

УДК 532.546

© 1999 г. В.В. КАДЕТ, Д.Г. ПОЛОНСКИЙ

ЗАКОН ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИОННЫХ ПОТЕРЬ

На основе использования теории перколяции получен макроскопический закон течения вязкопластической жидкости Шведова – Бингама в пористой среде с учетом вязкостных и инерционных потерь. Проведена оценка асимптотик закона течения, даны выражения для определения предельного градиента давления в зависимости от параметров микронеоднородности. Получено удовлетворительное качественное совпадение между представленными теоретическими и известными экспериментальными данными.

В [1] методами теории перколяции был получен нелинейный закон течения ньютоновской жидкости, учитывающий инерционные гидравлические потери при внезапных сужениях и расширениях капилляров. Величина гидравлической проводимости пористой среды с учетом вязкопластических свойств насыщающей ее жидкости, но без учета инерционных потерь при движении, определялась в [2]. В настоящей работе выводится нелинейный закон течения в пористой среде вязкопластической жидкости Шведова – Бингама общего вида с учетом вязкостных и инерционных потерь. Получены асимптотики закона течения и зависимость предельного градиента давления от параметров микронеоднородности. Показано, что асимптотика закона течения при малых перепадах давления является линейной формой известного закона фильтрации с предельным градиентом [3, 4]. Проведено сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными, получено удовлетворительное качественное совпадение между ними.

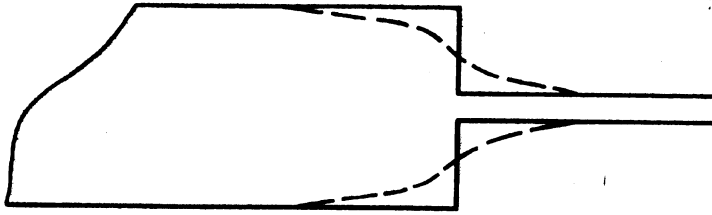
В рамках перколяционного подхода [5, 6] в качестве модели порового пространства будем использовать регулярную пространственную решетку, узлами которой являются поры, а связями – капиллярные каналы между ними. Характеристиками такой решетки служат длина ребра d , функция распределения пор по радиусам (порометрическая кривая) $f(r)$ и число ребер, выходящих из одного узла (координационное число решетки), z .

Для вывода зависимости параметров течения от микрохарактеристик среды удобно вначале получить соотношение между внешним перепадом давлений в среде и расходом жидкости по каждому проводящему пути в такой системе. Жидкость является вязкопластической с предельным напряжением сдвига τ_0 . При этом течение по единичному капилляру описывается формулой Бекингема [7]

$$q = \pi r^4 \Delta p (8d\mu)^{-1} h(\langle r \rangle), \quad h(\langle r \rangle) = 1 - 4/3 \langle r \rangle + 1/3 \langle r \rangle^4 \quad (1)$$

где q – объемный расход; Δp – перепад давления на концах капилляра; μ – структурная динамическая вязкость; $R = \tau_0(2d/\Delta p)$ – радиус ядра потока; $\langle r \rangle = R/r$ – относительный радиус ядра.

Использование точного соотношения для $h(\langle r \rangle)$, либо одной из известных его аппроксимаций [8], приводит к весьма громоздким и неудобным для дальнейших иссле-



Фиг. 1. Схематизация элемента стыковки капилляров различного радиуса. Сплошная линия – идеализация типа внезапного сужения или расширения. Штриховая линия – реальная картина изменения радиуса проводящего канала при переходе от одного капилляра к другому

дований зависимостям градиента давления от расхода. Поэтому используем следующую линейную двухточечную аппроксимацию функции $h(\langle r \rangle)$:

$$h^*(\langle r \rangle) = 1 - 4/3\langle r \rangle: 0 \leq \langle r \rangle \leq 0,4, \quad h^*(\langle r \rangle) = 0,778(1 - \langle r \rangle): 0,4 \leq \langle r \rangle \leq 1 \quad (2)$$

Максимальная абсолютная погрешность аппроксимации (2) на всем интервале $0 \leq \langle r \rangle \leq 1$ не превышает 8,91%. Любая необходимая для практических расчетов точность аппроксимации типа (2) может быть достигнута путем дополнительного разбиения интервала изменения величины $\langle r \rangle$. Подстановка $h^*(\langle r \rangle)$ вместо $h(\langle r \rangle)$ в (1) дает выражение для перепада давления на каждом капилляре

$$\Delta p_k = A \frac{\mu d}{\pi r^4} q + B \frac{\tau_0 d}{r} \quad (3)$$

$$A = 8, \quad B = 8/3: 0 \leq \langle r \rangle \leq 0,4, \quad A = 10,279, \quad B = 2: 0,4 \leq \langle r \rangle \leq 1$$

Будем предполагать, что перепад давления на узле решетки Δp_y определяется плотностью жидкости ρ , ее структурной вязкостью μ , предельным напряжением сдвига τ_0 , расходом q и радиусами r_1, r_2 капилляров, примыкающих к узлу в направлении течения жидкости. При этом не учитывается то, что область стыковки капилляров не является идеальным переходом типа внезапного расширения или сужения. (Схематизация элемента стыковки капилляров различного радиуса в цепочке показана на фиг. 1.) Анализ размерностей приводит к выражению

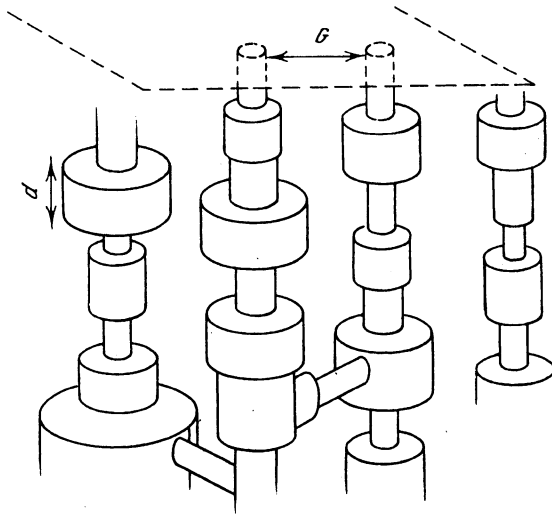
$$\Delta p_y = \rho q^2 r_1^{-4} \xi \left(\frac{r_2}{r_1}, \text{Re}, \text{He} \right), \quad \text{Re} = \frac{\rho q}{\mu r_1}, \quad \text{He} = \frac{\rho \tau_0 r_1^2}{\mu^2}$$

Оценки показывают, что для течения в отдельном капилляре число Рейнольдса $\text{Re} \ll \text{Re}_{cr}$, а число Хедстрема $\text{He} \ll 1$. Это позволяет принять гипотезу о полной автоточности функции $\xi(r_2/r_1, \text{Re}, \text{He})$ по параметрам Re и He и считать, что

$$\Delta p_y = \rho q^2 r_1^{-4} \xi \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (4)$$

Функцию ξ в зависимости (4) можно рассчитывать, например, по формулам Борда для внезапного расширения и Идельчика для внезапного сужения капилляра [9]

$$\xi(r_1, r_2) = \frac{1}{2\pi^2} \left(1 - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{-2} \right)^2, \quad r_1 \leq r_2; \quad \xi(r_1, r_2) = \frac{1}{2\pi^2} \left(1 - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{-2} \right), \quad r_1 > r_2$$



Фиг. 2. Схема формирования флюидопроводящих каналов из капилляров различного радиуса

Перепад давления на проводящем пути, составленном из чередующихся капилляров и узлов (фиг. 2), есть

$$\Delta P = \sum_{i=1}^N \Delta p_{ki} + \sum_{i=1}^N \Delta p_{yi} \quad (5)$$

где i – номер капилляра и следующего за ним узла, а N – общее число капилляров, составляющих рассматриваемую проводящую цепочку. Соответствующие перепады давлений определяются соотношениями (3), (4). Данный перепад давления имеет место на характерном макроскопическом расстоянии $L \cong Nd$, поэтому внешний градиент давления $\nabla P = \Delta P/L$ получаем, разделив (5) на L

$$\nabla P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta p_{ki} + \Delta p_{yi}}{d} \quad (6)$$

Если минимальный радиус капилляра, принадлежащего данному проводящему пути, равен r , а радиусы капилляров распределены независимо с плотностью распределения $f(\omega)$, то, переходя в (6) от суммирования к интегрированию, получаем

$$\nabla P = N^{-1} \int_r^{\infty} \frac{\Delta p_k}{d} f(\omega) d\omega + N^{-1} \int_r^{\infty} \frac{\Delta p_y}{d} f(\omega) d\omega, \quad N = \int_r^{\infty} f(\omega) d\omega$$

или, используя (3), (4)

$$\nabla P = I_0(r) + I_1(r)q + I_2(r)q^2 \quad (7)$$

$$I_0(r) = 2B\tau_0 N^{-1} \int_r^{\infty} \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega, \quad I_1(r) = \frac{A\mu}{\pi} N^{-1} \int_r^{\infty} \frac{f(\omega)}{\omega^4} d\omega$$

$$I_2(r) = \frac{1}{d} N^{-2} \int_r^{\infty} \int_r^{\infty} \xi(\omega_1, \omega_2) f(\omega_1) f(\omega_2) d\omega_1 d\omega_2$$

Выражая из (7) q через ∇P , получаем окончательную зависимость $q(\nabla P)$

$$q = \frac{2(\nabla P - I_0(r))}{I_1(r) + \sqrt{I_1^2(r) + 4I_2(r)(I_0(r) - \nabla P)}} \quad (8)$$

Соотношение (8) является обобщением формулы, полученной ранее для вязких ньютоновских жидкостей в [1], где в правой части (3) отсутствовало второе слагаемое, поскольку для ньютоновской жидкости предельное напряжение сдвига $\tau_0 = 0$. Соответственно в (7) и (8) отсутствовал член $I_0(r)$, обусловленный наличием предельного сдвига τ_0 .

Следуя [10, 11], вычислим количество путей с минимальным радиусом r_1 , приходящихся на единицу площади поперечного сечения потока в пористой среде. Вероятность того, что фильтрующий капилляр имеет радиус $r \geq r_1$, равна

$$P_B(r_1) = \int_{r_1}^{\infty} f(r) dr$$

В рамках обобщенной модели [11] критический радиус r_c связан с порогом протекания по решетке соотношением $P_B(r_c) = D/[(D-1)z]$, где D – размерность пространства, z – координационное число решетки. При любом $r_1 < r_c$ все капилляры с радиусами больше r_1 образуют бесконечный кластер – связную систему пор, по которой может идти фильтрация.

Зафиксируем $r_1 < r_c$. Соответствующий этому радиусу бесконечный кластер имеет нерегулярную ячеистую структуру с характерным размером ячейки [11]

$$G = d \left(\frac{1 - P_B(r_c)}{P_B(r_1) - P_B(r_c)} \right)^{\nu}$$

Здесь ν – индекс радиуса корреляции, равный 0,85 для трехмерных и 1,3 для двумерных задач. Концентрация $n(r_1)$ ориентированных коллинеарно действующему внешнему градиенту давления проводящих путей, составленных из пор с радиусами большими, чем r_1 (фиг. 2)

$$n(r_1) = G^{-2} = \frac{1}{d^2} \left[\frac{1}{1 - P_B(r_c)} \int_{r_1}^{r_c} f(r) dr \right]^{2\nu}$$

Распределение общего числа проводящих путей (приходящихся на единицу площади поперечного сечения) по минимальному радиусу r_1 есть

$$F(r_1) = -dn(r_1)/dr_1 \quad (9)$$

Суммируя расходы по всем проводящим путям с использованием (8), (9), получаем нелинейный закон фильтрации вязкопластической жидкости

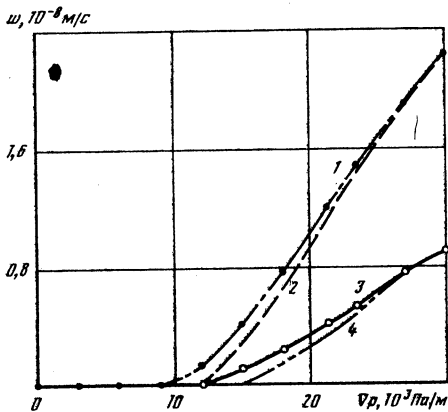
$$w = \int_0^{r_c} \frac{2F(r)(|\nabla P| - I_0(r))}{I_1(r) + \sqrt{I_1^2(r) + 4I_2(r)(|\nabla P| - I_0(r))}} dr \quad (10)$$

Здесь w – величина скорости фильтрации жидкости, $|\nabla P|$ – величина градиента внешнего давления в среде. С использованием коллинеарности векторов w и ∇P соотношение (10) очевидным образом может быть записано в векторной форме. Если совокупный вклад факторов пластического сдвига и инерционных потерь в зависимость (10) значительно меньше вклада вязкостных потерь, так что выполняется неравенство

$$I_1^2(r) \gg 4I_2(r)(I_0(r) - |\nabla P|) \quad (11)$$

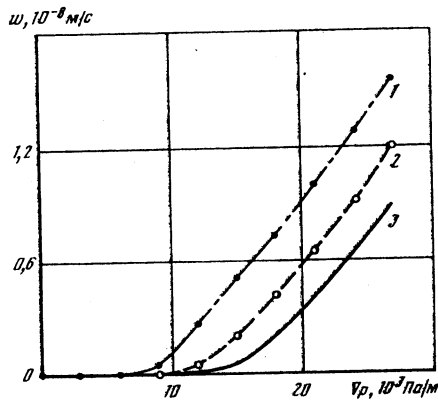
то из (10) следует асимптотическая зависимость

$$w \cong |\nabla P| \int_0^{r_c} \frac{F(r)}{I_1(r)} dr - \int_0^{r_c} \frac{F(r)I_0(r)}{I_1(r)} dr \quad (12)$$



Фиг. 3

Фиг. 3. Зависимости скорости фильтрации от градиента давления в средах с различными порометрическими кривыми степенного вида: 1, 2 – $n = -1,15$; 3, 4 – $n = -1,25$; $\tau_0 = 0,007$ Па (кривые 2, 4 – линейные асимптотики (12))



Фиг. 4

Фиг. 4. Зависимости скорости фильтрации от градиента давления при различных значениях предельного напряжения сдвига ($n = -1,2$) $\tau_0 = 0,005, 0,007$ и $0,009$ Па (кривые 1–3)

Структура соотношения (12) соответствует известной форме представления закона движения вязкопластической жидкости в пористой среде [3, 4], причем последний член в полученном выражении определяет величину предельного градиента давления. Если же выполняется соотношение, обратное (11), то асимптотика (10) имеет вид

$$w \equiv \int_0^{r_c} \frac{F(r) \sqrt{|\nabla P| - I_0(r)}}{\sqrt{I_2(r)}} dr \quad (13)$$

В отсутствие пластических свойств ($\tau_0 = I_0(r) = 0$) асимптотические соотношения (12), (13) переходят соответственно в линейный и квадратичный законы фильтрации вязкой ньютоновской жидкости [1], учитывающие инерционные потери.

Зависимость $w(|\nabla P|)$ для сред, отвечающих двум различным порометрическим кривым, показаны на фиг. 3 кривыми 1–4. Расчеты проводились по формулам (10) (кривые 1, 3) и (12) (кривые 2, 4) для модельной степенной функции распределения вида

$$f(r) = 0: r \leq r_{\min}, r \geq r_{\max}; f(r) = (n+1)r^n / (r_{\max}^{n+1} - r_{\min}^{n+1}); r_{\min} \leq r \leq r_{\max} \quad (14)$$

Кривые 1, 2 отвечают показателю $n = -1,15$, кривые 3, 4 – показателю $n = -1,25$. Величины радиусов капилляров изменялись в пределах от $1,5 \cdot 10^{-7}$ до 10^{-5} м, предельное напряжение сдвига выбиралось $\tau_0 = 0,007$ Па, структурная вязкость $\mu = 7,75$ мПа · с, остальные параметры отвечают характеристикам нефтей Арланского месторождения [12]. Характер полученных зависимостей качественно совпадает с полученными в [12] экспериментальными результатами. Величины расчетных скоростей фильтрации и градиентов давления меняются в тех же пределах, что и в [12], однако непосредственное сравнение с экспериментальными данными затрудняется тем, что в ходе экспериментов не проводилось измерение предельного напряжения сдвига τ_0 и порометрической кривой $f(r)$. Очевидно, что уменьшение доли тонких капилляров (увеличение показателя n) приводит к более резкому возрастанию скорости фильтрации с ростом внешнего градиента давления. Кривыми 1–3 на фиг. 4 показаны

зависимости $w(\nabla P)$, рассчитанные по формуле (10) для $f(r)$ в виде (14) с $n = -1,2$ при τ_0 , равных 0,005, 0,007 и 0,009 Па соответственно.

Представленные расчеты показывают, что увеличение предельного напряжения сдвига приводит к замедлению роста величины скорости фильтрации, что физически естественно.

Адекватное сравнение полученных теоретических результатов с экспериментальными данными возможно лишь в случае, когда последние включают как величину предельного сдвига τ_0 для фильтрующейся жидкости, так и порометрическую кривую $f(r)$ рассматриваемой пористой среды.

Заключение. Построена перколяционная модель переноса вязкопластической жидкости в пористой среде, учитывающая инерционные потери при взаимодействии флюида с неоднородностями поверхности порового пространства. Получено аналитическое выражение закона течения бингамовского пластика в пористой среде. Представленное выражение общего вида включает линейную и квадратичную асимптотики соответственно при малых и больших градиентах давления, закон течения ньютоновской жидкости при $\tau_0 = 0$, а также явный вид соотношения для расчета макроскопического предельного градиента давления в зависимости от параметров микрооднородности.

Изложенный метод аналитического вывода макроскопических законов фильтрационного течения в принципе может быть распространен на случаи движения жидкости с любыми другими реологическими свойствами. Основным принципом при этом является возможность описания вязкостных и инерционных потерь давления при течении по единичному капилляру с помощью аппроксимаций не выше второго порядка по расходу. При этом зависимость, определяющая инерционные потери, не обязательно должна быть подчинена гипотезе о полной автомодельности по всем параметрам подобия, кроме отношения радиусов стыкующихся капилляров r_1/r_2 . Необходимым условием и в этом случае остается возможность описания данной зависимости в рамках указанной аппроксимации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кадет В.В., Шапиро А.А.* Определение инерционных и вязкостных потерь при нелинейной фильтрации жидкости в пористой среде // *Фильтрация неоднородных систем.* М.: ВНИИГАЗ, 1988. С. 20–26.
2. *Кадет В.В., Попов А.Е., Селяков В.И.* Влияние пластических свойств флюидов на фазовые проницаемости // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1991. № 2. С. 110–115.
3. *Бернадинер М.Г., Ентов В.М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 199 с.
4. *Ентов В.М., Панков В.Н., Панько С.В.* Математическая теория целиков остаточной вязкопластичной нефти. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989. 193 с.
5. *Займан Дж.* Модели беспорядка. М.: Мир, 1982. 591 с.
6. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 260 с.
7. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
8. *Губин В.Е., Губин В.В.* Трубопроводный транспорт нефти и нефтепродуктов. М.: Недра, 1972. 296 с.
9. *Емцев Б.Т.* Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1987. 439 с.
10. *Селяков В.И.* Эффективная проницаемость неоднородной среды // *Динамика многофазных сред:* Матер. 7-го Всесоюз. семинара. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1985. С. 199–203.
11. *Селяков В.И., Кадет В.В.* Перколяционные модели процессов переноса в микрооднородных средах. М.: Недра, 1995. 222 с.
12. *Девликамов В.В., Хабибуллин З.А., Кабиров М.М.* Аномальные нефти. М.: Недра, 1975. 167 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.VI.1997