

УДК 532.592:517.54

© 1999 г. В.И. ИВАНОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СОЛИТОНА СТОКСА

Построена математическая модель уединенной волны предельной амплитуды в канале постоянной глубины. Модель основана на конформном отображении области изменения комплексного потенциала на область, близкую к области течения солитона Стокса. Проведено сравнение параметров модели с известными результатами численных расчетов. С помощью предлагаемой модели построены линии тока в подвижной и неподвижной системах координат, а также изотахи, изоклины и изобары солитона Стокса.

Рассматривается симметричная уединенная волна предельной амплитуды в канале постоянной глубины с изломом 120° на гребне волны, называемая солитоном Стокса.

Солитон Стокса давно привлекает внимание исследователей [1–3], но изучен он до сих пор мало. В [4] доказана теорема существования солитона Стокса. Довольно подробно изучена численно [5–9] геометрическая форма солитона Стокса (относительная высота гребня и профиль волны). Но численных данных по гидродинамике солитона Стокса, т.е. полей скорости и давления, карт линий тока в литературе нет. В [6] приведены численные результаты для компонент скорости и давления в длинной периодической волне, весьма близкие к соответствующим параметрам солитона Стокса, однако эти результаты вычислены на редкой сетке, недостаточной для построения полной картины соответствующих полей вблизи гребня волны.

В связи с ограниченностью численных результатов по солитону Стокса представляет интерес построение математических моделей, достаточно хорошо описывающих его гидродинамику.

Введем в плоскости движения солитона связанную с волной декартову систему координат x, y , в которой течение жидкости стационарно. Начало координат поместим на дне канала под гребнем солитона, ось y направим вертикально вверх, ось x – горизонтально против движения волны (фиг. 1).

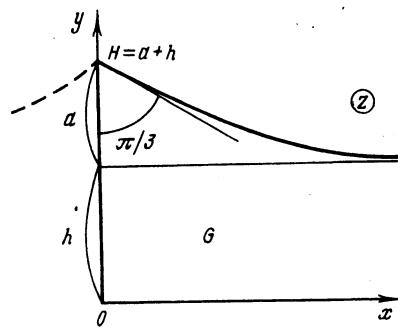
Обозначим через G половину области течения, расположенную справа от оси y , через h , a и v_0 – соответственно глубину канала, амплитуду и скорость солитона. Рассматриваем G как область комплексной плоскости $z = x + iy$.

Движение жидкости в области G предполагаем потенциальным с комплексным потенциалом $\Phi = \phi + i\psi$, где ϕ – потенциал поля скорости, ψ – функция тока. В качестве области Γ изменения комплексного потенциала возьмем полуполосу $\phi > 0$, $0 < \psi < \pi/2$ (фиг. 2, а). Скорость жидкости выражается формулой $v = \bar{\phi}'(z)$. На свободной границе волны комплексный потенциал удовлетворяет условию Бернулли

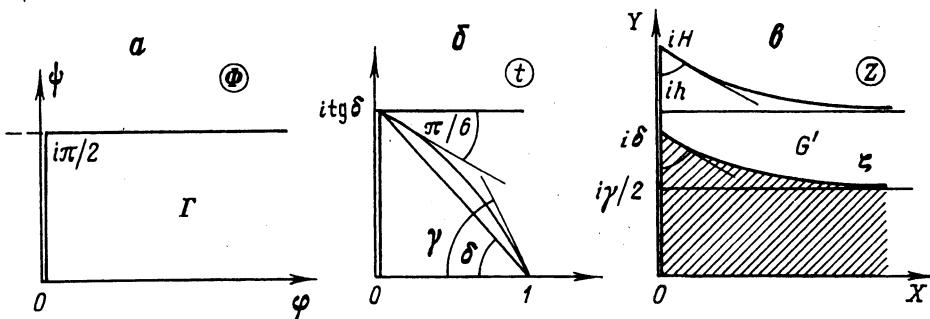
$$\left| \frac{d\Phi}{dz} \right|^2 + 2g(y - H) = 0 \quad (1)$$

где $H = a + h$ – высота гребня солитона над уровнем дна канала.

Важнейшей геометрической характеристикой солитона Стокса является отноше-



Фиг. 1. Область течения солитона Стокса



Фиг. 2. Построение конформного отображения области изменения комплексного потенциала Γ на область G' по формулам (2) – (5)

ние $b = a/h$, связанное с числом Фруда $Fr = v_0 / \sqrt{gh}$ соотношением $Fr^2 = 2b$. Согласно современным данным [5–9], для солитона Стокса $b = 0,8332$; $Fr = 1,2909$.

Предлагаемая модель солитона Стокса представляет аналитическую функцию $Z = Z(\Phi)$, конформно отображающую область Γ на область G' , достаточно близкую к области G . Функция $Z(\Phi)$ должна отображать положительную вещественную полусось в саму себя, отрезок $(0, i\pi/2)$ мнимой оси – в отрезок $(0, iH)$, а луч $\Phi > 0, \Psi = \pi/2$ – в кривую, аппроксимирующую профиль солитона Стокса.

Функцию $Z(\Phi)$ предлагается построить следующим образом. Функция

$$s = \operatorname{th}^2 \Phi \quad (2)$$

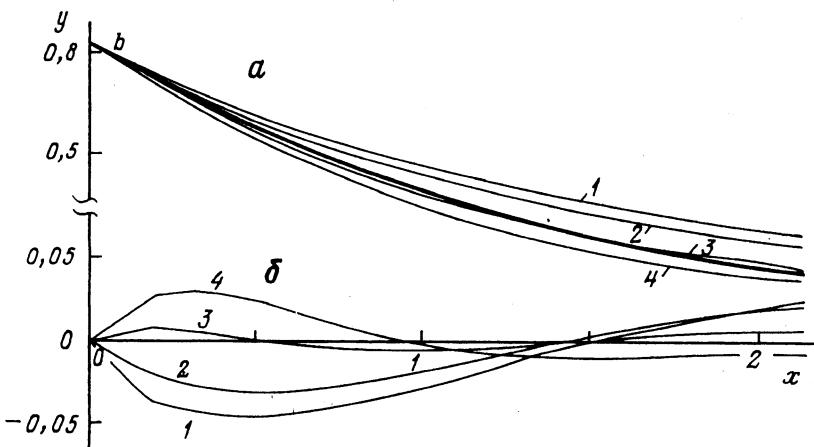
отображает конформно область Γ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} s > 0$, причем точки $\Phi_0 = 0, \Phi_1 = \infty, \Phi_2 = i\pi/2$ переходят соответственно в точки $s_0 = 0, s_1 = 1, s_2 = \infty$. Верхняя полуплоскость плоскости s отображается [10] на круговой треугольник с углами $\pi/2, \gamma = \pi a_2, \pi/3$ (фиг. 2, б) с помощью функции

$$t = C \frac{\sqrt{s} F(\alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; s)}{F(\alpha, \beta; \frac{1}{2}; s)} \quad (3)$$

$$C = 2 \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)\Gamma(\frac{1}{2}-\beta)}, \quad \alpha = \frac{1}{12} - \frac{a_2}{2}, \quad \beta = \frac{5}{12} - \frac{a_2}{2}$$

Масштабный множитель C выбран из условия $t(1) = 1$. При этом точка $s_2 = \infty$ отображается в точку $t_2 = i \operatorname{tg} \delta$, где δ – угол между хордой дуги круга и осью x (фиг. 2, б)

$$\delta = \frac{1}{2}(\pi/6 + \gamma) = \pi/2(\frac{1}{6} + a_2)$$



Фиг. 3. Профиль солитона Стокса (жирная линия) и профиль области G' при различных значениях параметра a_2 (а). Невязка интеграла Бернулли (δ) $a_2 = 0,1667; 0,200; 0,277; 0,3351$ (линии 1–4)

Преобразование

$$\zeta = \operatorname{arctanh} t = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} \quad (4)$$

отображает круговой треугольник в заштрихованную область на фиг. 2,в. Ее вершина находится в точке $i\delta = i\pi/2(\gamma_6 + a_2)$, а горизонтальная асимптота профиля представляет прямую $\operatorname{Im}\zeta = \gamma/2 = \pi a_2/2$. Наконец, определим исковую функцию, отображающую конформно область Γ на область G' , равенством

$$Z = \zeta + A\Phi, \quad A = 1/(6b) - a_2 \quad (5)$$

Высота гребная области G' равна $H = \pi/2(\gamma_6 + a_2 + A)$, ордината асимптоты $h = \pi/2(a_2 + A)$, коэффициент A определен из требования $(H - h)/h = b$.

Таким образом, аналитическая функция $Z(\Phi)$, заданная формулами (2)–(5), отображает область Γ на область G' , для которой $(H - h)/h = b$. Функция $Z(\Phi)$ содержит свободный параметр $a_2 = \gamma/\pi$, который можно подбирать по условию наилучшей аппроксимации профиля солитона Стокса.

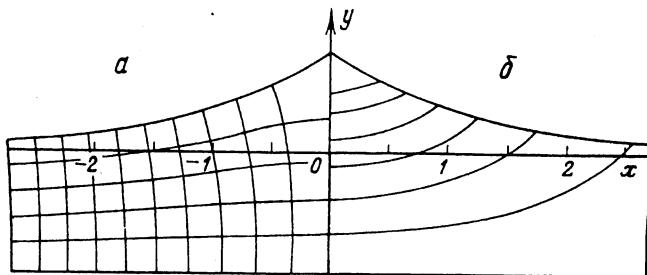
Численных данных о профиле солитона Стокса, опубликованных в [5–9], недостаточно для построения точного профиля в окрестности гребня солитона. Наиболее эффективный и точный алгоритм расчета формы солитона Стокса изложен в [9, 11]. По просьбе автора настоящей статьи авторами [11] выполнены подробные вычисления профиля солитона Стокса в окрестности гребня. Результат их расчетов представлен на фиг. 3, а жирной линией.

Один из способов выбора параметра a_2 в предлагаемой модели солитона Стокса – по асимптотике профиля волны при $x \rightarrow \infty$. Асимптотика профиля любого солитона при $x \rightarrow \infty$ имеет вид [12, 13] $y \sim C_1 \exp(-\vartheta x/h)$, где ϑ – параметр Стокса, удовлетворяющий уравнению $\operatorname{tg}\vartheta/\vartheta = Fr^2$. Для солитона Стокса $\vartheta = \vartheta_s = 1,05267$.

Асимптотика функции (3) при $s \rightarrow 1$ получается из формул для гипергеометрической функции [14]

$$t = 1 + B(1-s)^p + O((1-s)^{2p}), \quad p = \gamma_2 - \alpha - \beta = a_2 \quad (6)$$

где B – некоторая положительная константа.



Фиг. 4. Линии тока солитона Стокса в подвижной (*a*) и неподвижной (*b*) системах координат

Подставляя (6) в (3) и учитывая (2), получим

$$Z = 2h\Phi/\pi + B_1 e^{-2a_2\Phi} + O(e^{-4a_2\Phi}) \quad (7)$$

На свободной поверхности $\Phi = \varphi + i\pi/2$; разделяя в (7) вещественную и мнимую части ($Z = X + iY$), получим

$$X = 2h\varphi/\pi + O(e^{-2a_2\Phi}), \quad Y = h + B_2 e^{-2a_2\Phi} + O(e^{-4a_2\Phi})$$

откуда следует

$$Y \sim h + B_2 \exp(-\pi a_2 X/h)$$

Для совпадения показателей экспоненты в асимптотиках модельного и точного решений необходимо взять $a_2 = \vartheta_s/\pi = 0,33507$.

Профиль модельного решения (2) – (5), полученного при таком значении параметра a_2 , представлен на фиг. 3, *a* (кривая 4). При конечных значениях x этот профиль значительно отличается от точного.

Значение параметра a_2 в предлагаемой модели определено подбором. На фиг. 3, *a* изображены результаты вычисления профиля модели солитона Стокса на интервале $0 < x < 2,1$ для некоторых значений a_2 . Кривая 1 построена для значения $a_2 = 1/6$, при котором круговой треугольник (фиг. 2, *b*) превращается в прямолинейный прямоугольный треугольник. Кривая 2 построена для значения $a_2 = 1/(6h) = 0,200$, при котором коэффициент A , согласно (5), обращается в ноль (при этом область G' представляет просто отображение кругового треугольника фиг. 2, *b* посредством функции $Z = \operatorname{arcth} t$). Наилучшее приближение модельного профиля к точному в диапазоне $0 < x < 2,1$ получено при $a_2 = 0,277$ (кривая 3).

При $a_2 = 0,277$ граница области G' совпадает с границей солитона G с графической точностью (с относительной погрешностью, не превышающей 1–1,5%). Из принципа максимума для гармонической функции $Y(\varphi, \psi) - y(\varphi, \psi)$, определенной в области G , следует, что линии тока модельного течения тоже совпадают с графической точностью с линиями тока солитона Стокса.

Сеть линий тока и эквипотенциалей течения в подвижной системе координат представлена на фиг. 4, *a*. Она построена как отображение декартовой сетки линий в полуполосе, симметричной Γ , посредством функции (2) – (5) при $a_2 = 0,277$.

Комплексная скорость модельного течения жидкости в движущейся системе координат имеет вид

$$\bar{v} = v_x - iv_y = \left(\frac{1}{1-t^2} \frac{dt}{ds} \frac{ds}{d\Phi} + A \right)^{-1} \quad (8)$$

Множитель dt/ds вычисляется как производная отношения двух решений гипергеометрического уравнения (3)

$$\frac{dt}{ds} = \frac{CW}{F^2(\alpha, \beta; \gamma; s)}, \quad W = \gamma s^{-\gamma/2} (1-s)^{\alpha_2-1}$$

Ψ_j	$-V_1$		U_0		U_1		P_0		P_1	
Q	0,169	0,181	0,022	0,000	1,414	1,433	0,000	0,000	0,008	0,000
$0,8 Q$	0,138	0,148	0,808	0,805	1,390	1,405	0,340	0,337	0,255	0,249
$0,6 Q$	0,105	0,111	0,949	0,944	1,372	1,385	0,611	0,611	0,501	0,495
$0,4 Q$	0,070	0,074	1,018	1,014	1,360	1,371	0,884	0,885	0,743	0,737
$0,2 Q$	0,035	0,037	1,052	1,049	1,353	1,363	1,163	1,165	0,982	0,974
0	0,000	0,000	1,062	1,059	1,350	1,360	1,452	1,455	1,218	1,208

где W – вронскиан этих решений. С учетом равенства $ds/d\Phi = 2s^{\frac{1}{2}}(1-s)$ формула (8) принимает вид

$$\bar{v} = \left(\frac{C(1-s)^{a_2}}{(1-t^2)F^2(\alpha, \beta; \frac{1}{2}; s)} + A \right)^{-1}$$

В неподвижной системе координат комплексная скорость равна $\bar{v} - v_0$, где $v_0 = \pi/(2h)$ – скорость солитона Стокса. Комплексный потенциал течения в неподвижной системе координат $\Phi_1 = \Phi - v_0 Z$. Зависимость функции Φ от координат Z представлена параметрически через параметр Φ , пробегающий область Γ . Линии тока в неподвижной системе координат $\text{Im}\Phi_1 = \text{const}$ изображены на фиг. 4,б.

Поле давления определяется интегралом Бернулли. Нормируем давление, считая его равным единице на дне канала в невозмущенном течении

$$p = \left(H - Y - \frac{a|v|^2}{v_0^2} \right) / h \quad (9)$$

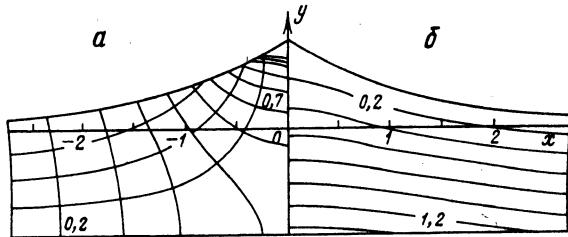
На свободной поверхности модельного течения правая часть выражения (9) отлична от нуля; она называется невязкой интеграла Бернулли. Невязка характеризует точность рассматриваемой модели. График невязки интеграла Бернулли при различных значениях параметра a_2 представлен на фиг. 3,б. Максимум абсолютной величины невязки на интервале $0 < x < 2,1$ при $a_2 = 0,277$ не превосходит 0,01. Величина максимума невязки некритична к изменениям параметра a_2 в окрестности точки $a_2 = 0,277$, поэтому выбирать оптимальное значение a_2 по минимуму невязки нецелесообразно.

Для выяснения точности вычисления скорости и давления по предлагаемой модели солитона Стокса проведено сравнение с численными значениями этих параметров, полученных в [6] для волны длиной $\lambda = 32,7 h$. Имеются численные данные для компонент скорости и давления в узлах сетки линий тока и эквипотенциалей в точках

$$\phi_0 = 0, \quad \phi_1 = \pi^2/4, \quad \psi_j = Qj/5, \quad Q = \pi/2, \quad j = 0, 1, 2, \dots 5$$

Результаты модельных и точных расчетов сведены в таблице в пять пар столбцов. Здесь U_0 и U_1 – значения горизонтальной компоненты скорости $v_x(\phi_0, \psi_j)$ и $v_x(\phi_1, \psi_j)$ соответственно; P_0 и P_1 – давления $p(\phi_0, \psi_j)$ и $p(\phi_1, \psi_j)$; V_1 – вертикальная компонента скорости $v_y(\phi_1, \psi_j)$. В первом столбце каждой пары приведены результаты расчетов указанных параметров по предлагаемой модели солитона, во втором столбце – численные данные [6] для тех же значений комплексного потенциала. При этом узлы сети линий тока и эквипотенциалей в точном и модельном решениях не совпадают. Если вычислять значения численных и модельных параметров в одних и тех же точках пространства, то их совпадение будет несколько лучше, чем это представлено в таблице.

Давление, вычисленное по формуле (9), отличается от точного давления в солитоне Стокса не более чем на 0,01 (давление на дне канала в невозмущенном течении равно



Фиг. 5. Изотахи и изоклины солитона Стокса в неподвижной системе координат (линии проведены через 0,1) (а), изобары солитона Стокса (линии проведены через 0,2) (б)

единице). Погрешность вычисления компонент скорости довольно велика в окрестности гребня солитона, но в остальной области течения она не превышает 0,01–0,02 (скорость солитона равна 1,57).

Изотахи и изоклины солитона Стокса в неподвижной системе координат, т.е. линии уровня функций $|v - v_0| = \text{const}$, $\arg(v - v_0) = \text{const}$, изображены на фиг. 5, а. На фиг. 4, б и 5, а видно, что построенные сети линий имеют искажения вблизи гребня солитона, который является критической точкой течения.

Изобары солитона Стокса представлены на фиг. 5, б.

Заключение. Построена простая математическая модель солитона Стокса. Модель содержит два вещественных параметра, из которых один определяется из условия равенства относительной высоты гребня солитона ее точной величине 0,8223, а второй подбирается из условия наилучшей аппроксимации точного профиля солитона, полученного численно.

Точность вычисления по данной модели основных гидродинамических параметров солитона (полей скорости и давления) установлена путем сравнения с известными численными результатами [6]. Точность модели оказалась достаточно высокой для построения картины течения всюду, кроме малой окрестности гребня солитона, где скорость определяется со значительной ошибкой.

Предложенная модель позволила построить картины линий тока в подвижной и неподвижной системах координат, а также изотахи, изоклины и изобары солитона Стокса.

Автор благодарен В.П. Житникову и Н.М. Шерыхалиной за предоставление численных результатов расчета профиля солитона Стокса, а также Г.Ю. Степанову за внимание к работе и полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. McCowan J. On the highest wave of permanent type // Phil. Mag. 1894. Ser. 5. V. 38. № 233. P. 351–358.
2. Wehausen J.V., Laitone E.V. Surface waves // Handbuch der Physik. Berlin a.o.: Springer, 1960. V. 9. P. 446–778.
3. Lenau C.W. The solitary wave of maximum amplitude // J. Fluid Mech. 1966. V. 26. Pt 2. P. 309–320.
4. Amick C.J., Toland J.F. On solitary water waves of finite amplitude // Arch. Rat. Mech. Analys. 1981. V. 76. № 1. P. 9–95.
5. Witting J. On the highest and other solitary waves // SIAM'J. Appl. Math. 1975. V. 28. № 3. P. 700–719.
6. Williams J.M. Limiting gravity waves in water of finite depth // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1981. V. 302. № 1466. P. 139–188.
7. Hunter J.K., Vanden Broeck J.M. Accurate computations for steep solitary waves // J. Fluid Mech. 1983. V. 136. P. 63–71.

8. Evans W.A.B., Ford M.J. An exact integral equation for solitary waves (with new numerical results for some "internal" properties) // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1996. V. 452. № 1945. P. 373–390.
9. Шерыхалина Н.М. Разработка численных алгоритмов решения задач гидродинамики с особыми точками на свободной поверхности и экспериментальное исследование скорости их сходимости. Уфа, 1995. – Деп. в ВИНИТИ № 2550 – В 95. 17с.
10. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М.: Гостехиздат, 1953. 676 с.
11. Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Ураков А.Р. Применение метода выделения особенностей для решения задач гидродинамики весомой жидкости и электрохимического формообразования // Динамика сплошных сред со свободными границами. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1996. С. 97–106.
12. Lamb H. Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1924. 687 p. (Рус. перев.: Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.)
13. Овсянников Л.В. Об асимптотическом представлении уединенных волн // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 3. С. 556–559.
14. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: Гостехиздат, 1953. 380 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.IX.1997