

УДК 532.546:536,25

© 1999 г. А.Н. КАРАПАЦ, М.М. РАМАЗАНОВ

## КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЖИДКОСТИ В ДВУХСЛОЙНЫХ НАСЫЩЕННЫХ ПЛАСТАХ

Рассмотрена задача о конвективной неустойчивости жидкости в системе, состоящей из двух горизонтальных пористых слоев разной проницаемости с проницаемой общей границей. Проведено параметрическое исследование задачи в зависимости от соотношения толщин слоев и их проницаемостей. В отличие от однородного слоя, в данном случае нейтральная кривая может иметь один или два минимума в зависимости от соотношения параметров. Случай двух минимумов характеризует условие потери устойчивости жидкости во всей системе в целом и в слое с меньшей толщиной, но большей проницаемостью. Этим минимумам соответствуют существенно разные волновые числа.

Одной из важных областей приложения теории конвективных движений является геотермия [1–5]. Реальные коллекторы в недрах Земли могут обладать существенной неоднородностью и анизотропией проницаемости. Оценки коэффициентов проницаемости геотермальных систем, приводимые в литературе, различаются на несколько порядков [1]. Обычно для оценки условия возникновения конвекции в этих системах используют значение критического числа Рэлея, равное  $4\pi^2$ , имеющее место для однородного слоя. Из расчетов, приводимых ниже, следует, что критическое число Рэлея, вычисленное по средней проницаемости, может в несколько раз превышать это значение. В подавляющем большинстве работ, посвященных конвекции в пористой среде, предполагается, что проницаемость постоянна. В [2] приводится краткое содержание двух работ, посвященных исследованию возникновения конвекции в горизонтальном слое с анизотропной проницаемостью простейшего вида, когда проницаемость имеет разные значения по горизонтальному и вертикальному направлениям. В настоящей работе исследуется влияние неоднородности проницаемости на возникновение конвекции в простейшем случае кусочно-постоянной проницаемости.

**1. Постановка задачи.** Пористая область (пласт) состоит из двух горизонтальных слоев с проницаемостью и толщиной  $k_1, h_1, k_2, h_2$  соответственно. Для простоты предполагается, что все эффективные теплофизические параметры обоих слоев, в частности теплопроводности, совпадают и постоянны. Направим ось  $Z$  по вертикали вверх и  $X$  по горизонтали. Координата  $z$  отсчитывается от общей границы. Верхняя граница верхнего слоя и нижняя граница нижнего слоя непроницаемы для жидкости и на них поддерживается постоянная температура (нижняя температура больше). На общей границе непрерывны нормальная компонента скорости, давление, температура и тепловой поток. Запишем безразмерную систему уравнений и граничные условия для свободной конвекции в пористой среде в приближении Дарси – Буссинеска [3]. Отсчитывая давление и температуру от их распределения при механическом равновесии, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j &= -w_j R (\nabla p_j - T_j \mathbf{e}_z) \quad (j=1, 2) \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_j = 0 \\ b \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}_j \nabla T_j - \mathbf{u}_j \mathbf{e}_z &= \Delta T_j \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$R = \frac{k_2 \rho g \beta A h_2^2}{\chi \mu}, \quad b = \frac{m(\rho c_p)_c}{(\rho c_p)_f}, \quad \chi = \frac{\lambda}{(\rho c_p)_f}$$

$$w_1 \equiv w = \frac{k_1}{k_2}, \quad w_2 = 1$$

$$\mathbf{u}_1 \mathbf{e}_z = 0, \quad T_1 = 0 \quad (z = h_1), \quad \mathbf{u}_2 \mathbf{e}_z = 0, \quad T_2 = 0 \quad (z = -1)$$

$$T_1 = T_2, \quad \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{\partial T_2}{\partial z}, \quad p_1 = p_2, \quad (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \mathbf{e}_z = 0 \quad (z = 0) \quad (1.2)$$

Где индексы 1, 2 – относятся к верхнему и нижнему слоям соответственно,  $\mathbf{u}$  – скорость фильтрации жидкости,  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $Z$ ,  $p$  – давление,  $T$  – температура,  $A$  – градиент равновесного распределения температуры,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\beta$  – коэффициенты теплового расширения,  $\lambda$  – эффективная теплопроводность,  $\chi$  – эффективная температуропроводность,  $\mu$  – динамическая вязкость,  $c_p$  – теплоемкость,  $m$  – пористость,  $k_i$  – проницаемости,  $R$  – фильтрационное число Рэлея, определенное по толщине и проницаемости нижнего (второго) слоя, индексы  $f$  и  $c$  относятся к жидкости и к пористой среде соответственно. В (1.1) выбраны следующие характерные масштабы:  $h_2$  – длины,  $A h_2$  – температуры,  $\lambda/h_2(\rho c_p)_f$  – скорости,  $h_2^2(\rho c_p)_f/\lambda$  – времени,  $\beta \rho g A h_2^2$  – давления.

**2. Решение линеаризованной системы уравнений.** В рассматриваемой задаче, следуя общей методике [3], можно показать принцип монотонности возмущений при подогреве снизу. Поэтому достаточно рассмотреть стационарную задачу. Стандартным методом после линеаризации приведем уравнения (1.1) к уравнениям относительно вертикальной компоненты скорости и температуры [3]. Для этого применим к первому уравнению оператор  $\text{rot rot}$  и спроектируем его на ось  $Z$ . С учетом уравнения неразрывности получим

$$\Delta V_j = w_j R \Delta_{xy} T_j \quad (j = 1, 2); \quad \Delta T_j = -V_j \quad (2.1)$$

где  $V_j$  – вертикальные компоненты скорости в слоях,  $\Delta_{xy}$  – оператор Лапласа в плоскости  $XY$ . Исключив из (2.1) скорости, получим

$$\Delta^2 T_j = -w_j R \Delta_{xy} T_j \quad (j = 1, 2) \quad (2.2)$$

Подставляя в (2.2)  $T_j = \Theta_j(z) e^{ikr}$  ( $j = 1, 2$ ) и учитывая граничные условия (1.2), для  $\Theta_j(z)$  получим задачу

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2 \Theta_j = w_j k^2 R \Theta_j, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (j = 1, 2) \quad (2.3)$$

$$\Theta_1 = 0, \quad \Theta_1' = 0 \quad (z = h_1), \quad \Theta_2 = 0, \quad \Theta_2'' = 0 \quad (z = -1)$$

$$\Theta_1 = \Theta_2, \quad \Theta_1' = \Theta_2', \quad \Theta_1'' = \Theta_2'', \quad \Theta_1^{(3)} - k^2 \Theta_1' = w(\Theta_2^{(3)} - k^2 \Theta_2') \quad (z = 0) \quad (2.4)$$

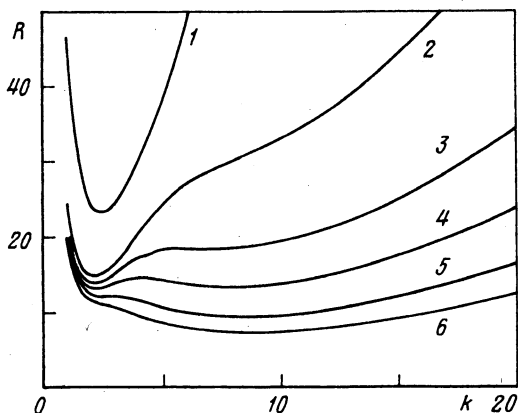
где штрихи обозначают дифференцирование по  $z$ .

Решение задачи (2.3), (2.4) ищем в виде

$$\Theta_1 = a_1 \text{sh } \lambda_1(z - h_1) + a_2 \text{sh } \lambda_2(z - h_1); \quad \Theta_2 = a_3 \text{sh } \lambda_3(z + 1) + a_4 \text{sh } \lambda_4(z + 1) \quad (2.5)$$

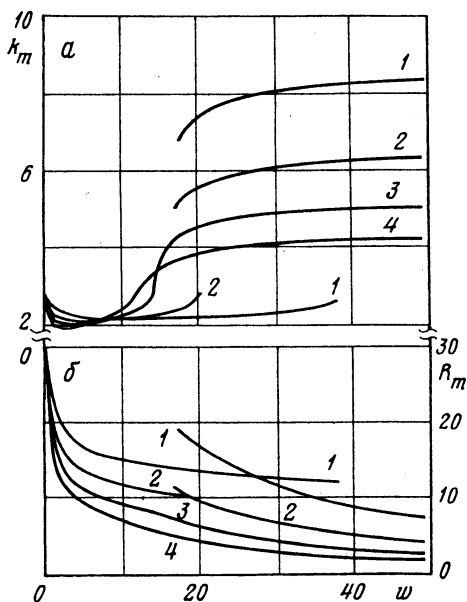
$$\lambda_i = \sqrt{k^2 - (-1)^i \sqrt{w k^2 R}}, \quad i = 1, 2; \quad \lambda_i = \sqrt{k^2 - (-1)^i \sqrt{k^2 R}}, \quad i = 3, 4$$

Подставляя (2.5) в (2.3), (2.4), из граничных условий получим однородную систему четырех алгебраических уравнений относительно  $a_i$ , поскольку условия на нижней и



Фиг. 1

Фиг. 1. Нейтральная кривая в плоскости  $Rk$  при  $h_1 = 0,3$  ( $h_2 = 1$ ) и  $w = 1, 10, 18, 26, 38, 50$  (линии 1-6)



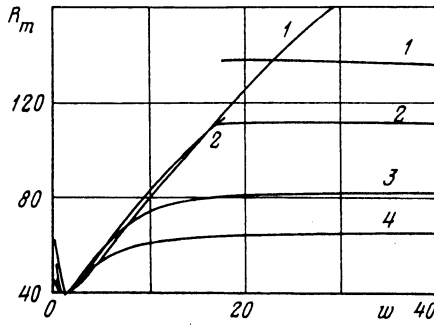
Фиг. 2

Фиг. 2. Зависимость критического числа Рэля  $R_m$  и волнового числа  $k_m$  от  $w$  при  $p_1 = 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$  (линии 1-4)

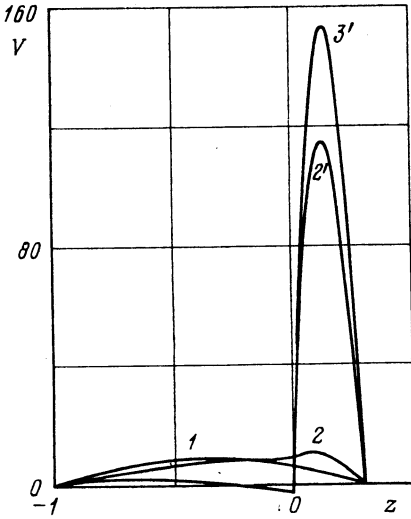
верхней границах пласта выполнены заранее. Условия разрешимости этой системы позволяют найти искомую нейтральную кривую. Решая после этого систему уравнений, найдем  $a_i$  с точностью до постоянного множителя. После чего находятся вертикальные компоненты скорости и температура.

**3. Обсуждение результатов.** Расчеты показали, что нейтральная кривая в рассматриваемой задаче, в отличие от случая однородного слоя, может иметь один или два минимума в зависимости от соотношения параметров. Наличие двух минимумов имеет место при существенно различных толщинах слоев и характеризует условия потери устойчивости жидкости во всей системе в целом и в слое с меньшей толщиной, но с большей проницаемостью. Этим минимумам соответствуют существенно разные волновые числа. Их относительная глубина в случае двух минимумов (относительная разность максимума и минимума) невелика. На фиг. 1 показаны нейтральные кривые на плоскости  $kR$  для  $h_1 = 0,3$ . Значение  $w = 1$  соответствует однородному слою и критическое число Рэля имеет один минимум  $R_m = 23,36$  при  $k = 2, 4$ . С ростом  $w$  (относительной проницаемости верхнего слоя) существующий минимум понижается и одновременно образуется второй минимум, характеризующий условие потери устойчивости в верхнем слое. По мере дальнейшего увеличения  $w$  первый минимум исчезает и остается второй.

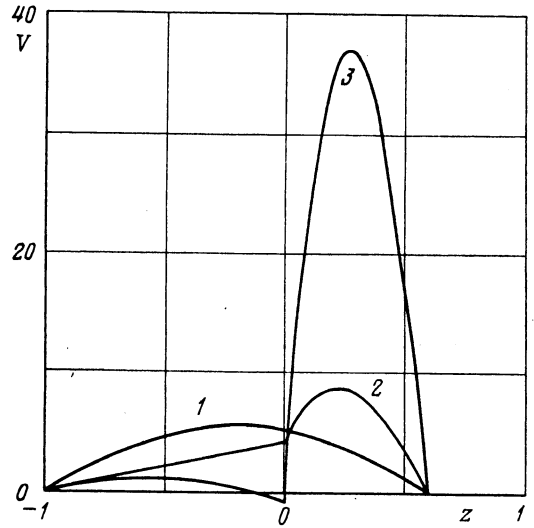
На фиг. 2 показана зависимость  $K(w)$  (а) и  $R_m(w)$  (б) при  $h_1 = 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$ . При малых  $h_1$  имеются две ветви  $R_m(w)$ , соответствующие разным волновым числам. Левая ветвь отвечает за потерю устойчивости во всем слое, а правая — только в верхнем. Расчеты показали, что следующие спектральные уровни характеризуются кривыми, качественно совпадающими с приведенными на фиг. 1 и 2, однако области существования двух минимумов при тех же  $h_1$  значительно шире, а их относительная глубина существенно больше.



Фиг. 3. Зависимость  $R_m(w)$  для второго случая ( $h_1 + h_2 = 1$ ) при  $h_1 = 0,25; 0,3; 0,4; 0,5$  (линии 1-4)



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 4. Зависимости  $V_z(z)$  при  $h_1 = 0,3$  ( $h_2 = 1$ ) и  $(w; R_m; k_m) = (1; 22,9; 2,4), (17,6; 13,8; 2,2), (17,6; 18,6; 6,6), (49,5; 7,2; 8,4)$  – соответственно линии 1, 2, 2', 3. Цифры без штриха относятся к первой ветви на кривой 1 фиг. 2, со штрихом – ко второй

Фиг. 5. Зависимость  $V_z(z)$  при  $h_1 = 0,6$  ( $h_2 = 1$ ) и  $(w; R_m; k_m) = (1,1; 14,9; 2), (10,1; 6,9; 2,4), (35; 2,5; 4,1)$  – соответственно линии 1-3

Рассмотрен случай, когда число Рэлея определено по суммарной толщине слоев и средней проницаемости, которая определялась как  $k_s h = k_1 h_1 + k_2 h_2$ . В этом случае также имеется область параметров  $h_1$  и  $w$ , при которых нейтральная кривая имеет два пологих минимума. Зависимость  $R_m(w)$  для указанного случая при  $h_1 = 0,25; 0,3; 0,4; 0,5$  показана на фиг. 3. В данном случае минимум, соответствующий всей системе, с ростом  $w$  растет, что связано с уменьшением относительной проницаемости нижнего слоя по отношению к средней. При  $h_1 = 0,25$  и  $w > 20 R_m \approx 16\pi^2$ . С уменьшением  $h_1$  эта величина увеличивается. При малых  $h_1$  и достаточном значении  $w$  имеется вторая ветвь, характеризующая условие потери устойчивости в верхнем слое. По мере увеличения  $h_1$  (уменьшения  $h_2$ ) обе ветви сливаются и критическое число Рэлея стремится к значению для однородного слоя, равному  $4\pi^2$ . Кривые для волновых чисел качественно не отличаются от тех, что показаны на фиг. 2.

На фиг. 4 показаны зависимости  $V_z(z)$ , соответствующие кривым 1 ( $h_1 = 0,3$ ) на

фиг. 2. Кривая 1 ( $w = 1$ ) соответствует однородному слою. Одинаковым цифрам соответствуют одинаковые значения  $w$  и  $h_1$ . Кривая 3 отвечает значению  $w = 49,5$ , где существует только вторая ветвь нейтральной кривой. Кривые без штриха и со штрихом различаются существенно разными волновыми числами и переход от первых ко вторым с ростом  $w$  происходит скачком (фиг. 2, а). При этом существует область изменения  $w$ , где неустойчивы обе структуры течения.

На фиг. 5 показаны  $V_z(z)$  для значений параметров, соответствующих четвертым кривым ( $h_1 = 0,6$ ) на фиг. 2, когда нейтральная кривая состоит из одной ветви. В отличие от предыдущего случая здесь переход от первых кривых ко вторым, соответствующих потере устойчивости во всем слое в целом и в верхнем слое, происходит непрерывно. Это согласуется с тем, что кривая 1 для волнового числа на фиг. 2, а непрерывна. В случае потери устойчивости только в верхнем слое в нижнем слое имеется слабое индуцированное течение в виде двух вихрей противоположного знака.

**Закключение.** Исследована устойчивость конвективного движения жидкости в горизонтальном пористом слое, состоящем из двух подслоев толщинами  $h_1$  и  $h_2$ . Возможны два случая, когда жидкость теряет устойчивость во всем слое или только в более пронизанном (верхнем) подслое. В первом случае конвективная ячейка охватывает всю толщину пласта, при этом с ростом отношения волновых чисел  $w = k_1/k_2$  интенсивность движения в верхнем подслое растет, а в нижнем падает. Во втором случае конвекция ( $w \gg 1$ ) в верхнем слое индуцирует слабое течение в нижнем слое в виде двух вихрей противоположного знака. Когда  $h_1/h_2 > A \approx 0,5$ , переход от первого случая ко второму с ростом  $w$  происходит непрерывно. Если же  $h_1/h_2 < A$ , критическое число Рэлея как функция  $w$  состоит из двух пересекающихся ветвей. При этом в некотором интервале изменения  $w$  существуют два критических числа Рэлея  $R_{m1}$  и  $R_{m2}$  и соответствующие волновые числа  $k_{m1}$  и  $k_{m2}$ .

Авторы выражают благодарность К.М. Магомедову за обсуждение работы и полезные замечания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каракин А.В., Лобковский Л.И., Мясников В.П.* Гидротермальная конвекция в верхних слоях коры и ее влияние на геотермический градиент // Теоретические и экспериментальные исследования по геотермике морей и океанов. М.: Наука, 1984. С. 9–17.
2. *Гибхарт Б., Джалурия И., Махаджан Р., Саммакия Б.* Свободноконвективные течения, тепло и массообмен. Т. 2. М.: Мир, 1991. 528 с.
3. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
4. *Магомедбеков Х.Г., Рамазанов М.М.* Гидротермальная конвекция в тонком пористом кольце // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 6. С. 4–8.
5. *Магомедбеков Х.Г., Рамазанов М.М.* Линейный анализ конвективной неустойчивости жидкости в горизонтальной кольцевой полости, заполненной пористой средой // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 3. С. 19–25.

Махачкала

Поступила в редакцию  
5.V.1997