 > k_{cr}^1$ значение $\kappa(\alpha)$ в точке локального максимума, не лежащей на оси $\theta = \pi$, равно κ_2 . Положим, что при $k_0 > k_{cr}^2$ выполняется $\kappa_2 > \kappa_1$ и при $k_0 (k_{cr}^1, k_{cr}^2)$ имеет место $\kappa_1 > \kappa_2$.

Два максимума на оси $\theta = \pi$ соответствуют резонансному взаимодействию волны накачки с волновым числом k_0 с попутными вторичными волнами. Локальный максимум в точке касания соответствует процессу генерации второй гармоники по частоте, где волна накачки является второй гармоникой, модули волновых векторов вторичных волн одинаковы и направления волновых векторов вторичных волн не совпадают с направлением волны накачки.

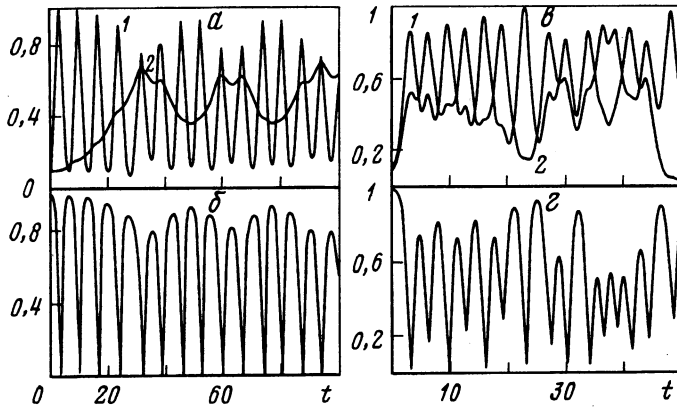
3. Распадающая неустойчивость. Уравнения (2.5) имеют интегралы

$$E_1^{(n)} - E_2^{(n)} = E_1^{(n),0} - E_1^{(n),0}$$

$$\sum_n (E_1^{(n)} + E_2^{(n)}) + 2E_3 = \sum_n (E_1^{(n),0} + E_2^{(n),0}) + 2E_3^0$$

$$E_{1,2}^{(n)} = |\varphi_{1,2}^{(n)}|^2, \quad E_3 = |\varphi_3|^2$$

Отсюда вытекает, что если в начальный момент времени энергия волны $\varphi_1^{(n)}$ была много больше энергии волн $\varphi_2^{(n)}$ и φ_3 , т.е. выполнялось $E_1^{(n),0} \gg E_2^{(n),0}$ и $E_1^{(n),0} \gg E_3^0$, то с



Фиг. 3. Результаты численного расчета совместного взаимодействия двух резонансных триад при $\kappa^{(1)} = 1$ и $\kappa^{(2)} = 0,1$ (а, б), $\kappa^{(2)} = 0,8$ (в, з): зависимость амплитуд вторичных волн $|\varphi_{1,2}^{(1)}|$ (кривые 1) и $|\varphi_{1,2}^{(2)}|$ (кривые 2) от времени (а, в), зависимость амплитуды волны накачки $|\varphi_3|$ от времени (б, з)

течением времени энергия $E_1^{(n)}$ не может стать меньше разности $E_1^{(n),0} - E_2^{(n),0}$. Если же в начальный момент времени энергия волны φ_3 была много больше энергии волн $\varphi_{1,2}^{(n)}$, т.е. выполнялось $E_3 \ll E_{1,2}^{(n),0}$, то с течением времени энергия E_3 может уменьшиться до нуля за счет увеличения энергии вторичных волн.

Рассмотрим для примера случай $N = 2$. Из (2.5) следует система уравнений

$$\frac{d}{dT} E_{1,2}^{(1)} = 2\kappa^{(1)} \sin M^{(1)} \sqrt{E_1^{(1)} E_2^{(1)} E_3}, \quad \frac{d}{dT} E_{1,2}^{(2)} = 2\kappa^{(2)} \sin M^{(2)} \sqrt{E_1^{(2)} E_2^{(2)} E_3} \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dT} E_3 = -2\kappa^{(1)} \sin M^{(1)} \sqrt{E_1^{(1)} E_2^{(1)} E_3} - 2\kappa^{(2)} \sin M^{(2)} \sqrt{E_1^{(2)} E_2^{(2)} E_3}$$

$$\frac{d}{dT} M^{(1)} = \kappa^{(1)} \frac{E_1^{(1)} E_3 + E_2^{(1)} E_3 - E_1^{(1)} E_2^{(1)}}{\sqrt{E_1^{(2)} E_2^{(2)} E_3}} \cos M^{(1)} - \kappa^{(2)} \sqrt{\frac{E_1^{(1)} E_2^{(1)}}{E_3}} \cos M^{(2)}$$

$$\frac{d}{dT} M^{(2)} = \kappa^{(2)} \frac{E_1^{(2)} E_3 + E_2^{(2)} E_3 - E_1^{(2)} E_2^{(2)}}{\sqrt{E_1^{(2)} E_2^{(2)} E_3}} \cos M^{(2)} - \kappa^{(1)} \sqrt{\frac{E_1^{(1)} E_2^{(1)}}{E_3}} \cos M^{(1)}$$

$$M^{(1)} = \arg \varphi_3 - \arg \varphi_1^{(1)} - \arg \varphi_2^{(1)}, \quad M^{(2)} = \arg \varphi_3 - \arg \varphi_1^{(2)} - \arg \varphi_2^{(2)}$$

Система уравнений (3.1) решалась численно. Полагалось $\kappa^{(1)} = 1$. На фиг. 3, а, б представлено решение (3.1) с начальными условиями $E_{1,2}^{(1)} = 0,01$, $E_{1,2}^{(2)} = 0,01$, $E_3 = 1$ $M^{(1)} = M^{(2)} = 0$ при $\kappa^{(2)} = 0, 1$. Видно, что решение представляет суперпозицию высокочастотных колебаний, обусловленных свойствами 1-й резонансной триады, и низкочастотных колебаний второй резонансной триады. Волна накачки φ_3 принимает участие в высокочастотных колебаниях, амплитуда которых имеет низкочастотную модуляцию. В начальный момент времени амплитуды волн $\varphi_{1,2}^{(1)}$ и $\varphi_{1,2}^{(2)}$ малы. Характерное время роста амплитуды волн $\varphi_{1,2}^{(1)}$ много меньше времени роста амплитуд $\varphi_{1,2}^{(2)}$. Поэтому на начальных этапах движения значительная часть энергии

накачки передается вторичным волнам первой резонансной триады, а энергия вторичных волн второй триады остается незначительной.

На фиг. 3, *в*, *г* представлено решение системы уравнений (3.1) при $\kappa^{(2)} = 0,8$ с теми же начальными условиями, что и на фиг. 3. Видно, что амплитуды вторичных волн обеих резонансных триад нарастают приблизительно за одинаковое время за счет уменьшения энергии волны накачки.

Рассмотрим задачу о распространении периодической волны W в зашумленной среде. Шум состоит из волн малой амплитуды различных частот. Волна W будет выбирать и усиливать шумовые гармоники, являющиеся по отношению к ней вторичными волнами. Волна W может быть волной накачки если ее волновое число $k_W > k_{\min}$. Если $k_W < k_{\min}$, то волна W не может быть волной накачки и квадратичные взаимодействия с резонансными шумовыми гармониками не приводят к существенному изменению амплитуды этой волны на временах порядка ε^{-1} . Далее будет показано, что исключение составляет точка генерации второй гармоники $k_W = k_{\min}/2$.

Процесс усиления шумовых гармоник будет описываться системой уравнений (2.5), где волны $\phi_{1,2}^{(n)}$ являются в начальный момент времени шумовыми и имеют малые амплитуды и функция $\phi_3(T)$ равна амплитуде волны W . Среди всех резонансных с накачкой ϕ_3 шумовых гармоник в первую очередь усилятся те гармоники, которым соответствуют экстремальные коэффициенты $\kappa^{(n)}$.

Как отмечалось выше, для заданного волнового числа волны накачки $k_W \equiv k_3 > k_{\min}$ коэффициент $\kappa(\alpha)$ может иметь два или три максимума в зависимости от положения точки касания кривой $k = k_W$ с кривой $\kappa(\alpha, \theta) = \text{const}$ на фиг. 2. Если волновое число $k_W < k_{\text{cr}}^1$, то точка касания лежит левее кривой l_3 (см. фиг. 2, *б*) и имеется два одинаковых максимума. В этом случае волна W в первую очередь усиливает резонансные шумовые гармоники вторичных волн с волновыми векторами, параллельными k_W .

Если волновое число достаточно велико ($k_W > k_{\text{cr}}^2$), то в первую очередь усиливаются резонансные шумовые гармоники вторичных волн, волновые векторы которых составляют с k_W ненулевой угол. Величина этого угла равна вертикальной координате точки касания кривой $k = k_W$ с соответствующей кривой $\kappa(\alpha, \theta) = \text{const}$ (см. фиг. 2, *б*, *г*). В промежуточной области $k_W \in (k_{\text{cr}}^1, k_{\text{cr}}^2)$, где значения $\kappa(\alpha)$ в максимумах сравнимы, возможно усиление и попутных гармоник и гармоник, распространяющихся под ненулевым углом к накачке.

Рассмотрим точные решения уравнений (3.1), описывающие генерацию волны накачки при взаимодействии вторичных волн с одинаковыми амплитудами. Положим

$$E_1^{(1)} = E_2^{(1)} = E^{(1)}, \quad E_1^{(2)} = E_2^{(2)} = E^{(2)}$$

$$M^{(1)} = M^{(2)} = \frac{\pi}{2}, \quad \kappa^{(1)} = 1$$

Тогда из уравнений (3.1) вытекает

$$\frac{d}{dT} E^{(1)} = 2E^{(1)} \sqrt{D - E^{(1)} - C(E^{(1)})^\kappa} \quad (3.2)$$

$$E^{(2)} = C(E^{(1)})^\kappa, \quad E^{(1)} + E^{(2)} + E_3 = D$$

$$\kappa = \kappa^{(2)}, \quad C = \text{const}, \quad D = \text{const}$$

Если $\kappa > 0$, то формулы (3.2) описывают процесс, при котором происходит полная

передача энергии вторичных волн $\Phi_{1,2}^{(1)}$ и $\Phi_{1,2}^{(2)}$ волне накачки Φ_3 за бесконечное время. При $\kappa < 0$ формулы (3.2) описывают периодический процесс энергетического обмена между гармониками.

Полагая $M^{(2)} = -\pi/2$, можно получить аналогичные (3.2) формулы, описывающие генерацию накачки вторичными волнами при $\kappa < 0$. Легко видеть, что решения, аналогичные (3.2), могут быть построены и в случае произвольного числа резонансных триад.

В случае, когда $\Phi_1 = \Phi_2$, формулы (3.2) описывают процесс генерации второй гармоники. Как отмечалось выше, волна с волновым числом $k = k_{\min}/2$ является исключением в том смысле, что она передает свою энергию за время порядка ϵ^{-1} своей второй гармонике, даже если амплитуда второй гармоники равна нулю в начальный момент времени.

Заключение. Показано, что причиной неустойчивости периодической изгибно-гравитационной волны W с волновым числом $k_W > k_{\min}$ может быть трехволновой резонанс с шумовыми гармониками. Волновое число k_{\min} удовлетворяет соотношению $\omega(k_{\min}) = 2\omega(k_{\min}/2)$, где $\omega = \omega(k)$ – дисперсионное соотношение линейного приближения, и зависит от жесткости упругой пластины и глубины жидкости.

При $k_W \in (k_{\min}, k_{\text{cr}}^1)$ наибольшее усиление за счет обмена энергией с волной W получают две попутные шумовые гармоники, находящиеся в трехволновом резонансе с волной W . При $k_W > k_{\text{cr}}^2$ экстремально усиливаются две шумовые гармоники, находящиеся в трехволновом резонансе с волной W , волновые векторы которых составляют ненулевой угол с волновым вектором \mathbf{k}_W . В промежуточной области $k_W \in (k_{\text{cr}}^1, k_{\text{cr}}^1)$ усиливаются две попутные гармоники и две гармоники, волновые векторы которых составляют ненулевой угол с \mathbf{k}_W . Характерное время этих процессов порядка ϵ^{-1} . Величины $k_{\text{cr}}^{1,2}$ зависят от жесткости упругой пластины и глубины жидкости.

При $k_W = k_{\min}/2$ волна W неустойчива по причине обмена энергией со своей второй гармоникой за время порядка ϵ^{-1} .

Если $k_W \in (0, k_{\min})$ и $k_W \neq k_{\min}/2$, то причиной неустойчивости волны W могут быть четырехволновые взаимодействия и дисперсионные эффекты, проявляющиеся на временах порядка $O(\epsilon^{-2})$. Частными случаями кубических взаимодействий являются генерация третьей гармоники и самовоздействие волны. Взаимное влияние самовоздействия и дисперсии приводит к хорошо известной в теории гравитационных волн неустойчивости Бенджамена – Фейра [6, 10], которая может иметь в рассматриваемом случае свои особенности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-010-1746) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза и Российского фонда фундаментальных исследований (INTAS-RFBR 95-0435).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каур D.J., Reiman A.H., Bers A. Space-time evolution of nonlinear three-wave interactions I // Rev. Mod. Phys. 1979. V. 51. № 2. P. 275–309.
2. Djordjevic V.D., Redecopp L.J. On two-dimensional packets of capillary-gravity waves // J. Fluid Mech. 1977. V. 79. Pt 4. P. 703–714.
3. Craik A.D.D. Wave interactions and fluid flows. Cambridge: Univ. Press, 1985. 322 p.
4. Марченко A.B. О резонансном возбуждении волн в тяжелой жидкости под вязкоупругой пластиной // ПМТФ. 1991. № 3. С. 101–109.

5. *Марченко А.В., Шрира В.И.* К теории двумерных нелинейных волн в жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 4. С. 125–133.
6. *Benjamin T.B., Feir J.F.* The disintegration of wave trains on deep water. Pt 1 // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. Pt. 3. P. 417–430.
7. *Захаров В.Е.* Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // ПМТФ. 1968. № 2. С. 86–94.
8. *Марченко А.В.* О гамильтоновом подходе к исследованию потенциальных движений идеальной жидкости // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 102–108.
9. *Уизем Дж.Б.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
10. *Юэн Г., Лэйк Б.* Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. М.: Мир, 1987. 179 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.VIII.1997