

УДК 532.527

© 1999 г. Г.Я. ДЫННИКОВА

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНОГО СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ МЕТОДОМ НЕПРЕРЫВНОГО ВИХРЕВОГО СЛОЯ

Разработан метод моделирования движения и деформации тангенциального разрыва с близкими к реальным характеристиками устойчивости. В отличие от метода дискретных вихрей, развитием которого он является, рассматривается движение непрерывного вихревого слоя конечной толщины. Уравнения движения такого слоя выведены на основе анализа физических причин устойчивости последнего к мелкомасштабным возмущениям.

В методе дискретных вихрей [1] свободный сдвиговый слой заменяется совокупностью вихревых элементов, которые в дальнейшем остаются неизменными или же меняется их эффективный радиус, тогда как в реальности выделенный участок вихревого слоя деформируется, вытягивается, принимая сложные формы, а его расщепление в пространстве едва ли может моделироваться как диффузия вихревой нити (фиг. 1,а).

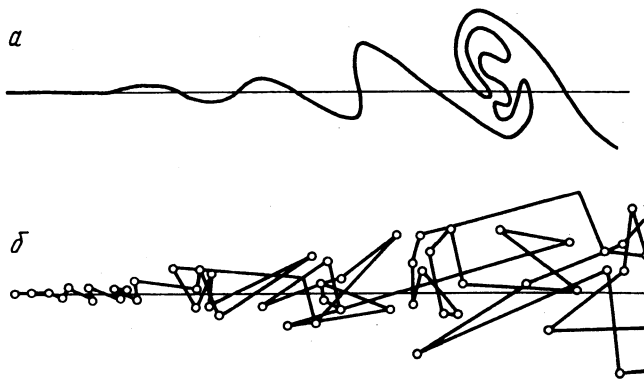
Вторым существенным недостатком метода дискретных вихрей является то, что цепочка изолированных вихрей в отличие от вихревого слоя конечной толщины неустойчива к любым возмущениям и более всего к мелкомасштабным. При ее движении в первую очередь происходит объединение близлежащих вихрей во вращающиеся пары и линия, связывающая цепочку, разрушается на первых же шагах, превращаясь в ломаную с многочисленными самопересечениями (фиг. 1,б). Это делает невозможным разбиение вихревых элементов на части при чрезмерном удлинении отдельных участков цепочки (следовательно, невозможен предельный переход от дискретных вихрей к непрерывной линии). Кроме того, могут появляться пульсации на частотах, связанных не с физическими свойствами объекта, а с первоначально заданным расстоянием между вихрями, что может повлиять на результат при решении нестационарных задач.

Для регуляризации поведения вихревых цепочек с целью подавления мелкомасштабной неустойчивости применяются различные математические приемы [2–6]. Эти методы представляют собой те или иные способы сглаживания разрушающейся цепочки либо основаны на введении искусственной вязкости или эффективного радиуса вихрей.

В настоящей работе на основе анализа физических причин устойчивости вихревого слоя к мелкомасштабным возмущениям и отсутствия таковой у цепочки изолированных вихрей внесены соответствующие изменения в уравнения движения. В результате разработан метод моделирования движения непрерывного вихревого слоя с близкими к реальным характеристикам устойчивости, свободный от указанных выше недостатков.

Благодаря тому что рассматриваются вихревые слои конечной толщины (причем учитывается динамика изменения этой толщины), открывается дополнительная возможность исследования влияния числа Рейнольдса на течения с тангенциальными разрывами.

Проведенное Рэлеем исследование [7] свободного сдвигового слоя конечной тол-



Фиг. 1. Характер деформации реального вихревого слоя (а) и цепочки дискретных вихрей (б)

щины в несжимаемой невязкой жидкости показало, что такой слой максимально неустойчив к синусоидальному возмущению с длиной волны $\lambda \approx 8b$, где b – толщина слоя, так как амплитуда синусоидального возмущения с такой длиной волны растет наиболее быстро. Это приводит к тому, что соответствующая фурье-компонента произвольного возмущения развивается быстрее других, слой искривляется, принимая форму, близкую к синусоидальной, а затем скручивается в вихревые структуры с тем же периодом (неустойчивость Кельвина–Гельмгольца).

В [7] рассмотрена модель сдвигового слоя толщины b с линейным профилем скорости (с постоянной плотностью завихренности во всех точках внутри слоя) и показано, что амплитуда синусоидального возмущения на начальной стадии развития растет по экспоненциальному закону $a(t) = a_0 \exp(nt)$ с инкрементом n , определяемым соотношением

$$n^2 = \left(\frac{V}{b}\right)^2 [\exp(-2kb) - (kb - 1)^2], \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

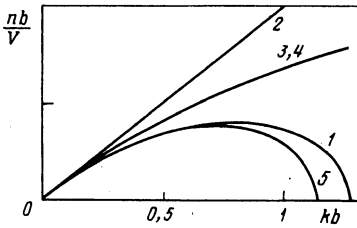
Здесь V – полуразность скоростей по обе стороны слоя.

Эта зависимость изображена на фиг. 2 (кривая 1). При $\lambda < \lambda_0$, $\lambda_0 \approx 5b$ величина n становится чисто мнимой, следовательно, амплитуда не растет и слой устойчив к таким возмущениям. Отметим, что эта устойчивость связана не с вязкостью (рассматривалась идеальная жидкость), а исключительно с динамикой движения сдвигового слоя конечной толщины.

Попытки заменить точечные вихри протяженными при вычислении индуцированной скорости в центральной точке вихревого элемента не приводят к адекватному моделированию характеристик устойчивости [8]. Зависимости инкремента возрастания амплитуды возмущения от k для цепочек вихрей различной формы изображены на фиг. 2 (кривые 2–4). Во всех рассмотренных случаях $n \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ ($\lambda \rightarrow 0$).

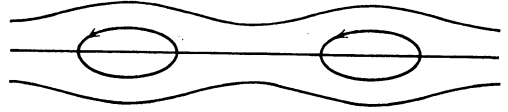
1. Постановка задачи. При описании движения протяженного объекта и его дискретизации возникает необходимость выбора и описания движения конечного числа точек, характеризующих положение объекта. Для тонкого слоя (толщина слоя много меньше радиуса его кривизны) естествен выбор таких точек на средней линии, т.е. на линии, равноудаленной от его границ. Все частицы несжимаемой жидкости, в том числе и частицы, несущие завихренность, движутся со скоростями [1]

$$\mathbf{V}(x_*, y_*) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{(y - y_*)\mathbf{e}_x - (x - x_*)\mathbf{e}_y}{(x - x_*)^2 + (y - y_*)^2} \Omega(x, y) dx dy + \mathbf{U}_\infty \quad (1.1)$$



Фиг. 2

Фиг. 2. Зависимость инкремента возрастания амплитуды возмущения от волнового числа для рэлеевского слоя (1), цепочки точечных вихрей (2), вихревых жгутов диаметра b (3), прямоугольных участков слоя (4), предлагаемой модели (5)



Фиг. 3

Фиг. 3. Структура течения в слое на начальном этапе развития неустойчивости

Здесь $V(x_*, y_*)$ – скорость жидкости в точке x_*, y_* , U_∞ – скорость на бесконечности, $\Omega(x, y)$ – плотность завихренности. Интегрирование ведется по всем областям S , содержащим ненулевую завихренность, включая присоединенные вихри на обтекаемых поверхностях, т.е. все частицы жидкости движутся со скоростями, индуцированными другими вихрями (скорость U_∞ можно интерпретировать как индуцированную вихрем бесконечной интенсивности, расположенным на бесконечности). Частицы жидкости, лежащие на средней линии слоя, так же как и частицы на его границах, движутся согласно этому закону.

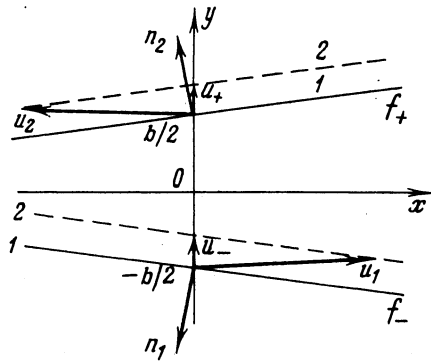
Если "пометить" частицы жидкости, лежащие на средней линии слоя в некоторый момент времени, и проследить за их движением, а также за движением точек на границах, то может оказаться, что через некоторое время помеченные точки уже не будут равноудаленными от границ. Иначе говоря, средняя скорость смещения границ может не совпадать со скоростью движения частиц жидкости на средней линии. Поэтому, если необходимо описывать движение воображаемой линии, равноудаленной от границ, следует к скорости движения частиц жидкости, лежащих в данный момент на средней линии (а именно к индуцированной скорости), добавить соответствующую поправку, равную скорости смещения границ относительно этих частиц жидкости. Эта поправка к скорости оказывается ненулевой, если слой имеет переменную (в пространстве) толщину, и приближенно равна [8]

$$\mathbf{W} = \frac{1}{4} \frac{\partial b}{\partial t} [\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}_l]$$

Здесь \mathbf{e}_l , l – единичный вектор и координата вдоль слоя, b – толщина слоя, $\boldsymbol{\gamma}$ – погонная плотность циркуляции.

Несовпадение скорости движения слоя как целого со скоростью на его средней линии наблюдалось в экспериментах. Классическим примером является поведение свободного сдвигового слоя в начальный момент развития неустойчивости, когда слой еще неподвижен, а скорости на его оси существенно не равны нулю (фиг. 3). В методе же дискретных вихрей фактически вычисляется скорость на средней линии слоя и отождествляется со скоростью движения элемента слоя как целого. Если в уравнения движения вихревых элементов к индуцированной скорости в центральной точке добавлен член \mathbf{W} , то цепочка становится устойчивой к мелкомасштабным возмущениям. Подробный анализ механизма, обеспечивающего эту устойчивость, проведен в [8].

На фиг. 2 изображена полученная в [8] зависимость инкремента возрастания n от волнового числа синусоидального возмущения для случая, когда в уравнения движения учтен член \mathbf{W} (кривая 5). Видно, что она близка к полученной Рэлеем. Как показали расчеты [9], при добавлении в уравнения движения члена \mathbf{W} вихревой слой ведет себя как реальный, образуя крупновихревые структуры на тех масштабах, которые



Фиг. 4. Схема слоя в выбранной системе координат; границы слоя: $t = 0$ (1), $t = \Delta t$ (2)

наблюдаются в экспериментах. При этом линия, соединяющая расчетные узлы, не разрушается. Поэтому при растяжении отдельных ее участков можно вставлять промежуточные точки.

Поправка W получена в [8] на основе физических соображений. Ниже приводится более строгий математический вывод.

2. Вывод уравнений. Рассмотрим тонкий вихревой слой с однородным распределением завихренности, полагая, что отношение толщины к радиусу кривизны R в каждой точке и производная толщины вдоль слоя ограничены величиной $\epsilon \ll 1$: ($b/R < \epsilon$, $|\partial b/\partial x| < \epsilon$).

Выберем декартову систему координат x, y с центром, связанным с некоторой частицей жидкости на средней линии вихревого слоя. Ось x направим по касательной к этой линии. Рассмотрим перемещение близлежащих частиц жидкости, несущих завихренность. Скорости их в этой системе координат имеют вид

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{V}(x, y) - \mathbf{V}(0, 0) \quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{V}(x, y)$ определяется формулой (1.1). Скорости движения точек пересечения с осью y нижней и верхней границ слоя будут соответственно такими (фиг. 4)

$$u_- = \frac{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1)}{(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n}_1)}, \quad u_+ = \frac{(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2)}{(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n}_2)}, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}\left(0, -\frac{1}{2}b\right), \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}\left(0, \frac{1}{2}b\right)$$

$$\mathbf{n}_1 = \{-\sin \theta, -\cos \theta\}, \quad \mathbf{n}_2 = \{-\sin \theta, \cos \theta\}, \quad \theta = \arctg\left(\frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial x}\right)$$

Здесь \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 – физические скорости частиц жидкости в этих точках, \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 – единичные векторы, нормальные к нижней и верхней границам соответственно.

Скорость движения середины отрезка, соединяющего эти две точки, равна

$$w = \frac{(u_- + u_+)}{2} = \frac{\partial b}{\partial x} \frac{(u_{1x} - u_{2x})}{4} + \frac{(u_{1y} + u_{2y})}{2} \quad (2.2)$$

Подставляя в соотношения для \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 выражения (2.1) и (1.1), получим

$$u_{1x} - u_{2x} = \frac{1}{2\pi} \iint_S F(x, y) \Omega(x, y) dx dy$$

$$u_{1y} + u_{2y} = -\frac{1}{2\pi} \iint_S G(x, y) \Omega(x, y) dx dy$$

$$F(x, y) = \frac{y + \delta}{R_+^2} - \frac{y - \delta}{R_-^2} = \frac{x^2 b}{R_+^2 R_-^2}, \quad \delta = \frac{b}{2}$$

$$G(x, y) = -\frac{x}{R_+^2} - \frac{x}{R_-^2} + \frac{2x}{r^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{4x\delta^2[3y^2 - x^2 - \delta^2]}{R_+^2 R_-^2 r^2}$$

$$R_{\pm}^2 = x^2 + (y \pm \delta)^2, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Подынтегральные выражения в приведенных выше формулах убывают при $r^2 \rightarrow \infty$ как r^{-2} в первом интеграле и как r^{-3} во втором. Учитывая это, а также то, что вихри, лежащие на расстояниях $r \gg b$, не могут влиять на мелкокомасштабную устойчивость, ограничимся рассмотрением области $r < L$, где $b \ll 2L = b/\varepsilon$. Полагая, что в этой области нет других вихревых элементов, кроме непрерывного продолжения слоя вправо и влево от начала координат, запишем

$$u_{1x} - u_{2x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L dx \int_{f_-(x)}^{f_+(x)} F(x, y) \omega dy$$

$$f_{\pm}(x) \approx \pm \frac{b}{2} \pm \alpha x + \beta_{\pm} x^2, \quad \alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial x}, \quad |\alpha| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|\beta_{\pm}| \approx \frac{1}{R} \leq b\varepsilon, \quad |\beta_+ - \beta_-| \leq \frac{\varepsilon}{L}$$

Будем искать решение в виде

$$u_{1x} - u_{2x} = A_0 + A_{\alpha} \alpha + A_{\beta_-} \beta_- + A_{\beta_+} \beta_+ + O(\alpha^2, \beta_+ \beta_-, \alpha \beta_{\pm})$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L dx \int_{-b/2}^{b/2} F(x, y) \omega dy \approx \omega b \left(1 - \frac{b}{\pi L}\right), \quad \frac{b}{\pi L} = \frac{2\varepsilon}{\pi}$$

$$A_{\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L \left[F\left(x, \frac{b}{2}\right) \frac{\partial f_+}{\partial \alpha} - F\left(x, -\frac{b}{2}\right) \frac{\partial f_-}{\partial \alpha} \right] \omega dx = 0$$

$$\begin{aligned} A_{\beta_-} \beta_- + A_{\beta_+} \beta_+ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L \left[F\left(x, \frac{b}{2}\right) \frac{\partial f_+}{\partial \beta_+} \beta_+ - F\left(x, -\frac{b}{2}\right) \frac{\partial f_-}{\partial \beta_-} \beta_- \right] \omega dx = \\ &= \frac{\omega b}{2\pi} (\beta_+ - \beta_-) \left[2L - 2b \operatorname{arctg} \frac{L}{b} \right] = \omega b C, \quad |C| < \frac{\varepsilon}{\pi} \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$u_{1x} - u_{2x} = \omega b (1 + O(\varepsilon)) \quad (2.3)$$

Аналогично оценивая величину $u_{1y} + u_{2y}$ и подставляя результат вместе с выражением (2.3) в формулу (2.2), имеем

$$W = \frac{1}{4} \omega b \frac{\partial b}{\partial x} + \omega b O(\varepsilon^2)$$

Поток завихренности через сечение $x = 0$ имеет порядок $\omega b O(\varepsilon^2)$. Соответствующие выкладки здесь не приводятся, так как они аналогичны приведенным выше. Такой же порядок имеют поправки, связанные с вращением средней линии в выбранной системе координат.

Запишем уравнения в окончательном виде с точностью до членов порядка ε^2 . Пусть в некоторый момент времени t положение вихревого слоя и распределение цирку-

ляции вдоль него определяются функциями $\mathbf{r}(\tau, t)$, $b(\tau, t)$ и $\omega(\tau, t)$, где τ – параметр, пробегающий значения от τ_1 до τ_2 (τ_1 и τ_2 могут быть как конечными, так и бесконечными) при движении вдоль слоя, \mathbf{r} – радиус-вектор, определяющий положение средней линии слоя, b – его толщина, ω – плотность завихренности. Для модели вихревого слоя с постоянной плотностью завихренности при отсутствии диффузии уравнения, описывающие изменение этих функций во времени для всех точек $\tau_1 < \tau < \tau_2$, будут иметь вид

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{(y-r_y)\mathbf{e}_x - (x-r_x)\mathbf{e}_y}{(x-r_x)^2 + (y-r_y)^2} \Omega(x, y) dx dy + \mathbf{U}_\infty + \mathbf{W} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{W} = \frac{\omega b}{4|\mathbf{r}_\tau|^2} \frac{\partial b}{\partial \tau} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_\tau], \quad b|\mathbf{r}_\tau| = \text{const}, \quad \mathbf{r}_\tau = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau}$$

Интегрирование ведется по всем областям с ненулевой завихренностью, включая присоединенные вихри на поверхностях обтекаемых тел. Внутри вихревого слоя $\Omega(x, y) = \omega$.

Уравнение, описывающее изменение толщины слоя, имеет представленный выше вид, поскольку рассматривается невязкая несжимаемая жидкость и используется модель сдвигового слоя с очерченными границами и однородным распределением завихренности. Завихренность между двумя любыми сечениями τ_0 и $\tau_0 + \Delta\tau$ остается постоянной во времени. Следовательно, постоянной оказывается и площадь участка жидкости, несущей завихренность. Вследствие этого толщина пленки на этих участках должна изменяться таким образом, чтобы произведение толщины на длину оставалось неизменным. Толщина вихревой пленки в точке ее отрыва определяется предысторией течения и в конкретной задаче может быть вычислена или оценена.

При использовании предлагаемого метода может быть учтено изменение толщины слоя за счет диффузии, например путем добавления в уравнение для b члена ν/b , где ν – коэффициент кинематической вязкости, после чего оно принимает вид

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{b}{|\mathbf{r}_\tau|} \frac{\partial |\mathbf{r}_\tau|}{\partial t} + \frac{\nu}{b}$$

При этом величина ω перестает быть постоянной и подчиняется уравнению

$$\omega b |\mathbf{r}_\tau| = \text{const}$$

Предлагаемая модификация уравнений, учитывающая диффузию, носит модельный характер. В отсутствие растяжения толщина слоя в этой модели изменяется как $(\nu t + b_0^2)^{1/2}$.

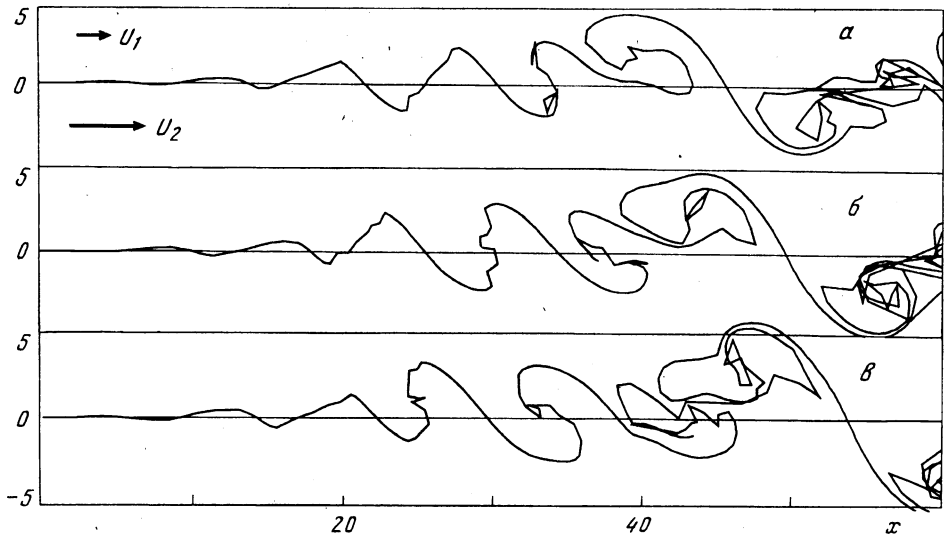
Следует отметить, что введенные поправки к скорости в уравнениях (2.4) невелики по сравнению с индуцированными скоростями, однако они обеспечивают устойчивость слоя в соответствии с его реальными характеристиками.

При использовании предлагаемого метода существенно упрощается расчет давления в любой точке течения, включая области, разделенные вихревыми слоями (отрывные течения). Благодаря тому, что рассматривается сплошной слой конечной толщины, отсутствуют особенности.

При движении i -го вихревого элемента со скоростью \mathbf{u}_i скорость изменения потенциала $\phi_i = \phi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)$, создаваемого им в некоторой точке \mathbf{r}_0 , можно записать в виде

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) = - \left(\frac{\partial \phi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{r}_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) = -(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i)$$

где \mathbf{u}_i – скорость, индуцированная этим элементом в данной точке. При наличии поверхностей с присоединенными вихрями изменение последних во времени можно



Фиг. 5. Форма слоя в последовательные моменты времени $t = 80, 84, 88$

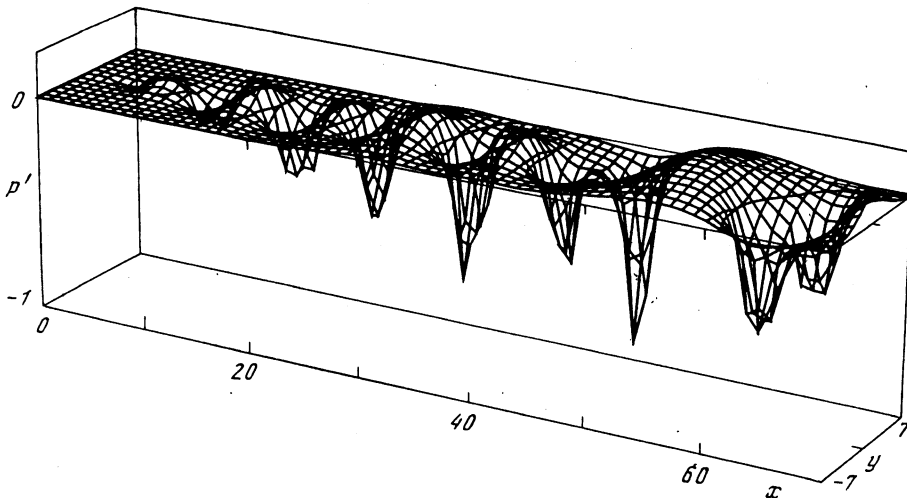
представить как некое перетекание с эффективной скоростью w_e . Эта скорость может быть вычислена с помощью простого дифференциального уравнения $\partial(\gamma w_e)/\partial t = \partial\gamma/\partial t$ с граничными условиями на краях, соответствующими условию непрерывности потока завихренности. Интеграл Лагранжа–Коши при этом приобретает вид

$$-\int (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) dl + \frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (2.5)$$

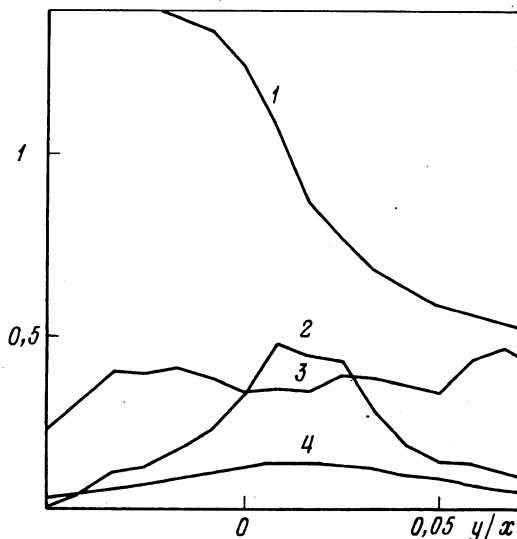
Здесь V, p, ρ – скорость, давление и плотность газа. Можно показать, что сумма первых двух слагаемых в (2.5) непрерывна на свободно движущихся вихревых слоях, в том числе и на бесконечно тонких (скачок первого слагаемого компенсируется скачком второго слагаемого). Следовательно, использование формулы (2.5) с одной и той же постоянной в правой части для всех областей течения эквивалентно условию непрерывности давления на свободных вихревых слоях. Еще раз подчеркнем, что это относится к случаю, когда изменение завихренности представлено как результат перемещения в пространстве вихрей (как свободных, так и присоединенных) и нет точек, где завихренность рождается или исчезает. Можно показать, что перепад давления на вихревом слое равен при этом $\Delta p = \rho\gamma(w_{e,t} - v_t)$, где v_t – тангенциальная к слою составляющая полусуммы скоростей по обе его стороны. Если слой моделирует обтекаемую поверхность твердого тела, то $v_t = \gamma/2$. Если слой свободный, то $w_{e,t} = v_t$ и $\Delta p = 0$.

3. Результаты расчетов. При численных расчетах уравнения (2.4) заменяются разностной схемой. В данной работе слой разбивался на участки, форма которых считалась прямоугольной. Скорость, индуцированная удаленными участками (расстояние до которых много больше характерных размеров участка), вычислялась как скорость, индуцированная точечными вихрями, а для близлежащих участков интеграл по прямоугольнику аппроксимировался аналитическими функциями, поэтому расчеты были не многим более трудоемкими, чем для метода дискретных вихрей.

На фиг. 5 приведены результаты расчета слоя смешения плоских полубесконечных спутных струй со скоростями U_1 и U_2 ($U_2 = 3U_1$). В начальный момент граница между ними считалась невозмущенным вихревым слоем (плоский слой, параллельный оси x), движущимся со скоростью $(U_1 + U_2)/2$ вдоль оси x . Сечение $x = 0$ считалось начальной точкой смешения. До этой точки движение слоя задавалось как равномерное со



Фиг. 6. Распределение давления в слое смешения



Фиг. 7. Осредненные и пульсационные характеристики слоя смешения: $\langle U \rangle$ (1), $\langle u'v' \rangle \times 10$ (2), $\langle u'v' \rangle / \langle u'^2 \rangle$ (3), $\langle |p'| \rangle$ (4)

скоростью $(U_1 + U_2)/2$. За ней скорость вычислялась по формулам (2.4). Задавалась толщина сдвигового слоя в начальной точке смешения (b_0), такой же она считалась и в некоторой области $-L < x < 0$ до начала смешения ($L \gg b$). В начальный момент времени толщина невозмущенного слоя при $x > 0$ также считалась равной b_0 . В результате наличия случайных возмущений развивалась неустойчивость и первоначально невозмущенный слой самопроизвольно искривлялся и скручивался в крупновихревые структуры на тех масштабах, на которых это предсказывается теорией Рэля и наблюдается в экспериментах. Время отнесено к величине $t_0 = b_0/(U_2 - U_1)$. Все линейные размеры отнесены к толщине вихревой пелены в начальном сечении.

На фиг. 6 приведены характерные результаты расчета давления в области смешения спутных струй для тех же условий, что и на фиг. 5. Изображено распре-

деление величины $p' = 2(p - p_\infty)/[\rho(U_2 - U_1)^2]$. На фиг. 7 представлены результаты расчета осредненных и пульсационных характеристик слоя смешения в сечении $x = 30b_0$. Время осреднения составляло $50t_0$. Приведены распределения средней скорости $\langle U \rangle$, величин $\langle u'v' \rangle$, $\langle u'v' \rangle / \langle u'^2 \rangle$, где u' и v' – пульсационные составляющие скорости, и среднего значения модуля $|p'|$. Среднее значение величины $\langle u'v' \rangle / \langle u'^2 \rangle$ внутри слоя (усреднение проводилось в интервале $-0,4x < y < 0,6x$) составило 0,38, что находится в хорошем согласии с полученными ранее данными [10], где эта величина равняется $0,34 \pm 0,08$.

Заключение. Показано, что предлагаемый метод оказывается эффективным при моделировании свободного сдвигового слоя. В отличие от метода дискретных вихрей он позволяет описывать поведение непрерывной вихревой пелены с близкими к реальным характеристиками устойчивости. Это дает возможность использовать предлагаемый метод при исследовании крупновихревого смешения струй, например в задачах, связанных со смешением химически реагирующих потоков, поскольку в таких задачах характер деформации границы между потоками определяет скорость смешения на молекулярном уровне и, следовательно, скорость протекания химических реакций. Он может быть использован при решении нестационарных задач с отрывными течениями, где необходимы адекватные характеристики устойчивости. Метод непрерывного вихревого слоя позволяет исследовать влияние числа Рейнольдса на поведение вихревой пелены, так как в уравнениях движения учтена ее толщина, а последняя в момент отрыва от поверхности определяется предысторией течения и числом Рейнольдса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 351 с.
2. Kuwahara K., Takami H. Numerical studies of two-dimensional vortex motion by a system of point vortices // J. Phys. Soc. Japan. 1973. V. 34. № 1. P. 247–253.
3. Молчанов В.Ф. О реализации метода плоских сечений в нелинейной теории крыла // Учен. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 2. С. 1–9.
4. Захаров С.Б. Влияние разделительной пластины на симметричность отрывного обтекания треугольного крыла малого удлинения // Учен. зап. ЦАГИ. 1986. Т. 17. № 3. С. 1–8.
5. Kransy R. Computation of vortex sheet roll-up in the Trefftz plane // J. Fluid Mech. 1987. V. 184. P. 123–155.
6. Siddiqi Sh. Trailing vortex rollup computations using the point vortex method // AIAA Paper. 1987. № 2479. 11 p.
7. Rayleigh. The theory of sound. V. 2. L.: MacMillan, 1929. 504 p. (Рус. перев.: Стрэтт Дж.В. Теория звука. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1944. 476 с.)
8. Дынникова Г.Я. Моделирование неустойчивости Кельвина – Гельмгольца модифицированным методом дискретных вихрей // Учен. зап. ЦАГИ. 1991. Т. 22. № 3. С. 25–34.
9. Дынникова Г.Я. Моделирование процесса возникновения и развития турбулентности в свободном слое смешения модифицированным методом дискретных вихрей // Турбулентный пограничный слой: Сб. докл. ежегодной Школы-семинара ЦАГИ "Механика жидкости и газа". 1991. М.: ЦАГИ, 1992. Ч. 2. С. 88–94.
10. Townsend A.A. The Structure of Turbulent Shear Flow. Cambridge: Univ. Press, 1976. 429 p.

Москва

Поступила в редакцию
25.VI.1997