

УДК 532.526.3.04.13

© 1999 г. А.В. КАЗАКОВ, А.П. КУРЯЧИЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖИМАЕМОГО ЗАКРУЧЕННОГО ТЕЧЕНИЯ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

В рамках линейной теории исследуется устойчивость осесимметричного течения вязкого газа в круглой трубе, моделирующего вихрь Бюргерса в окрестности оси трубы. Рассчитаны нейтральные кривые для наиболее неустойчивых возмущений. Исследовано влияние характерного числа Маха течения на его устойчивость. При заданном модельном распределении скоростей число Маха влияет только на профили температуры и давления основного невозмущенного течения. В этом случае при увеличении числа Маха значения критического числа Рейнольдса потери устойчивости для рассмотренных типов возмущений уменьшаются.

Закрученные трехмерные внешние и внутренние течения представляют большой интерес для исследований в области аэродинамики. Закрутка потока и распределение осевой и окружной составляющих скорости – наиболее важные параметры, определяющие эволюцию завихренного течения, его устойчивость и сам процесс разрушения вихря, впервые обнаруженный экспериментально в [1]. В большинстве работ исследования как внешних [2–7], так и внутренних течений [8, 9] были выполнены в рамках модели несжимаемой жидкости. Основное внимание при анализе устойчивости внутренних течений было уделено осесимметричным и коническим течениям несжимаемой жидкости, для которых существуют известные аналитические решения уравнений Навье – Стокса. Обзор работ и наиболее интересных результатов, полученных к настоящему времени, приведен в [8–10]. Устойчивость закрученных течений зависит главным образом от распределения окружной составляющей скорости, которое в реальных течениях может сильно отличаться от автомоделного.

При изучении закрученных течений вязкого газа было выяснено, что учет сжимаемости, теплопроводности и подвода энергии в поток может существенно влиять на такие характеристики внутренних и внешних завихренных потоков, как закрутка, распределения скоростей и давления поперек вихря, градиент давления вдоль оси вихря [11–13].

В настоящей работе рассматривается влияние сжимаемости и теплопроводности газа на характеристики нейтральных возмущений закрученного вязкого течения в круглой трубе как одного из наиболее распространенных внутренних течений.

1. Постановка задачи. Рассматривается вязкое завихренное течение в трубе круглого сечения. Данное течение описывается уравнениями Навье – Стокса, которые рассматриваются в цилиндрических координатах (x, r, θ) с соответствующими компонентами мгновенной скорости (u, v, w) . Предполагается, что невозмущенное основное течение является стационарным, сжимаемым, ламинарным и осесимметричным. В общем случае для трубы с переменным радиусом сечения компоненты скорости обезразмериваются с помощью продольной скорости на оси трубы, а давление – с помощью удвоенного скоростного напора в некотором сечении, принимаемом за начальное (характерные скорость V_0 и давление $\rho_0 V_0^2$). В качестве характерной длины берется радиус трубы в каждом рассматриваемом сечении $r_0(x)$, а характерного

времени – отношение характерной длины к характерной скорости. Плотность газа ρ и коэффициент динамической вязкости μ относятся к их значениям на оси трубы в начальном сечении ρ_0 и μ_0 соответственно. Энтальпия h относится к квадрату характерной скорости. Число Маха M_0 определяется на основе характерной скорости и температуры газа на оси трубы в начальном сечении. В дальнейшем все уравнения рассматриваются в безразмерной форме.

Линейная устойчивость сжимаемого закрученного течения в слаборасширяющейся трубе рассматривается в предположении, что стационарное невозмущенное течение локально-параллельно и зависит только от r . Мгновенные значения параметров течения можно представить в виде

$$\begin{aligned} u &= U(r) + u'; \quad v = v'; \quad w = W(r) + w' \\ h &= H(r) + h'; \quad p = P(r) + p' \end{aligned} \quad (1.1)$$

Мгновенное поле течения и возмущения малой амплитуды – функции координат и времени: (x, r, θ, t) . Возмущенное течение предполагается искать в виде волн, распространяющихся вдоль оси трубы

$$(u', v', w', h', p') = (u^*, v^*, w^*, h^*, p^*) \exp [i(\alpha x + n\theta - \omega t)] \quad (1.2)$$

Здесь величины, отмеченные звездочкой, обозначают комплексные амплитуды возмущений соответствующих функций течения и зависят только от координаты r . Величины α, n представляют соответственно продольное и азимутальное волновые числа, а ω – частота возмущения.

Подставляя уравнения (1.1) – (1.2) в уравнения Навье – Стокса, записанные в цилиндрических координатах для вязкого теплопроводного газа, можно показать, что малые возмущения удовлетворяют системе уравнений

$$\left(A \frac{d^2}{dr^2} + B \frac{d}{dr} + C + \omega D \right) \Psi = 0 \quad (1.3)$$

где $\Psi = \|u^*, v^*, w^*, h^*, p^*\|$ – вектор из пяти элементов и A, B, C, D , представляющими собой матрицы 5×5 со следующими ненулевыми элементами:

$$A_{11} = A_{33} = \sigma A_{44} = \frac{3}{4} A_{22} = \frac{\mu_0}{\text{Re}}, \quad B_{11} = B_{33} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\mu}{r} + \frac{d\mu}{dH} H' \right), \quad B_{12} = B_{21} = i\alpha \frac{\mu}{3\text{Re}}$$

$$B_{14} = \frac{U'}{\text{Re}} \frac{d\mu}{dH}, \quad B_{23} = B_{32} = \frac{in}{r} \frac{\mu}{3\text{Re}}, \quad B_{22} = \frac{4}{3} B_{11}, \quad B_{25} = -1, \quad B_{34} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{d\mu}{dH} \left(W' - \frac{W}{r} \right)$$

$$B_{41} = 2\mu \frac{U'}{\text{Re}}, \quad B_{42} = \frac{2\mu}{\text{Re}} \left(W' - \frac{W}{r} \right), \quad B_{44} = \frac{1}{\sigma \text{Re}} \left(\frac{\mu}{r} + 2 \frac{d\mu}{dH} H' \right), \quad B_{53} = 1$$

$$C_{11} = -i \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{H} \left(\alpha U + \frac{n}{r} W \right) - \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{4}{3} \alpha^2 + \frac{n^2}{r^2} \right), \quad C_{12} = \frac{\alpha}{\text{Re}} \left(\frac{\mu}{3r} + \frac{d\mu}{dH} H' \right) - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{H} U'$$

$$C_{13} = C_{31} = -\frac{\alpha n}{r} \frac{\mu}{3\text{Re}}; \quad C_{14} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{d^2 \mu}{dH^2} H' U' + \frac{d\mu}{dH} \left(U'' + \frac{U'}{r} \right) \right], \quad C_{15} = -i\alpha$$

$$C_{22} = -i \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{H} \left(\alpha U + \frac{n}{r} W \right) - \frac{1}{\text{Re}} \left[\mu \left(\alpha^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) + \frac{2}{3r} \left(2\mu + \frac{d\mu}{dH} H' \right) \right]$$

$$C_{23} = i \frac{n}{3r} \left[6 \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{H} W + \frac{1}{\text{Re}} \left(7 \frac{\mu}{r} + 2 \frac{d\mu}{dH} H' \right) \right], \quad C_{21} = -i\alpha \frac{2}{3\text{Re}} \frac{d\mu}{dH} H'$$

$$\begin{aligned}
C_{24} &= -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{H^2} \frac{W^2}{r} + \frac{i}{\text{Re}} \frac{d\mu}{dH} \left[\alpha U' + \frac{n}{r} \left(W' - \frac{W}{r} \right) \right], \quad C_{25} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{W^2}{rH} \\
C_{32} &= i \frac{n}{r \text{Re}} \left(\frac{7}{3} \frac{\mu}{r} + \frac{d\mu}{dH} H' \right) - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{H} \left(W' + \frac{W}{r} \right), \quad C_{33} = -i \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{H} \left(\alpha U + \frac{n}{r} W \right) - \\
&- \frac{1}{\text{Re}} \left[\mu \left(\alpha^2 + \frac{4}{3} \frac{n^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{d\mu}{dH} \frac{H'}{r} \right], \quad C_{34} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{d^2\mu}{dH^2} H' \left(W' - \frac{W}{r} \right) + \frac{d\mu}{dH} \left(W'' + \frac{W'}{r} - \frac{W}{r^2} \right) \right] \\
C_{35} &= -i \frac{n}{r}, \quad C_{42} = P' - \frac{\gamma}{\gamma-1} P \frac{H'}{H} + 2i \frac{\mu}{\text{Re}} \left[\alpha U' + \frac{n}{r} \left(W' - \frac{W}{r} \right) \right], \quad C_{43} = -\frac{2\mu}{r \text{Re}} \left(W' - \frac{W}{r} \right) \\
C_{44} &= -\frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\mu}{\sigma} \left(\alpha^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) - \frac{1}{\sigma} \frac{d^2\mu}{dH^2} H'^2 - \frac{d\mu}{dH} \left[\frac{1}{\sigma} \left(H'' + \frac{H'}{r} \right) + U'^2 + \left(W' - \frac{W}{r} \right)^2 \right] \right\} - \\
&- i \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{H} \left(\alpha U + \frac{n}{r} W \right), \quad C_{45} = i \left(\alpha U + \frac{n}{r} W \right), \quad C_{51} = i\alpha, \quad C_{52} = \frac{1}{r} + \frac{P'}{P} - \frac{H'}{H} \\
C_{53} &= i \frac{n}{r}, \quad C_{54} = -\frac{i}{H} \left(\alpha U + \frac{n}{r} W \right), \quad C_{55} = -\frac{i}{P} \left(\alpha U + \frac{n}{r} W \right) \\
D_{11} &= D_{22} = D_{33} = D_{44} = i \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{H}, \quad D_{45} = -i, \quad D_{54} = \frac{i}{H}, \quad D_{55} = -\frac{i}{P}; \quad \text{Re} = \frac{\rho_0' \sigma_0' r_0}{\mu_0}
\end{aligned}$$

Здесь Re – характерное число Рейнольдса, $\sigma = 0,72$ – число Прандтля, $\gamma = 1,4$ показатель адиабаты и $f' \equiv df/dr$.

Возмущения компонент скорости и энтальпии равны нулю на стенке трубы. Из анализа асимптотического поведения решения системы уравнений (1.3) при $r \rightarrow 0$ можно показать, что требование конечности амплитуды возмущения при $r = 0$ аналогично заданию нулевых значений для компонент скорости и энтальпии на оси трубы. Таким образом, в принятых обозначениях граничные условия для системы уравнений (1.3) имеют вид

$$r = 0, r = 1: \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0 \quad (1.4)$$

Уравнения (1.3) – (1.4) образуют задачу на собственные значения для частоты ω и волновых чисел α, n . При заданном числе Re эта задача на собственные значения дает комплексное дисперсионное соотношение в виде $\omega = \omega(\alpha, n)$, связывающее параметры α, n и ω , которые в общем случае все комплексны. В данном исследовании используется линейная теория устойчивости во временной постановке, в которой α, n действительны, а $\omega = \omega_r + i\omega_i$ комплексна. Таким образом, предполагается, что возмущения имеют форму бегущих волн с волновыми числами α и n по координатам x и θ соответственно и частоту ω_r . Возмущения считаются нарастающими во времени, если $\omega_i = \text{Im}(\omega) > 0$, или затухающими, если $\omega_i < 0$.

Выбор временной постановки задачи устойчивости приводит к линейной задаче на собственные значения для ω , при решении которой можно использовать конечно-разностный матричный метод.

Приведем краткое описание численного метода нахождения собственных значений. Система уравнений (1.3) представляется в конечно-разностном виде со вторым порядком точности на равномерной сетке. Расчетная область $0 \leq r \leq 1$ делится на $N - 1$ равных интервалов. Точки сетки имеют номера $j = 1, 2, \dots, N$. Так как в соответствии с граничными условиями возмущения давления предполагаются произвольными на оси ($j = 1$) и стенке ($j = N$) трубы, то давление следует вычислять в промежуточных

точках, расположенных между узлами разностной сетки, используемой для вычисления скоростей и энтальпии.

Три уравнения импульса второго порядка, одно уравнение энергии второго порядка и уравнение неразрывности первого порядка представляются в виде

$$A^* \Psi = \omega B^* \Psi, \Psi = \|\psi^{*(1)}, \psi^{*(2)}, \psi^{*(3)}, \dots, \psi^{*(N-1)}\|$$

где ω – собственное значение, Ψ – конечно-разностное представление собственной функции, A^* и B^* – блочно-трехдиагональные матрицы. Собственное значение определяется из условия $\text{Det } |A^* - \omega B^*| = 0$.

Для рассматриваемой задачи матрица B^* обратима, поэтому уравнение для ω представимо в виде

$$\text{Det } |B^{*-1} A^* - \omega I| = 0$$

Полученное уравнение есть стандартная матричная задача на собственные значения, решаемая LR-методом.

2. Результаты расчетов. Ниже представлены результаты исследования устойчивости модельного внутреннего закрученного течения. Распределения параметров основного невозмущенного течения задаются в виде [14]

$$U(r) = \frac{U_1(r)}{U_0}, W(r) = \frac{W_1(r)}{U_0}, U_0 = U_1(0) \quad (2.1)$$

$$U_1(r) = U_2 \{1 - \exp[\lambda(r-1)]\} + \varepsilon \{\exp(-\sigma r^2) - \exp(-\sigma)\}$$

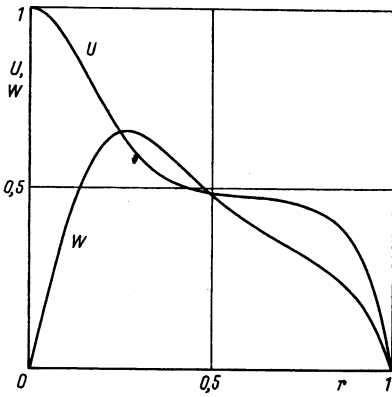
$$W_1(r) = W_2 \{\exp(-\lambda) - \exp[\lambda(r-1)]\} + \frac{\beta}{r} [1 - \exp(-\sigma r^2)]$$

$$U_2 = \frac{1 - \frac{\varepsilon}{\sigma} [1 - (1 + \sigma) \exp(-\sigma)]}{1 + \frac{2}{\lambda^2} [1 - \lambda - \exp(-\lambda)]}, W_2 = \beta \frac{1 - \exp(-\sigma)}{1 - \exp(-\lambda)}$$

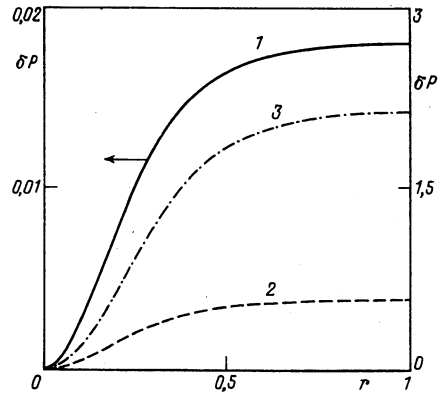
$$\ln P = \ln P_0 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \int_0^r \frac{W^2}{H} \frac{dr}{r}, P_0 = \frac{1}{\gamma M_0^2}, H = H_0 = \frac{1}{(\gamma - 1) M_0^2} \quad (2.2)$$

Эти распределения скоростей описывают вихрь Бюргерса для части потока вблизи оси вихря (характеризуемой параметром σ) и аппроксимируют пограничный слой вблизи стенки трубы (описываемый параметром λ). Распределения (2.1) моделируют закрученное течение в круглой трубе [14]. Параметр ε определяет форму профиля осевой скорости: равномерный поток при $\varepsilon = 0$, течение струйного типа при $\varepsilon > 0$ и типа следа при $\varepsilon < 0$ (по крайней мере в окрестности оси). Параметр β характеризует закрутку потока.

При проведении расчетов были использованы распределения продольной и окружной составляющих скорости, соответствующие параметрам $\varepsilon = 1,2$, $\beta = 0,56$, $\lambda = 12$, $\sigma = 18$. Распределения компонент скорости для этого набора параметров, принятые также в [14], показаны на фиг. 1. Будем считать, что температура газа (или, что то же, энтальпия) постоянна по сечению трубы и равна своему значению на оси трубы (2.2). Используя введенное ранее характерное число Маха M_0 , посчитанное по продольной составляющей скорости и температуре газа на оси трубы, нетрудно получить зависимость энтальпии и давления от M_0 (2.2). Были проведены расчеты при $M_0 = 0,1, 0,5$ и $0,8$. При неизменных распределениях скоростей U и W невозмущенного течения в рассматриваемом сечении трубы (2.1) изменение числа M_0 и соответствующее изменение энтальпии $H(r) = 1/((\gamma - 1)M_0^2)$ приводят к перераспределению давления по сечению трубы и увеличению поперечных градиентов давления одновременно с



Фиг. 1. Профили продольной U и окружной W составляющих скорости



Фиг. 2. Распределение $\delta P = (p - p_0) / p_0$ в поперечном сечении трубы. Кривые 1-3 соответствуют числам Маха $M_0 = 0,1; 0,5; 0,8$

ростом числа M_0 (2.2). Распределения относительного перепада давления $\delta P = \Delta P / P_0$ для указанных значений числа Маха показаны на фиг. 2.

Были выполнены расчеты устойчивости при числе Маха $M_0 = 0,1$ для значений окружного волнового числа $n = 0, \pm 1, \pm 2$. Отрицательные значения окружного волнового числа соответствуют возмущениям, обладающим противоположной закруткой по отношению к основному невозмущенному течению в трубе. Вид нейтральных кривых в плоскости (α, R) показан на фиг. 3. Нейтральная кривая для $n = 0$ на фиг. 3 не показана, так как возмущения этого типа значительно более устойчивы и соответствующее критическое число Рейнольдса Re^* значительно превосходит величины Re^* для возмущений, соответствующих волновым числам $n = \pm 1, \pm 2$.

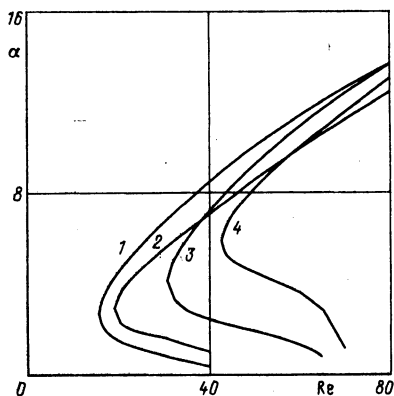
Результаты показывают, что возмущения с $n = 1$ раньше теряют устойчивость и им соответствует минимальное значение числа Рейнольдса потери устойчивости $Re^* = 22,5$, которое достигается при $\alpha = 2,8$. Нейтральная кривая для $n = -1$ лежит целиком правее нейтральной кривой для $n = 1$ и, следовательно, такие возмущения более устойчивы.

Возмущения, соответствующие большим абсолютным значениям окружного волнового числа, оказываются тем более устойчивыми, чем больше $|n|$. Критические числа Рейнольдса Re^* возрастают одновременно с ростом $|n|$. В области относительно небольших значений продольного волнового числа $\alpha \leq 10$ возмущения с $n = \pm 2$ оказываются более устойчивыми, а соответствующие им критические числа Рейнольдса Re^* больше, чем при $n = \pm 1$.

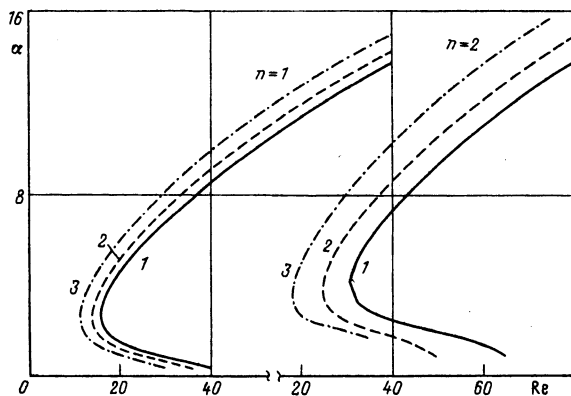
Однако при больших значениях продольного волнового числа α ситуация изменяется и возмущения, соответствующие $n = \pm 2$, теряют устойчивость раньше, чем возмущения с $n = \pm 1$ и тем же самым значением α . Так, расчеты устойчивости для возмущений с $n = -1$ и -2 показывают, что при $\alpha \leq 10$ возмущения, соответствующие $n = -1$, теряют устойчивость раньше, чем возмущения с $n = -2$, и в то же время при $\alpha > 10$ ситуация меняется на обратную.

На фиг. 4 показано влияние числа Маха на возмущения с окружным волновым числом $n = 1$. Возрастание M_0 приводит к уменьшению критического числа Рейнольдса и смещению нейтральных кривых, соответствующих большим значениям числа Маха $M_0 = 0,5$ и $0,8$, в сторону меньших чисел Рейнольдса по сравнению с нейтральной кривой для $M_0 = 0,1$.

Величина смещения ΔR нейтральных кривых в направлении вертикальной оси при фиксированном значении α для $M_0 = 0,5$ и $0,8$ монотонно увеличивается одновременно



Фиг. 3. Кривые нейтральной устойчивости для распределения скоростей (2.1) и $M_0 = 0,1$. Кривые 1–4 соответствуют значениям окружного волнового числа $n = 1; -1; 2; -2$



Фиг. 4. Нейтральные кривые 1–3 для чисел Маха $M_0 = 0,1; 0,5$ и $0,8$ ($n = 1; 2$)

с ростом α . Вид нейтральных кривых и, в частности, их поведение при больших α при возрастании числа Маха не изменяются.

Аналогичное влияние возрастания числа Маха обнаруживается и при рассмотрении поведения характеристик возмущений с $n = 2$ (соответствующие им кривые нейтральной устойчивости на фиг. 4). Критические числа Рейнольдса Re^* уменьшаются одновременно с ростом M_0 , нейтральные кривые смещаются относительно нейтральной кривой для $M_0 = 0,1$ в сторону оси α ($Re = 0$) тем больше, чем больше характерное число Маха (фиг. 4).

Как следует из представленных результатов, для рассматриваемого модельного течения увеличение числа Маха приводит к уменьшению значений критического числа Рейнольдса потери устойчивости.

Заключение. В рамках линейной теории исследована устойчивость закрученного течения сжимаемого теплопроводного газа в круглой трубе относительно наиболее неустойчивых возмущений, соответствующих значениям окружного волнового числа $n = \pm 1, \pm 2$. Приведены нейтральные кривые для значений характерного числа Маха $M_0 = 0,1, 0,5$ и $0,8$.

Рост числа Маха оказывает дестабилизирующее влияние на закрученное течение в трубе: нейтральные кривые, соответствующие возмущениям с фиксированным значением n , смещаются в направлении меньших чисел Re в плоскости (α, Re) так, что критические числа Рейнольдса уменьшаются. При этом для рассмотренных значений M_0 форма нейтральных кривых при фиксированном значении n сохраняется. Рост числа M_0 сильнее дестабилизирует возмущения, соответствующие большим значениям продольного волнового числа α .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00586).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Werle H. Visualization en tunnel hydrodynamique // Rech. Aeronaut. 1953. № 33. P. 3–7.
2. Hall M.G. Vortex breakdown // Annu. Rev. Fluid Mech. 1972. V. 4. P. 195–218.
3. Leibovich S. Vortex stability and breakdown: Survey and extension // AIAA Journal. 1984. V. 22. № 9. P. 1192–1206.

4. *Lessen M., Singh P.J., Paillet F.* The stability of the trailing line vortex. Pt 1. Inviscid theory // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 63. Pt 4. P. 753–763.
5. *Batchelor G.K.* Axial flow in trailing line vortices // *J. Fluid Mech.* 1964. V. 20. Pt 4. P. 645–658.
6. *Liu C., Menne S.* Simulation of a three-dimensional vortex breakdown // *AIAA Paper.* 1989. № 1806. 5 p.
7. *Lessen M., Paillet F.* The stability of a trailing line vortex. Pt 2. Viscous theory // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 65. Pt 4. P. 769–779.
8. *Гольдштик М.А., Штерн В.Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
9. *Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И.* Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989. 336 с.
10. *Владимиров В.А.* Устойчивость течения типа смерча // *Динамика сплошной среды.* Новосибирск: Ин-т гидродинамика СО АН СССР, 1978. Вып. 37. С. 50–62.
11. *Казаков А.В.* Завихренны́е течения вязкого теплопроводного газа в слаборасширяющейся трубе с объемным подводом энергии // *Изв. РАН. МЖГ.* 1996. № 5. С. 90–97.
12. *Казаков А.В.* К расчету завихренного течения вязкого теплопроводного газа в слаборасширяющейся трубе с теплоподводом // *Теплофизика высоких температур.* 1996. Т. 34. № 4. С. 560–566.
13. *Kazakov A.V.* Stability of the viscous subsonic vortex flow with volume energy supply // *Proc. 19th Intern. Congr. Theor. and Appl. Mech. Kyoto, Japan, 1996.* P. 194.
14. *Menne S.* Vortex breakdown in axisymmetric flow // *AIAA Paper.* 1988. № 506. 9 p.

Москва

Поступила в редакцию
29.IV.1997