МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1999

УДК 532.582.33

© 1999 г. М.В. НОРКИН

ВЕРТИКАЛЬНЫЙ УДАР ПО ТВЕРДОМУ ТЕЛУ, ПЛАВАЮЩЕМУ НА ПОВЕРХНОСТИ СЛОЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Найдены асимптотики для больших глубин важнейших характеристик удара – присоединенной массы и присоединенных моментов инерции. Конкретные расчетные формулы приводятся для шара и вырожденного тора – твердого тела, полученного вращением окружности вокруг своей касательной.

Предложен алгоритм построения степенного асимптотического разложения для больших глубин, позволяющий на основании известного решения задачи об ударе по телу, погруженному в жидкое полупространство, строить приближенное решение задачи об ударе по тому же телу, погруженному в слой жидкости конечной глубины.

Характерной чертой найденных асимптотик является то, что в формулах для присоединенных масс коэффициенты при главных членах явно выражаются через основные характеристики удара по телу, погруженному в жидкое полупространство, и, следовательно, для определения этих коэффициентов не требуется решения новых краевых задач.

В качестве приложений рассмотрены задачи о вертикальном ударе по вырожденному тору и шару, полупогруженных в слой жидкости конечной глубины.

Ранее асимптотика для больших глубин строилась в задаче об ударе круглого диска о слой идеальной несжимаемой жидкости [1]. Аналогичная задача в случае малой глубины жидкости изучена в [2]. В статье [3] предложен алгоритм построения асимптотики при ударе произвольного плоского тела о жидкость малой глубины.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача о вертикальном ударе по твердому телу, плавающему на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины h.

Будем предполагать, что смоченная поверхность тела имеет две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии xz и yz. Оси x и y лежат в плоскости свободной поверхности, ось z направлена в глубь жидкости. При определении младших членов асимптотики присоединенной массы делается еще одно упрощающее предположение – рассматриваются тела вращения (см. разд. 2).

Потенциал скоростей Φ, приобретенных частицами жидкости в результате удара, определяется решением смешанной задачи теории потенциала в области, занятой жидкостью [4–5]

$$\Delta\Phi = 0$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_1} = V_0 n_z + \omega_x(yn_z - zn_y) + \omega_y(zn_x - xn_z) \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=h} = 0, \quad \Phi|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad \Phi|_\infty = 0$$

Здесь $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ – смоченная поверхность тела и свободная поверхность жидкости, n_x, n_y, n_z – проекции вектора внешней нормали к поверхности тела на оси декартовых координат, V_0, ω_x, ω_y – поступательная и угловые скорости тела.

Вначале рассмотрим задачу о центральном ударе по твердому телу. Полагаем $\rho = 1$, $V_0 = 1$, $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$.

2. Центральный удар. В основе применяемой методики лежит, во-первых, классический метод последовательных приближений (Stokes, 1843 и др., см., например, [6]) и, во-вторых, идея переразложения полученных приближений в ряды по степеням малого параметра [1].

Суть применяемого метода состоит в том, чтобы поочередно рассматривать случай $h = \infty$ (полупространство с твердым телом) и задачу в слое при отсутствии тела. При этом каждый раз ликвидируются невязки, возникающие на дне и соответственно на смоченной поверхности твердого тела. После разложения полученных приближений в ряды по степеням h^{-1} и удержания необходимого количества членов приходим к асимптотике для больших h. Теперь более подробно.

Потенциал скоростей Φ разыскиваем в виде ряда

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \ldots \tag{2.1}$$

В качестве первого приближения Φ_1 возьмем решение задачи об ударе по телу, погруженному в жидкость бесконечной глубины. Для потенциала Φ_1 на больших расстояниях от тела справедливо разложение в гармонический ряд [5–6]

$$\Phi_1 = -\frac{(m_\infty + V)z}{2\pi R^3} + \frac{P_3(x,y,z)}{R^7} + \frac{P_5(x,y,z)}{R^{11}} + \ldots + \frac{P_{2n-1}(x,y,z)}{R^{4n-1}} + \ldots \tag{2.2}$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

где V – объем погруженной части тела, m_∞ – присоединенная масса в случае $h = \infty$, P_n – однородный гармонический полином степени n.

Для коэффициентов полинома P_n имеется явное выражение через интегралы по смоченной поверхности тела. Причем одни из них содержат потенциал Φ_1, а другие при помощи формулы Гаусса–Остроградского сводятся к объемным интегралам, например

$$P_3(x,y,z) = -\frac{3z}{4\pi}\{(4x^2 - y^2 - z^2)C_1 + (4y^2 - x^2 - z^2)C_2 + (2z^2 - 3x^2 - 3y^2)C_3\}$$

$$C_1 = \iiint\limits_V x^2 dV - 2\iint\limits_{\partial\Omega_1} xzn_x\Phi_1 ds - \iint\limits_{\partial\Omega_1} x^2 n_z \Phi_1 ds$$

$$C_2 = \iiint\limits_V y^2 dV - 2\iint\limits_{\partial\Omega_1} yzn_y\Phi_1 ds - \iint\limits_{\partial\Omega_1} y^2 n_z \Phi_1 ds, \quad C_3 = \iiint\limits_V z^2 dV - \iint\limits_{\partial\Omega_1} z^2 n_z \Phi_1 ds$$

В разложении (2.2) отсутствуют полиномы четной степени. Равенство нулю этих полиномов следует из нечетности потенциала Φ_1 по переменной z и его четности по переменным x и y. Первое вызвано возможностью продолжить потенциал Φ_1 нечетным образом через свободную поверхность в верхнее полупространство, а второе следует из сделанного выше предположения о наличии у смоченной поверхности тела двух взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии xz и yz.

В дальнейшем, чтобы избежать громоздких вычислений, ограничимся случаем тел вращения. Однако, как можно показать, полученная для второго члена асимптотики присоединенной массы формула будет верна и в общем случае. При сделанных предположениях формула для $P_3(x, y, z)$ принимает вид

$$P_3(x,y,z) = -\frac{3Cz}{4\pi}(3r^2 - 2z^2), \quad C = C_1 - C_3, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Потенциал Φ_1 оставляет невязку на дне при $z = h$. С целью удовлетворить граничному условию при $z = h$ (1.1) придем для определения Φ_2 к смешанной осесимметричной задаче в слое при отсутствии тела

$$\Delta\Phi_2 = 0, \quad \Phi_2\big|_{z=0} = 0, \quad \Phi_2\big|_{\infty} = 0 \tag{2.3}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right|_{z=h} = -\frac{(m_\infty + V)}{2\pi}\frac{(2h^2 - r^2)}{(h^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{3C(3r^4 - 24r^2h^2 + 8h^4)}{4\pi(h^2 + r^2)^{9/2}}$$

Здесь ограничились первыми двумя членами ряда (2.2), остальные члены дают вклад в потенциал Φ порядка $O(h^{-7})$ при $h \to \infty$. Решение задачи (2.3) имеет вид

$$\Phi_2 = \frac{1}{2\pi h^2}\int_0^\infty\left(\frac{C}{2h^2}\lambda^2 - (m_\infty + V)\right)\frac{\lambda e^{-\lambda}}{\operatorname{ch}\lambda}\operatorname{sh}\frac{\lambda z}{h}J_0\left(\frac{\lambda r}{h}\right)d\lambda \tag{2.4}$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода. Разложим Φ_2 как функцию параметра $\varepsilon = 1/h$ по формуле Тейлора с центром в точке $\varepsilon = 0$ ($h = \infty$)

$$\Phi_2 = -\frac{3(m_\infty + V)}{16\pi}\frac{\zeta(3)}{h^3}z - \frac{15(m_\infty + V)}{128\pi}\frac{\zeta(5)}{h^5}\left(z^3 - \frac{3}{2}r^2 z\right) +$$

$$+\frac{45C}{128\pi}\frac{\zeta(5)}{h^5}z + h^{-7}f(x,y,z,h), \quad \zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha} \tag{2.5}$$

Здесь f и ее первые производные по x, y, z являются ограниченными функциями, когда x, y, z изменяются в некоторой окрестности смоченной поверхности тела, а $h \geqslant h_0$, где h_0 – некоторое большое положительное число. При выводе (2.5) была использована формула [7, с. 363]

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}e^{-cx}}{\operatorname{ch} cx}dx = \frac{2^{1-\alpha}}{c^\alpha}(1 - 2^{1-\alpha})\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha), \quad \operatorname{Re}\alpha, \quad \operatorname{Re}c > 0$$

где $\zeta(\alpha)$ – дзета-функция Римана, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-фунция Эйлера.

Теперь нужно погасить появившиеся нормальные компоненты потенциала Φ_2 на смоченной поверхности тела. Для этого снова рассмотрим полупространство с твердым телом. Пренебрегая в формуле (2.5) остаточным членом, приходим для определения Φ_3 к краевой задаче

$$\Delta\Phi_3 = 0, \quad \Phi_3\big|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad \Phi_3\big|_{\infty} = 0$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_1} = \frac{3(m_\infty + V)}{16\pi}\frac{\zeta(3)}{h^3}n_z + \frac{45(m_\infty + V)}{128\pi}\frac{\zeta(5)}{h^5}\left[\left(z^2 - \frac{r^2}{2}\right)n_z - zrn_r\right] - \frac{45C}{128\pi}\frac{\zeta(5)}{h^5}n_z$$

В соответствии с последним граничным условием потенциал Φ_3 представляется в виде суммы трех слагаемых. Первое и третье из этих слагаемых отличаются от Φ_1 только постоянным множителем. Если прервать здесь процесс последовательных приближений, то сумма первых трех членов ряда (2.1) даст для потенциала Φ второй и третий члены асимптотики (порядка h^{-3} и h^{-5}). Продолжив процесс дальше, найдем также и четвертый член (порядка h^{-6}). Поскольку рассуждения здесь повторяются (снова рассматривается задача для слоя при отсутствии тела и случай $h = \infty$), приведем лишь окончательное выражение для потенциала Φ на смоченной поверхности тела

$$\Phi \sim \Phi_1 + \frac{3(m_\infty + V)}{16\pi}\frac{\zeta(3)}{h^3}(\Phi_1 - z) + \frac{45(m_\infty + V)}{128\pi}\frac{\zeta(5)}{h^5}\left(\upsilon - \frac{z^3}{3} + \frac{r^2 z}{2}\right) -$$

$$-\frac{45C}{128\pi}\frac{\zeta(5)}{h^5}(\Phi_1 - z) + \frac{9(m_\infty + V)^2}{256\pi^2}\frac{\zeta^2(3)}{h^6}(\Phi_1 - z), \quad h \to \infty \tag{2.6}$$

Здесь функция v является решением краевой задачи

$$\Delta v = 0, \quad v|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad v|_\infty = 0$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_1} = \left(z^2 - \frac{r^2}{2}\right)n_z - zrn_r$$

Следующее приближение добавит члены порядка $O(h^{-7})$ при $h \to \infty$. Если при определении потенциала Φ_2 (2.3) не ограничиваться только первыми двумя членами ряда (2.2), а учесть и другие его члены, то процесс последовательных приближений можно будет продолжить, рассматривая поочередно случай $h = \infty$ и задачу в слое при отсутствии тела.

На основании формулы (2.6) найдем присоединенную массу m при ударе. Умножая обе части (2.6) на функцию $-n_z$, интегрируя полученное равенство по смоченной поверхности твердого тела, преобразуя затем интегралы, не содержащие функций Φ_1 и v, в объемные, а интеграл от vn_z в интеграл от $\Phi_1 \partial v/\partial n$, используя при этом формулы Гаусса – Остроградского и интегрирования по частям, получим для присоединенной массы асимптотическую формулу

$$m = m_\infty + \frac{3(m_\infty + V)^2}{16\pi}\frac{\zeta(3)}{h^3} + \frac{45(m_\infty + V)q}{64\pi}\frac{\zeta(5)}{h^5} +$$

$$+\frac{9(m_\infty + V)^3}{256\pi^2}\frac{\zeta^2(3)}{h^6} + O(h^{-7}), \quad h \to \infty \tag{2.7}$$

$$q = \iiint_V (z^2 - x^2)dV - \iint_{\partial\Omega_1} (z^2 - x^2)n_z\Phi_1 ds + 2\iint_{\partial\Omega_1} xzn_x\Phi_1 ds \tag{2.8}$$

Вторые члены асимптотик (2.6) и (2.7) верны для тел произвольной формы без предположений симметрии. При наличии двух плоскостей симметрии третьи члены асимптотик потенциала скоростей и присоединенной массы есть величины порядка $O(h^{-5})$ при $h \to \infty$. Третьи и четвертые члены в формулах (2.6) и (2.7) найдены только для тел вращения.

Предположим, что решена задача о центральном ударе по телу вращения, погруженному в жидкое полупространство. Тогда при ударе по тому же телу, погруженному в слой жидкости конечной глубины, согласно (2.7), второй и четвертый члены асимптотики присоединенной массы можно считать известными. Для определения третьего члена асимптотики необходимо вычислить поверхностные интегралы, содержащие потенциал скоростей Φ_1. В случае круглого диска, шара и эллипсоида вращения эта задача решается просто, так как для каждого из названных тел функция Φ_1 на смоченной поверхности тела имеет элементарный вид. Для таких тел, как сферическая луночка, поверхности вращения веретенообразной формы, вырожденный тор, где потенциал Φ_1 на смоченной поверхности тела выражается через интегралы от элементарных или специальных функций, вычисление постоянной q сопряжено с некоторой технической работой.

3. Вращение. По аналогии решается задача о нецентральном ударе. Рассмотрим сначала случай вращательного движения тела вокруг оси y с угловой скоростью $\omega_y = 1$ ($V_0 = 0$, $\omega_x = 0$). Потенциал Φ разыскиваем в виде ряда (2.1), где в качестве первого приближения Φ_1 выбирается решение задачи, соответствующее бесконечно глубокой жидкости. Асимптотика потенциала Φ_1 на бесконечности имеет вид $\Phi_1 \sim (3C_y xz)/ /(2\pi R^5)$, где C_y определяется по формуле (3.4). Повторяя рассуждения предыдущего параграфа будем поочередно рассматривать случай $h = \infty$ и задачу для слоя при отсутствии тела, ликвидируя возникающие невязки. В результате найдем асимптотику потенциала Φ на смоченной поверхности тела

$$\Phi \sim \Phi_1 + \frac{45C_y}{128\pi}\frac{\zeta(5)}{h^5}xz + \frac{45C_y}{128\pi}\frac{\zeta(5)}{h^5}\upsilon_y, \quad h \to \infty$$

где функция υ_y – решение краевой задачи

$$\Delta\upsilon_y = 0, \quad \left.\frac{\partial\upsilon_y}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_1} = -(zn_x + xn_z), \quad \upsilon_y\big|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad \upsilon_y\big|_\infty = 0$$

Точно также рассматривается вращательное движение тела вокруг оси x с угловой скоростью $\omega_x = 1$ ($V_0 = 0$, $\omega_y = 0$). Асимптотика потенциала Φ на смоченной поверхности тела имеет вид

$$\Phi \sim \Phi_1 + \frac{45C_x}{128\pi}\frac{\zeta(5)}{h^5}yz + \frac{45C_x}{128\pi}\frac{\zeta(5)}{h^5}\upsilon_x, \quad h \to \infty$$

Здесь Φ_1 – решение задачи в случае $h = \infty$, C_x определяется по формуле (3.3), функция υ_x находится из следующей краевой задачи:

$$\Delta\upsilon_x = 0, \quad \left.\frac{\partial\upsilon_x}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_1} = -(zn_y + yn_z), \quad \upsilon_x\big|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad \upsilon_x\big|_\infty = 0$$

Приведем окончательные формулы для присоединенных моментов инерции J_x и J_y, соответствующих вращательному движению тела вокруг осей x и y

$$J_x = J_{x\infty} + \frac{45C_x^2}{128\pi}\frac{\zeta(5)}{h^5} + O\left(h^{-7}\right), \quad h \to \infty \tag{3.1}$$

$$J_y = J_{y\infty} + \frac{45C_y^2}{128\pi}\frac{\zeta(5)}{h^5} + O\left(h^{-7}\right), \quad h \to \infty \tag{3.2}$$

$$C_x = \int\limits_{\partial\Omega_1}\!\!\int (zn_y + yn_z)\Phi_1^2 ds - \iiint\limits_V \left(y^2 - z^2\right)dV, \tag{3.3}$$

$$C_y = \int\limits_{\partial\Omega_1}\!\!\int (zn_x + xn_z)\Phi_1^3 ds - \iiint\limits_V \left(z^2 - x^2\right)dV \tag{3.4}$$

Через Φ_1^2 и Φ_1^3 обозначены потенциалы вращательного движения вокруг осей x и y в случае бесконечно глубокой жидкости. При ударе плоского тела о слой жидкости конечной глубины формулы (3.1)–(3.4) упрощаются. В частности, имеем $C_y^2 = J_{y\infty}^2$, $C_x^2 = J_{x\infty}^2$.

4. Решение задач для вырожденного тора и шара. Применим изложенный выше метод для решения задачи о вертикальном ударе по вырожденному тору, наполовину погруженному в слой жидкости конечной глубины.

Используя выражение для потенциала Φ_1 на смоченной поверхности вырожденного тора (формула (2.5) из [8]) найдем по (2.8) постоянную q. Затем, учитывая выражение для присоединенной массы в случае бесконечно глубокой жидкости (формула (2.6) из [8]), на основании (2.7) придем к асимптотике

$$m = \rho a^3\left[\nu + \frac{3\left(\nu+\pi^2\right)^2\zeta(3)}{16\pi}\alpha^3 - \frac{15\left(\nu+\pi^2\right)\nu_1\zeta(5)}{8\pi}\alpha^5 + \right.$$

$$+\frac{9\left(\nu+\pi^2\right)^3\zeta^2(3)}{256\pi^2}\alpha^6+O\left(a^7\right)\Bigg],\quad \alpha=\frac{a}{h}\to 0$$

$$\nu=-\pi^2+8\int\limits_0^\infty\frac{\lambda^2K_1(\lambda)d\lambda}{I_1(\lambda)},\quad \nu_1=\int\limits_0^\infty\frac{\lambda^4K_1(\lambda)d\lambda}{I_1(\lambda)} \qquad (4.1)$$

где a – радиус круга поперечного сечения тора, $q=-\frac{8}{3}a^5\nu_1$, $\nu\approx 10,157$, $I_1(\lambda)$ и $K_1(\lambda)$ – модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода. После вычисления коэффициентов в последнем разложении получим

$$m=\rho a^3\nu[1+2{,}833\,\alpha^3-4{,}603\,\alpha^5+4{,}070\,\alpha^6+O(\alpha^7)],\ \alpha\to 0$$

Применим формулы (3.1) и (3.2) для определения присоединенного момента инерции вырожденного тора. Используя результаты [8], сведем задачу определения постоянной C_y к вычислению интеграла

$$C_y=a^5\left[\frac{8\pi}{5}\int\limits_0^\infty\mu^2h(\mu)I_1(\mu)\frac{\frac{4}{3}\mu K_0(\mu)+K_1(\mu)}{\left(\mu I_0(\mu)-I_1(\mu)\right)}d\mu+\frac{5\pi^2}{8}\right]$$

где функция $h(\mu)$ является решением интегрального уравнения (3.4) из [8]. Численное значение $C_y\approx 10{,}429\,a^5$. Окончательно имеем асимптотическую формулу

$$J=\rho a^5\gamma[1+\gamma_1\alpha^5+O(\alpha^7)],\ \alpha\to 0$$

Здесь $\gamma\approx 2{,}728$ [8], $\gamma_1\approx 4{,}626$, $J=J_y=J_x$.

Условие безотрывности удара для вырожденного тора заключается в определении круга на плоскости свободной поверхности жидкости, причем такого, что если точка приложения внешнего ударного импульса лежит в этом круге, то вертикальный удар по вырожденному тору к отрыву жидкости от тела не приводит. В противном случае возникает отрыв. В полной аналогии с [8] выводится необходимое и достаточное условие безотрывности удара (массой и моментом инерции тора пренебрегаем)

$$|x_0|\leqslant ka\left[1+k_1\alpha^3+O\left(\alpha^5\right)\right],\quad \alpha\to 0 \qquad (4.2)$$

где x_0 – точка приложения импульса, $k\approx 0{,}36$, $k_1\approx 0{,}46$. Для бесконечной глубины радиус круга безотрывного удара равен ka. В случае конечной глубины, как следует из (4.2), этот круг увеличивается. Полученный результат интересно сравнить с [1–2], где для круглого диска был сделан вывод об уменьшении круга безотрывного удара при уменьшении глубины жидкости.

В задаче о вертикальном ударе по шару радиуса a, полупогруженному в жидкость конечной глубины, процесс последовательных приближений был продолжен и найдены еще несколько членов асимптотики. Для присоединенной массы выполняется разложение

$$m=\rho a^3\left[\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi\zeta(3)}{16}\alpha^3+\frac{9\pi\zeta^2(3)}{256}\alpha^6+\frac{27\pi\zeta^3(3)}{4096}\alpha^9+\right.$$

$$\left.+\frac{675\pi\zeta^2(5)}{32768}\alpha^{10}+\frac{81\pi\zeta^4(3)}{65536}\alpha^{12}+O\left(\alpha^{13}\right)\right],\quad \alpha=\frac{a}{h}\to 0 \qquad (4.3)$$

Здесь проведено сравнение с численными результатами в [9]. Так, например, когда $\alpha=a/h=2/3$ величина $m/m_\infty\approx 1{,}215981$ [9], а по формуле (4.3) $m/m_\infty\approx 1{,}215827$. При $\alpha=$ $=1/2$ имеем соответственно 1,087038 и 1,087035, при $\alpha=2/5$ – 1,043915 и 1,043914 и т.д.

5. Асимптотики для других границ. Предложенный в работе метод может быть с успехом применен для решения задач об ударе в случае дна и стенок различной формы. Рассмотрим задачу о центральном ударе по твердому телу, плавающему на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, заключенной в полубесконечном круговом цилиндре радиуса b. Предположения симметрии, сделанные в разд. 1, сохраняются и здесь. Считаем, что начало координат лежит на оси цилиндра.

Применяя изложенный выше метод, будем поочередно рассматривать случай $b = \infty$ и задачу в полубесконечном цилиндре при отсутствии тела, ликвидируя возникающие невязки. Приведем только окончательный результат – асимптотику присоединенной массы

$$m = m_\infty + \frac{(m_\infty + V)^2 \xi_1}{\pi^2 b^3} + \frac{(m_\infty + V)\xi_2 C}{\pi^2 b^5} + \frac{(m_\infty + V)^3 \xi_1^2}{\pi^4 b^6} + O\left(b^{-7}\right), \quad b \to \infty \tag{5.1}$$

Здесь $C = -\,\mathrm{q}$, $\xi_1 = (\nu + \pi^2)/8$, $\xi_2 = \nu_1$ (формулы (2.8), (4.1)).

Рассмотрим также задачу о центральном ударе по телу, плавающему на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной вертикальной плоской стенкой. Так же, как и в предыдущих задачах, будем предполагать, что смоченная поверхность тела имеет две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии. Считаем, что одна из этих плоскостей, например yz, параллельна стенке и $x = h$ – расстояние от плоскости yz до стенки. Для присоединенной массы справедлива асимптотическая формула

$$m = m_\infty + \frac{(m_\infty + V)^2}{16\pi h^3} + \frac{9(m_\infty + V)C}{64\pi h^5} + \frac{(m_\infty + V)^3}{256\pi^2 h^6} + O\left(h^{-7}\right), \quad h \to \infty \tag{5.2}$$

В формулах (5.1)–(5.2) вторые члены асимптотик справедливы при общих предположениях, а третьи и четвертые члены – для тел вращения.

Важно отметить, что при вычислении коэффициентов в формулах (5.1)–(5.2) необходимо определить те же постоянные m_∞, V, q, что и в формуле (2.7). Таким образом, если найдены коэффициенты асимптотики присоединенной массы при учете влияния дна, то легко делается пересчет и на случай стенок.

Заключение. Получены простые асимптотические формулы, которые будут полезны для инженерных расчетов.

Существенным достоинством найденных асимптотик является то, что коэффициенты при их старших членах явно выражаются через основные характеристики удара по телу, погруженному в жидкое полупространство, и, следовательно, для определения этих коэффициентов не требуется решения новых краевых задач.

Найденные формулы можно комбинировать, получая решения новых гидромеханических задач. Так, например, используя (5.2) и первые два члена асимптотики (2.7), можно рассмотреть задачу о центральном ударе по двум одинаковым телам вращения, погруженным в слой жидкости конечной глубины.

Изложенный при учете влияния дна и стенок метод может быть применен для решения некоторых других смешанных задач математической физики. К ним относятся задачи электростатики, теплопроводности, ряд контактных задач теории упругости. В частности, отметим задачу о кручении упругого слоя, вызванного поворотом осесимметричного штампа, сцепленного с этим слоем. Если нижняя граничная плоскость слоя закреплена, то указанная задача гидродинамически эквивалентна задаче о центральном ударе по телу вращения, плавающему на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. Для касательных напряжений, возникающих на площадке контакта штампа с упругим слоем, и крутящего момента можно получить формулы, аналогичные (2.6) и (2.7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И.И., Юдович В.И.* Удар круглого диска о жидкость конечной глубины // ПММ. Т. 21. Вып. 4. 1957. С. 525–532.
2. *Чебаков М.И.* Удар круглого диска о жидкость малой глубины // ПММ. Т. 38. Вып. 4. 1974. С. 675–681.
3. *Рохлин Д.Б.* Удар плоского тела о жидкость малой глубины // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. 2-й Междунар. конф., Ростов-на-Дону, 1996 / Под ред. И.И. Воровича. Ростов-на-Дону: МП "Книга", 1996. Т. 2. 200 с.
4. *Седов Л.И.* Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости // Тр. ЦАГИ. 1934. Вып. 187. 26 с.
5. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
6. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
7. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
8. *Норкин М.В.* Удар вырожденного тора о жидкость бесконечной глубины // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 5. С. 161–165.
9. *Ворович Л.С.* Вертикальный удар шара, погруженного в жидкость конечной глубины // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 4. С. 101–113.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
10.VII.1997